
现代数学基础丛书
非线性动力系统分析引论

现代数学基础丛书

非线性动力系统分析引论

盛昭瀚　马军海　著

国家自然科学基金资助项目
高校博士点基金资助项目

科学出版社
2001

内 容 简 介

本书以非线性动力系统的分析为主要目的，介绍了有关非线性动力学基本概念、混沌、分形、混沌控制等非线性科学与复杂性科学所涉及的主要内容与一些重要工具。本书可使读者在不需要很深的知识背景下能较快地掌握这些内容与工具，此外，本书还较多地介绍了相关应用。

本书可作为大专院校有关专业本科生与研究生的教材，也可供有关的科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力系统分析引论/盛昭瀚，马军海著. —北京：科学出版社，2001

（现代数学基础丛书）

ISBN 7-03-008941-3

Ⅰ.非… Ⅱ.①盛…②马… Ⅲ.非线性：动力学 Ⅳ.O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 84514 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2001 年 9 月第一次印刷 印张：11 5/8

印数：1—3 000 字数：306 000

定价：23.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

《现代数学基础丛书》编委会

目　　录

第一章 绪 论

一、在数学上,线性方程与非线性方程之间有着本质性的差别,主要表现为一个线性方程的任意两个解加在一起仍然是该方程的解,这一原理就是著名的线性方程的叠加原理.它为解决“线性”问题提供了一条思路,即我们可以把整个问题分解成许多个“小”问题,再把各个“小”问题的解叠加起来而得到整个问题的解.但是,对于一个“非线性”问题,则不可如此处理,因为非线性方程不再满足“叠加原理”,因此必须整体地考虑原来的问题才行.这个简单的说明告诉我们,非线性问题包含着不可忽视的复杂性.

在人们的认识史上,首先是用相对简单的线性关系(线性模型)来刻画线性问题的定量关系,对于那些非线性因素不能完全忽略的情况,则往往采取线性近似或线性迭代的方法来处理,这样做也常常能得到较好的结果,但这种情况一般还只出现在比较“简单的”非线性问题中,或者只是研究系统的一些“常规”行为特征.随着人们对社会、自然认识的不断深化,人们越来越不敢“小看”非线性问题了.首先,就其本质而言,自然界应是非线性的.第二,许多问题中的强非线性作用与长时间尺度的系统行为都不能用线性方法(包括线性近似)来刻画.第三,即使是一些表面看上去很简单的非线性系统,也可能表现出令人惊异的复杂性(如确定性的随机性等),于是,人们越来越重视对广泛存在于社会与自然中的非线性现象的研究,并由此而诞生出非线性科学.

这里需要指出两点:

第一,这里所说的非线性现象是指在各学科中用传统的线性方法(模型)所不能说明(包括近似)的那些现象,例如孤立子与混沌就是非常典型的非线性现象.

第二,非线性科学所研究的是非线性现象的共性,这种共性的

物理背景存在于各个学科中，因此有其具体性，需要分类研究．但这种共性又超脱于各个具体学科，具有普适性是非线性问题的深刻规律性的体现，例如可积系统与孤立子理论、混沌和分形理论等，它们是非常深刻的基本自然规律的体现，因此普遍存在于多种自然现象中．

近20年来关于非线性科学的研究发展很快，这主要归结为：第一，电子计算机的进步使对非线性系统的定量仿真与实验成为可能，甚至出现了实验数学这一新学科．第二，各学科均发现大量的普适的非线性现象．第三，新的数学分析工具与方法的有效使用，在短短的时间里使非线性科学取得了一系列重要的成果与突破，在许多方面，甚至改变了人们对社会、自然的基本看法．但无论在理论上还是在实践上，非线性科学面前都有重重障碍难以逾越，例如关于多重分形的奇异点集的标度结构，图像形成系统的系列方程，复杂图形对湍流边界层的作用，确定性混沌系统的预测等等．还有，非线性科学正扩展到经济学、社会科学、管理科学，甚至国际关系研究中．

非线性科学是20世纪科学发展史上光辉的一页，它面临着最严峻的挑战，但它有战斗力，有着光明的未来．

二、在某种定义上，非线性科学是研究复杂性的科学．这句话这样理解比较贴切：非线性科学有可能使现实世界中那些杂乱无章的空间形态和似乎毫无规律的时间序列成为研究的对象，并从中发现了它们的“复杂”的规律性．

这些规律不断被发现而丰富起来，它们的要点包括：

(1) 可以用分形概念来描述复杂性的几何形态．这种形态具有确定的分数维数，它具有某种意义下的自相似结构，并且在各种不同尺度的层次上体现出来；这种复杂性居然可以通过出人意料的简单规则反映出来．

(2) 复杂性与系统各部分之间的非线性相互作用有着密切的关系．众所周知，由于非线性而造成的不稳定性和对初始条件的极度敏感依赖性是形成复杂性的根源之一．例如，一个系统往往会受

到小的扰动，非线性则会放大这些扰动，而在对初值的敏感性的反复作用下又形成了系统的复杂结构，再因为系统一方面对于初始条件敏感依赖，另一方面又在有限范围内运动，这样就使那些初始状态和速度充分接近的轨道会以指数速度分离开来．由于轨道自己不能相交，所以这些轨道只能在有限的空间内缠绕往复而形成非常复杂的形状，这就是“混沌”．

(3) 一个系统如果不能使它所有的相互作用同时得到满足，称此系统为“受挫”系统．这个概念是研究自旋玻璃时引进的，在一定意义下，自旋玻璃是“受挫”的，同时它的磁学性质表现出前所未有的复杂性．举一反三，“受挫”的概念可以解释诸如神经网络、早期生命进化过程等系统行为的复杂性．

三、混沌(这里姑且不谈它的科学定义)是 J. Hadamard 在 19 世纪末研究 Hamilton 系统时发现的．H. Poincaré 不仅理解了他的发现的重要性，而且也讨论过一个敏感依赖初始条件的天体系统的运动问题，虽然这些发现在一段时间内对物理学影响不大，但 Hadamard，Poincaré 以及 Kolmogorov，Smale 等学者在数学领域内继续上述研究．随着电子计算机的发展，1963 年 Lorenz 得到一个混沌图像，而其他学者也得到一些重要的结论，例如有：

(1) Smale 指出一个动力系统的轨道在某些情况下渐近于一个复杂的称为奇异吸引子的集合；

(2) 一个动力系统的行为依赖于某一参数 μ，并随 μ 的变化而发生性质上的变化，对于这种分岔现象，Feigenbaum 发现了倍周期分岔的规律；

(3) Rull 和 Taken 认为湍流是混沌，它具有奇异吸引子与 Feigenbaum 分岔等性质；

(4) 可微动力系统的各态历经理论．

下面的例子告诉我们，混沌的概念越来越渗透到各个学科中．

研究表明，脑的活动可视为一个混沌吸引子，是一个极不稳定的混沌态，实验表明那些刻画混沌吸引子的参数在大脑活动时经常在变动中，在此基础上，脑电图的信号呈现出一些复杂的现象．

首先,脑电图是诸如神经纤维上传导着的动作电位的变化,突触的、神经细胞体的以及神经胶质细胞的电变化等信号的综合,这些变化各自有自己的时间尺度.其次,脑电图的维数是随着功能状态变化的.概括地可以认为,脑电图很可能是由多个极限环的振荡经外界扰动进入混沌状态而形成的.

在气象领域,专家通过对一维天气、气候时间序列采用相空间延拓方法,提取了相应序列的分数维指数以及熵等.虽然这些序列代表了大气运动中的不同物理过程,但它们均具有非整数维,存在着正的 Lyapunov 指数与正的 Kolmogorov 熵,从不同的侧面说明大气运动本质上是一个混沌运动.

混沌也是工程动力学的典型的组成部分.一些被认为是安全的确定的工程系统存在着平稳状态的混沌、混沌的瞬变过程及不稳定混沌的可能性.事实上,由于工程系统的瞬变运动,可能使系统运动在短时间的激励下发散.由于在许多工程动力学问题中,激励不再是规则的,因此在长时间尺度下,系统模型必须不断被修正.但是在实际中大多数工程师可能忽略了瞬变过程,而仅仅采用动力学模型,这就给系统的安全性带来隐患,诸如横梁的断裂、船舶的倾覆、大楼火灾等等都属此例,于是,混沌理论给工程师们提出了新的工程观点与技术要求.

1987 年 10 月,出现了一次世界性的股市暴跌,被人们称为“黑色星期一”.这次暴跌表现出来的突发性与奇异性,均不能用传统的经济学模型来解释,哪怕是复杂的“随机游动理论”也变得无能为力.经济现象所以是复杂的,因为它既是稳定的,又是不稳定的,严格地说,是这两种因素的相互纠缠,这正是混沌的基本特征.问题的实质是,如何描述和认识经济学中的“混乱与不和谐”,并从这种“混乱”中寻找某种意义下的规律与潜在结构.经济系统想在有序中运行,但随后可能转向混沌或不稳定,而无序中又有基本的有序,即平稳的混沌状态有某种意义的可预测的有序.简言之,非线性经济系统会展示出几种不同的行为,其中包括混沌.

在管理决策方法中,人工智能是一种有效的途径.近年来,一

种用于解决复杂问题的所谓分布式人工智能系统的概念被提出来了.事实上,在这一系统中,即使从局部来说是合理的决策,但由于整个系统中存在着模糊、延迟、不完善,乃至冲突,因此有可能从整体而言,我们得到的是全局意义上的"差劲"的决策.从机理上讲,这是不难理解的,因为信息的延迟会使系统状态与知识过时,信息的不完全、模糊或冲突会使决策单元在实际中观测到的性能指标产生偏差.如果我们把决策理解为是决策单元在某一时刻根据系统的状态用某类资源采用不同的方法对信息的外推结果,则可以构造一个性能指标来描述这一过程.实验表明,由于相关的动态方程中有延迟及非线性因素,这一过程可能收敛于一个稳定的平稳点,可能收敛到极限环,也可能出现混沌.这实际告诉我们,分布式人工智能用于管理在理论上是诱人的,但同时又隐含着"复杂性"危险.

四、B. Mandelbrot 于 1975 年由描述碎石的拉丁文 fractus 创造出分形(fractal)一词.分形作为几何外形,它与欧氏外形不同,它不仅处处无规则,而且在各种尺度上都有同样程度的不规则性,即它们具有自相似性,那种把整体中的一部分放大便能进一步揭示其深层结构且几乎是原来结构复制品的性质.

对于分形,和普通整数维(0,1,2,3,…)相对应的维数称为分形维数,值得注意的是,它们的维数值不是整数.

分形可以用来描述复杂的自然界外形,也可以用来描述复杂的动力学系统行为,但分形不能理解为是简单的线性相似性的描述,它更是随机性、混沌与非线性系统的几何描述.

分形概念与各种非线性现象的共性之间有着深刻的联系,例如,

(1) 图形的叠加性即由非线性描述的任何过程,一旦失去稳定性并出现多个奇点,就会形成具有不同尺度的同时存在的多个重复叠加的图形,并很快会表现出混沌图形.

(2) 任何分形图形都具有无限层次.

(3) 任意分形结构都是由相似或拟相似图形构成,而相似性

本身恰恰就是被表现混沌性掩盖的规律性的具体表现，即大小不同的分形图形叠加在一起就造成了表面的混乱.

(4) 空间与时间的维数都不是整数而是分数.

产生分形结构的物理机理是系统具有非线性、随机性或耗散性，人们把研究分形结构上的各种性能的演化过程以及一个复杂系统如何演化成实空间或相空间中的分形结构称为分形动力学，分形动力学所描述的系统应是非(或远离)平衡态的不可逆的演化过程，系统的随机性蕴含在分形维数之中，而非线性与耗散性则是产生分形结构的最基本的机理.

分形有着广泛的应用领域：

分子集合本质上是复杂的非线性系统，这就使化学与分形有着"天然"的联系.

分形为物理学中描述湍流、电击穿以及吸附微粒的固体表面结构提供了新的途径.

岩石破裂是复杂现象，从晶粒尺度到大地构造尺度在一个很宽的尺度范围内破裂的生长具有相似性.作为地壳岩石破裂的结果，地震群体及相应断裂系统均具有分形结构.在这方面，已开展的研究工作包括对地震时、空、强度结构分形特征的研究，对活动断层系统分形结构的研究，以及对地震过程混沌性与地震再生吸引子的研究.

天文学中关于空洞的自相似性、宇宙中物质分布的β模型、星云与变星的研究中都有效地运用了分形的概念与工具.

人体生理学的研究表明，人的许多器官系统显示出具有分形结构，分形结构在健康心脏的机械动态特性与电动态特性中起着关键作用.人体内的分形结构产生于胚胎发育与进化的缓慢动态过程中，这些过程与产生出分形结构的其他过程一样，都展示出一种确定性混沌，生理学可能被证明是研究分形、混沌和其他类型非线性动态过程的最丰富多彩的实验室之一.

学者的研究还揭示了某些乐曲的分形本质，还有人运用与分形几何学类似的数学方程创作出一批美术作品.

在社会领域，人口系统由于众多的不确定因素与非线性作用，于是出现了人口增长的混沌与分形、人口分布的多重分形，以及人口时间序列与城市化过程的分形特性等.

在经济领域，为分析经济波动的混沌现象，引入与分形布朗运动密切相关的滑动自回归非平稳模型，若干金融数据序列也都呈现出分形特征.

一句话，分形、混沌、复杂性与非线性已经紧紧地联系在一起，密不可分，混沌吸引子就是分形集，分形集就是动力学系统中那些不稳定轨迹的初始点的集合.

五、今天和明天的工程师，假如想切实分析一些有一定难度的技术问题，或者想有效解决一些有一定难度的工程问题，又想回避非线性科学、回避复杂性而仅仅囿于线性方法与"线性思维"肯定是不可能的了.因为，正如我们在上面介绍的，社会、经济、自然界、工程技术已经越来越明显地向我们显示出它们所固有的而不是臆造出来的混沌现象、分形特性等等.一个结论很明显，这就是今天和明天的工程师，有必要稍微细致而系统地学习一些关于非线性系统分析方面的基本理论与方法.

本书中部分内容总结了作者承担的国家自然科学基金项目(69874004)与高校博士点基金资助项目(97028604)的工作成果.

从本书目录看，我们较为有机地介绍了非线性科学与复杂科学所涉及到的主要内容，以及一些重要的工具.在不需要很深知识的情况下尽量让读者较严谨地掌握这些内容与工具，起码能大体上对这些领域有一个概貌性的了解，以便自己在某一方向上再作深入的探索.

注意到这些，本书的篇幅就有严格的控制，选材也须有所讲究，这都是不容易做好的，只能说，我们已尽到努力，只望本书能对读者有所帮助.不到之处敬祈读者不吝赐教.

第二章　非线性动力学与混沌基础

§2.1　动力系统和混沌

§2.1.1　动力系统与流形

动力系统(dynamics or dynamical system)源于19世纪末Poincaré的工作,它常可以看成是微分方程的化身.粗略地说,常微分方程及其差分方程可以分别看成是有限维连续和离散的动力系统,偏微分方程及其差分方程可以分别看成是无穷维连续和离散的动力系统,而拓扑和几何中微分流形上的方程可以看成是微分流形上的动力系统.本书所关心的是 R^n 上的动力系统,称之为 n 维动力系统.

流形的概念:称 $M \subset R^n$ 为一维流形是指 M 是一条曲线,且在 M 中每一点(除端点外)都有惟一的切线存在;称 M 是二维流形,若 M 是曲面,且 M 中每点(边界点除外)都有惟一的切平面存在;一般地,称 $M \subset R^n$ 为 k 维流形($k \leqslant n$),若 M 中的每一点都有惟一的 k 维切空间(边界除外)存在.

记 $\Lambda = [0,\infty)$ 或 $\Lambda = Z_+ = \{0,1,\cdots\}$,称映射簇 $\boldsymbol{\varphi}^t: R^n \to R^n$, $t \in \Lambda$ 为 R^n 上的动力系统,若 $\boldsymbol{\varphi}^t, t \in \Lambda$ 适合下列半群条件:

(i) $\quad \boldsymbol{\varphi}^{t+s} = \boldsymbol{\varphi}^t \cdot \boldsymbol{\varphi}^s, \quad \forall t, s \in \Lambda$ (2.1)

(ii) $\quad \boldsymbol{\varphi}^0(x) = x, \quad \forall x \in R^n$ (2.2)

若 $\Lambda = [0,\infty)$,则 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 为 R^n 上连续的动力系统,$\forall x_0 \in R^n$,称 $\boldsymbol{\varphi}^t(x_0), t \in \Lambda$ 为以 x_0 为初值的轨道(orbit)或流(flow);若把连续的动力系统限制在 $\Lambda = Z_+$ 上,则为离散的动力系统.

设 R^n 上连续的动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 关于 $t \in [0,\infty)$ 连续可微,且记

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^t(x)\big|_{t=0}, \quad x \in R^n \tag{2.3}$$

则轨道 $\varphi^t(x_0)$适合下面的常微分方程

$$\dot{x}=f(x),\qquad t\in[0,\infty),x(0)=x_0\in R^n \tag{2.4}$$

记$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=\dot{x}(t)$,因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^t(x_0)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi^{t+\Delta t}(x_0)-\varphi^t(x_0)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi^{\Delta t}(\varphi^t(x_0))-\varphi^0(\varphi^t(x_0))}{\Delta t}\\&=f(\varphi^t(x_0))\end{aligned} \tag{2.5}$$

关于方程(2.4),我们有下列局部存在性和惟一性定理.

定理 2.1 令 $f:R^n\to R^n$ 连续可微,则 $\forall x_0\in R^n$,存在 $c>0$ 使得方程 $\dot{x}=f(x),x(0)=x_0$ 在$(-c,c)$上有惟一解 $\varphi^t:(-c,c)\to R^n$.

由定理 2.1 可以得出这样的结论:若假设 $f:R^n\to R^n$ 连续可微,连续的动力系统 φ^t 总是适合方程$\dot{x}=f(x)$,故称其为以 f 为切向量场的动力系统,并且若假设 φ^t 在$t<0$ 也同样有定义,则称其为双边动力系统.由此可见,连续动力系统的任何两条轨道只能在 $t=\infty$时相交,关于离散的动力系统 $\varphi^t,t\in Z_+$,若记 $G=\varphi'$,则我们称 φ^t 是映射$\varphi'=G$ 生成的动力系统.

称 $x_0\in R^n$ 为φ^t 的不动点或平衡点(equilibrium point),若对于$\forall t\in\Lambda$,有 $\varphi^t(x_0)=x_0$.称 $\varphi^t(x_0),t\in[0,T]\cap\Lambda$ 为周期 T 轨道,若 $0<T<\infty,\varphi^T(x_0)=x_0$,且 $\varphi^t(x_0)\neq x_0,\forall t\in(0,T)\cap\Lambda$.称离散动力系统 φ^t 的周期为k,是指其轨道为$\{x_0,\varphi'(x_0),\cdots,\varphi^{k-1}(x_0)\}$,而不动点可视为周期为 1 的轨道.

平衡点和周期轨道都是非常简单的轨道,但它们是动力系统拓扑结构的最基本的形态,也是动力系统不变集的关键的组成部分.

§2.1.2 平衡点的局部性态

考虑以 f 为切向量场的连续的动力系统φ^t,令 $\bar{x}$ 是φ^t 的平

衡点，即

$$\varphi^t(\bar{x})=0 \tag{2.6}$$

对于任意的方向 $h\in R^n$，$s\neq 0$，注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\varphi^t(\bar{x}+sh)-\varphi^t(\bar{x})}{s}\right]=\frac{f[\varphi^t(\bar{x}+sh)]-f[\varphi^t(\bar{x})]}{s} \tag{2.7}$$

从而 φ^t 在 $\bar{x}$ 点，h 方向的方向导数必适合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\varphi^t(\bar{x})h)=Df(\bar{x})\cdot D\varphi^t(\bar{x})h,\quad D\varphi^0(\bar{x})h=h \tag{2.8}$$

这是一个线性方程，其解为

$$D\varphi^t(\bar{x})h=(\mathrm{e}^{Df(\bar{x})})^t h \tag{2.9}$$

由 Taylor 展开，当 h 充分小时，我们有

$$\varphi^t(\bar{x}+h)\approx\varphi^t(\bar{x})+D\varphi^t(\bar{x})h=D\varphi^t(\bar{x})h=(\mathrm{e}^{Df(\bar{x})})^t h$$

$Df(x)$是 f 在点 x 处的导映射

$$Df(x)h=D_x f(x)h=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} \tag{2.10}$$

这里对于

$$A=Df(\bar{x}),\qquad \mathrm{e}^{At}=I+At+\cdots+A^k t^k/k!\ +\cdots \tag{2.11}$$

(I 是单位阵).

由于 $Df(\bar{x})$是 $n\times n$ 阶方阵，则存在 Jordan 标准形 J 和非奇异矩阵 A 使得 $Df(\bar{x})=A^{-1}JA$，其中 J 的对角线上的 n 个元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 恰好是 $Df(\bar{x})$的 n 个特征值，从而我们有

$$\varphi^t(\bar{x}+h)\sim(\mathrm{e}^{Df(\bar{x})})^t h=A^{-1}\mathrm{e}^{Jt}A \tag{2.12}$$

h 充分小，即 φ^t 在 $\bar{x}$ 邻近可以看成是线性的，从而可以按线性的形式对 $\bar{x}$ 分类.

平衡点 $\bar{x}$ 称为是双曲的(hyperbolic)，若 $\mathrm{Re}\lambda_k\neq 0$，$k=1,2,\cdots,n$；

$\bar{x}$ 称为中心(center)，若 $\bar{x}$ 不是双曲的平衡点，$\mathrm{Re}\lambda_k=0$；

$\bar{x}$ 称为汇(sink)，若 $\mathrm{Re}\lambda_k<0$，　$k=1,2,\cdots,n$；

$\bar{x}$ 称为源(source)，若 $\mathrm{Re}\lambda_k>0$，　$k=1,2,\cdots,n$；

$\bar{x}$ 称为鞍点(saddle point)，若 $\bar{x}$ 为不是源和汇的双曲平衡点；

$\overline{x}$ 称为结(node),若 $\overline{x}$ 是汇,且 λ_k 是实数,$k=1,2,\cdots,n$;

$\overline{x}$ 称为焦点(focus),若 $\overline{x}$ 是汇,且 $\exists\lambda_k$ 使 λ_k 是非实数;

若 $\overline{x}$ 是汇,则称其为稳定的或为吸引的平衡点;

若 $\overline{x}$ 是源,则称其为排斥的平衡点,或为不稳定的平衡点.

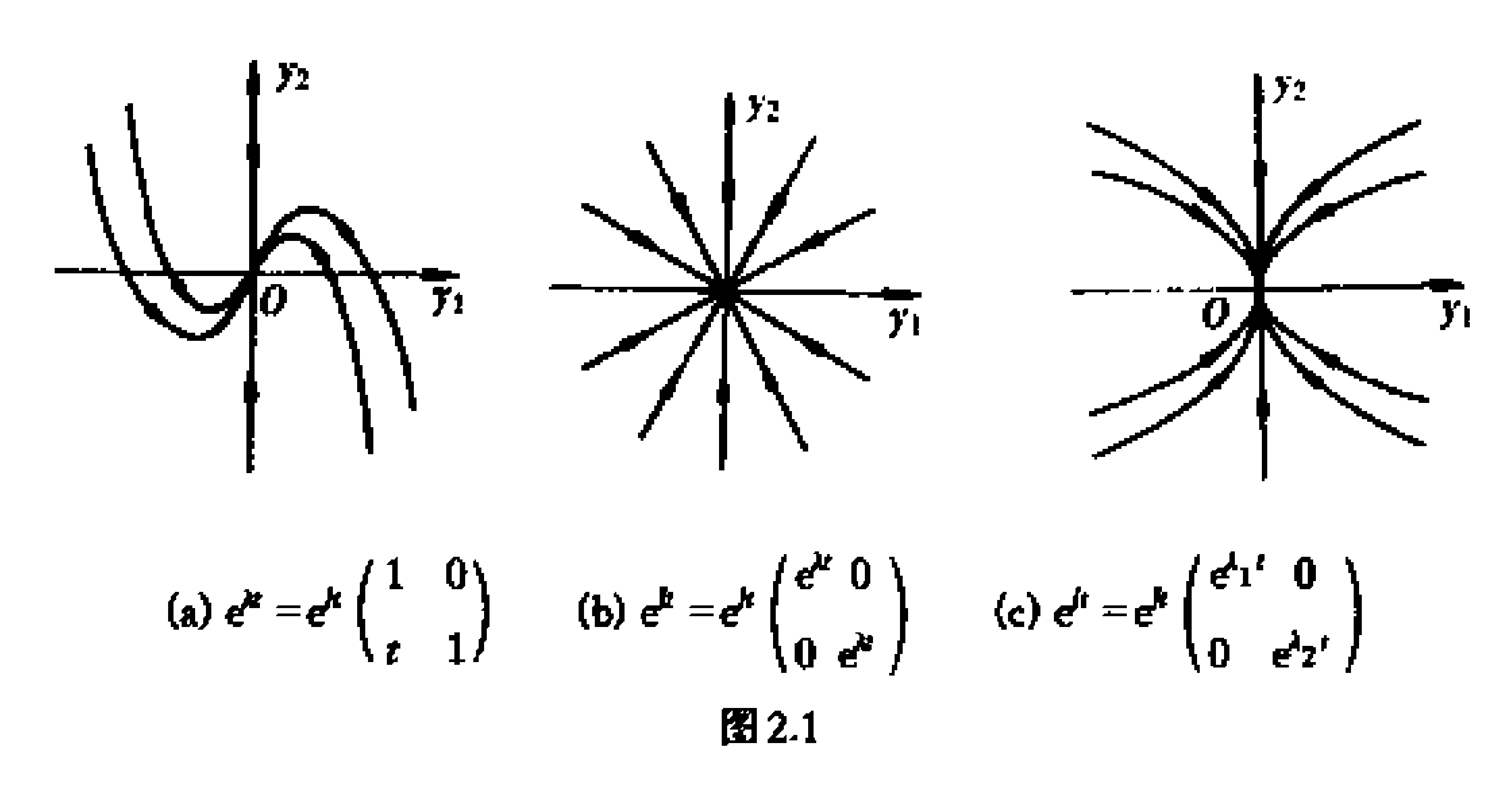
作为例子,考虑 $n=2$ 时的系统 $\varphi^t, R^2\to R^2$ 的平衡点 $\overline{x}$,若 $\overline{x}$ 是结,则其 Jordan 标准形有三种可能:

$$(1)\ J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix},\text{从而 } e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix},\quad (\lambda<0) \tag{2.13}$$

$$(2)\ J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\text{从而 } e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix},\quad (\lambda<0) \tag{2.14}$$

$$(3)\ J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\text{从而 } e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix},\quad (\lambda_2<\lambda_1<0) \tag{2.15}$$

因此,e^{Jt} 的相图(见图 2.1)应该是下列形式($\lambda<0,\lambda_2<\lambda_1<0$)



(a) $e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$ (b) $e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$ (c) $e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$

图2.1

若 $\overline{x}$ 是鞍点,则 $J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$,$\lambda_2<0<\lambda_1$,从而 e^{Jt} 的相图如图2.2所示.

若 $\overline{x}$ 是吸引的焦点,则 $J=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$, $a<0$,从而

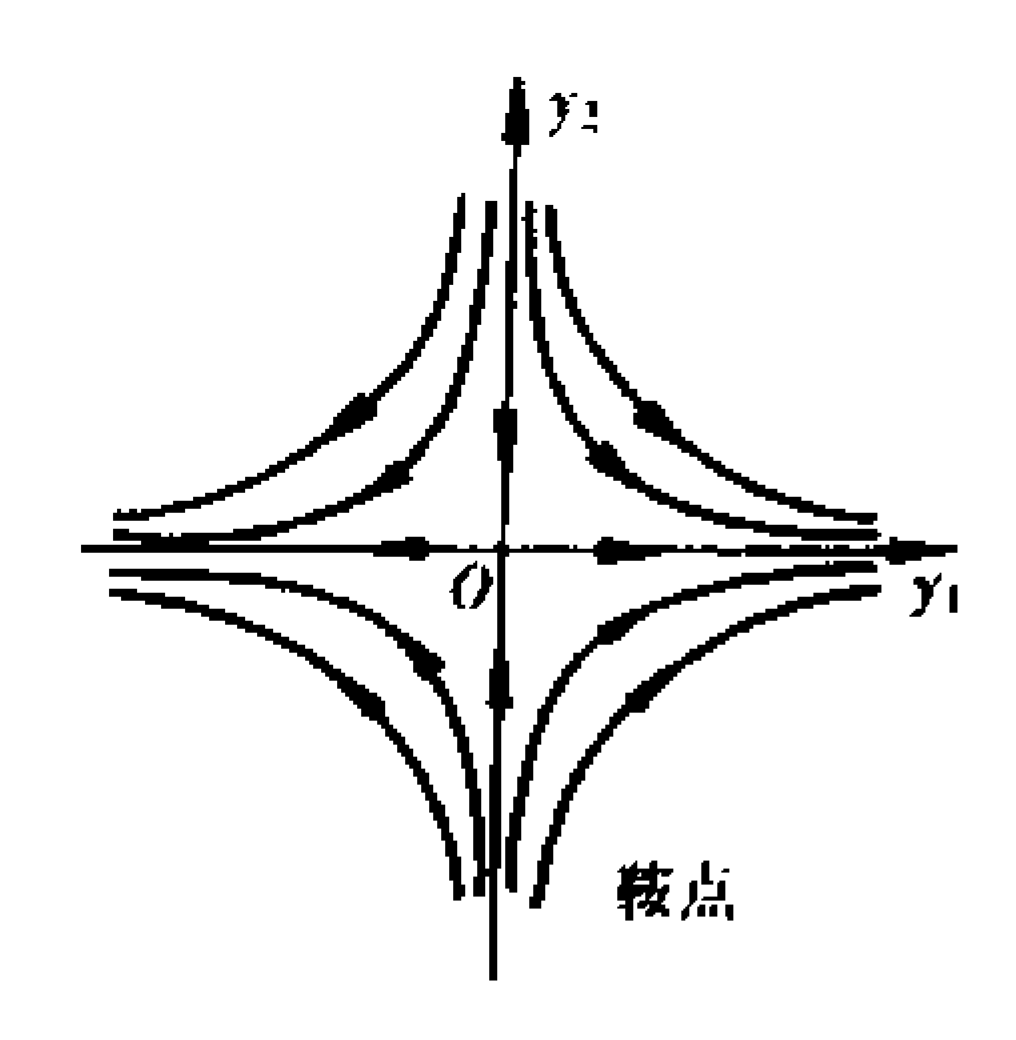


图 2.2　平衡点是鞍点的情况

$$e^{Jt}=e^{at}\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

若 $\overline{x}$ 是中心，则 $J=\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$，从而

$$e^{Jt}=\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

进一步地，设 $\overline{x}$ 是 φ^t 平衡点，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $Df(\overline{x})$ 的特征值，而 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n_s}$，　$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n_u}$ 和 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{n_c}$ 是相应的 $Df(\overline{x})$ 的特征向量的全体，且分别是 $\mathrm{Re}\lambda<0$，$\mathrm{Re}\lambda>0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda=0$ 的特征向量的全体，所以 $n_s+n_u+n_c=n$，从而 $Df(\overline{x})$ 的特征向量空间可以分解成三部分：$E^s\oplus E^u\oplus E^c$，即

稳定子空间　　$E^s=\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_{n_s}\}$　　(2.18)

不稳定子空间　$E^u=\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n_u}\}$　　(2.19)

中心子空间　　$E^c=\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_{n_c}\}$　　(2.20)

为了进一步弄清 φ^t 在 $\overline{x}$ 的局部性态，我们还应定义 $\overline{x}$ 的局部稳定流形和不稳定流形：

$$W^s_{Loc}(\overline{x})=\{x\in U\mid\varphi^t(x)\to\overline{x},t\to+\infty,$$
$$\text{且 }\varphi^t(x)\in U,\forall t\geqslant 0\} \tag{2.21}$$

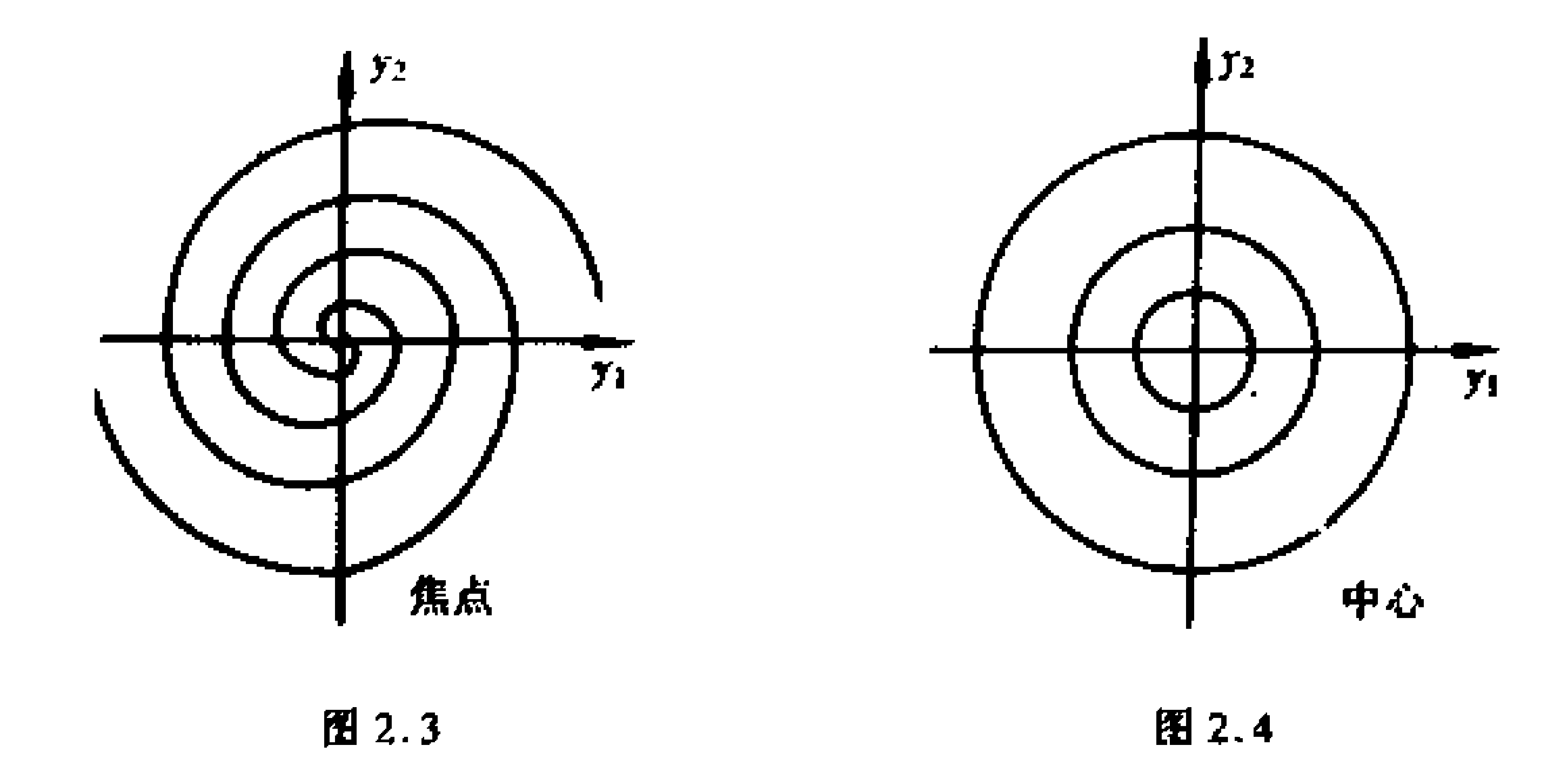


图 2.3　　　　图 2.4

$$W^u_{Loc}(\overline{x}) = \{x \in U \mid \varphi^t(x) \to \overline{x}, t \to -\infty, \text{且 } \varphi^t(x) \in U, \forall t \leqslant 0\} \tag{2.22}$$

其中 U 是 R^n 中 $\overline{x}$ 的某个邻域，从而我们还可以定义

整体稳定流形

$$W^s(\overline{x}) = \bigcup_{t \geqslant 0} \varphi^t(W^s_{Loc}(\overline{x})) \tag{2.23}$$

整体不稳定流形

$$W^u_{Loc}\overline{x} = \bigcup_{t \leqslant 0} \varphi^t(W^u_{Loc}(\overline{x})) \tag{2.24}$$

前面，我们已对连续动力系统的平衡点进行了分类，这种分类是借助于一种非常粗糙的平衡点邻近的线性化而得到的，现在我们将严格地给出连续动力系统在平衡点邻近的线性定理.

定理 2.2 （Hartman 定理，1964） 若 $\overline{x} \in R^n$ 是 R^n 上连续动力系统 φ^t 的双曲平衡点，f 是 φ^t 的切向量场，则存在 $\overline{x}$ 的 R^n 中的邻域 U 和同胚映射①$h: U \to h(U) \subset R^n$，使得 $h(\overline{x}) = 0$，且 $h(\varphi^t(\overline{x})) = (e^{Df(\overline{x})})^t h(x)$.

若 $x \in U$ 且 $\varphi^t(x) \in U$，则存在着 $\overline{x}$ 邻近上定义的同胚映射把 $\overline{x}$ 的邻近的非线性动力系统 φ^t 的所有轨道都一一地映成线性

① 称 h 为同胚映射，如果连续映射 $h: A \to R^n$ 使得 $h: A \to h(A)$ 是一一映射，且逆映射也是连续的，则称 h 为 A 到 $h(A)$ 的同胚(映射).

动力系统 $e^{tDf(\bar{x})}$ 的轨道.

关于流形与子空间之间的关系我们有定理 2.3.

定理 2.3(平衡点的稳定流形定理,1964) 设 $\bar{x}$ 是 φ^t 的双曲平衡点,f 是 φ^t 切向量场.则存在 $\bar{x}$ 邻近的稳定与不稳定流形 $W_{Loc}^s(\bar{x})$ 和 $W_{Loc}^u(\bar{x})$,使得它们分别与线性系统 $\dot{x}=Df(\bar{x})$ 的稳定与不稳定子空间 E^s 和 E^u 在 $\bar{x}$ 点相切.

以上两定理图示如图 2.5 和图 2.6.

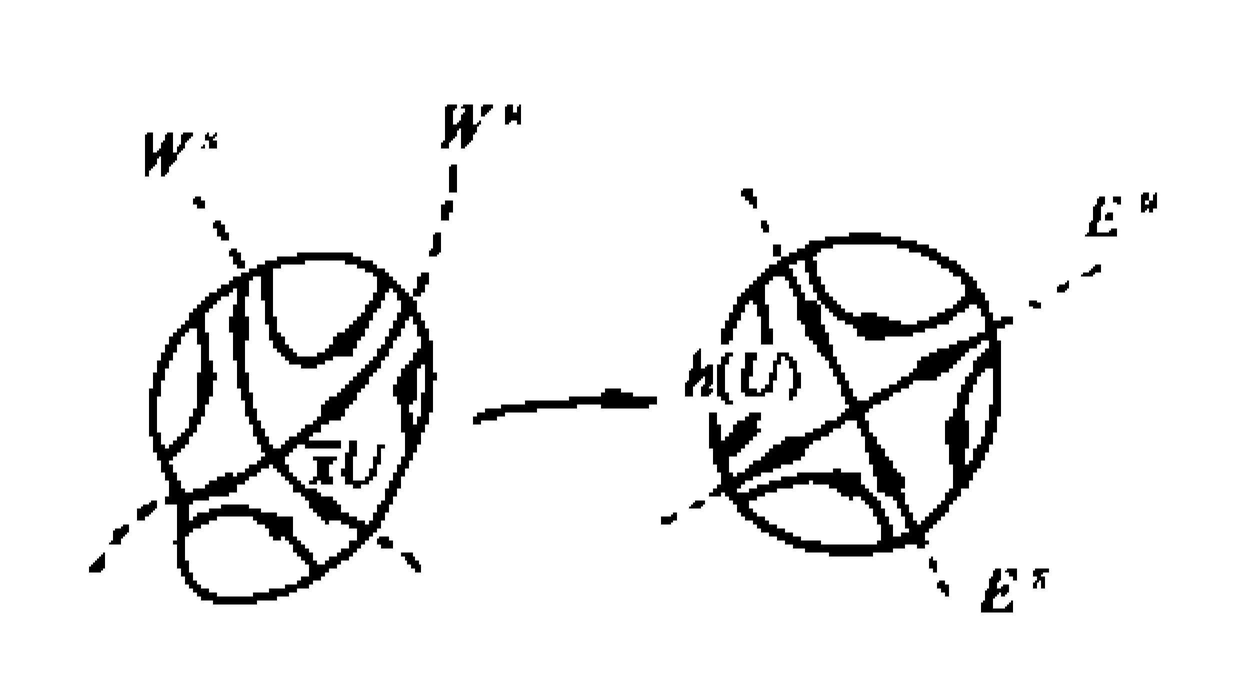


图 2.5 线性和不变子空间 Hartman 定理

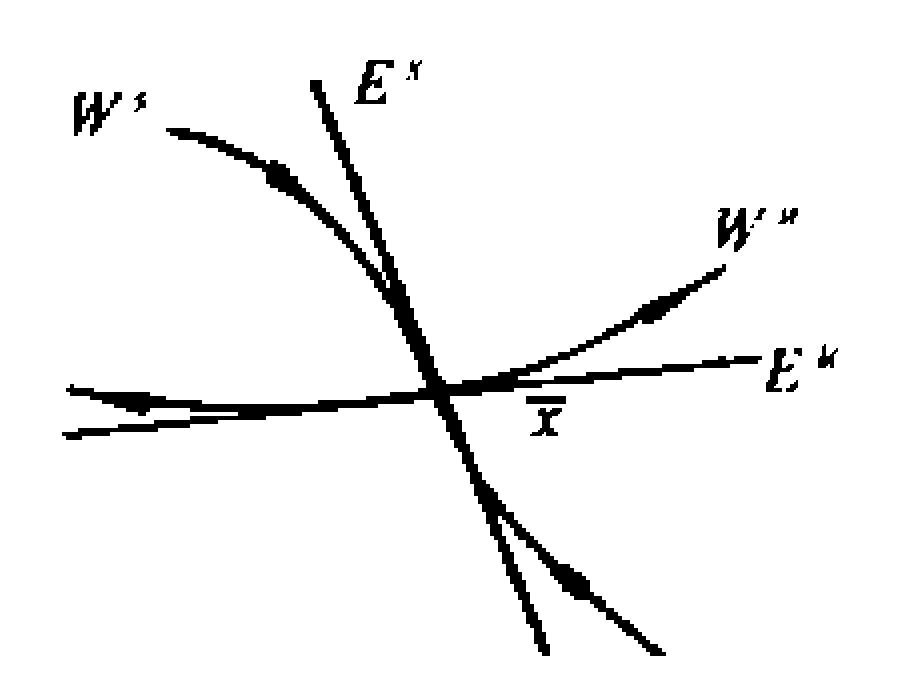


图 2.6 局部稳定和不稳定流形

下面我们考虑离散的动力系统 φ^t,设 $\bar{x}$ 为 φ^t 的平衡点,为了能与连续的有所区别,我们记 $G=\varphi^t$, $t=k=0,1,2,\cdots$,则 $\varphi^t=G^k$.我们还将设 G 关于 $x\in R^n$ 连续可微,则

$$DG^k(\bar{x})=DG(G^{k-1}(\bar{x}))=(DG(\bar{x}))^k \tag{2.25}$$

从而当 $\xi\in R^n$ 充分小时

$$G^k(\bar{x}+\xi)\sim G^k(\bar{x})+DG^k(\bar{x})\xi=(DG(\bar{x}))^k\xi \tag{2.26}$$

由此可见,$DG(\bar{x})$ 与连续动力系统 φ^t 的 $e^{Df(\bar{x})}$ 的地位是完全一样的,从而,若记 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_n$ 是 $DG(\bar{x})$ 的特征值,则我们定义 $\bar{x}$ 为 G^k 的双曲平衡点.若 $|\Lambda_i|\neq1$, $i=1,2,\cdots,n$,定义 $\bar{x}$ 为 G^k 的鞍点,若 $\bar{x}$ 是双曲的,且存在 Λ_{i_0}, Λ_{j_0} 使得 $|\Lambda_{i_0}|<1<|\Lambda_{j_0}|$.同样地,我们可以依照连续的情形,完全平行地给 $\bar{x}$ 下其他定义,也可以完全类似地建立稳定子空间 E^s,不稳定子空间 E^u 和中心子空间 E^c.

进一步地,若 $G:R^n\rightarrow R^n$ 是同胚映射,则我们可以同样地定

义局部稳定和局部不稳定流形

$$W_{Loc}^{s}(\overline{x})=\{x\in U\mid G^{k}(x)\to\overline{x}\quad 当\ k\to+\infty,$$
$$且\ G^{k}(x)\in U,\quad \forall k\geqslant 0\}\tag{2.27}$$

$$W_{Loc}^{u}(\overline{x})=\{x\in U\mid G^{-k}(x)\to\overline{x}\quad 当\ k\to+\infty,$$
$$且\ G^{-k}(x)\in U,\forall k\geqslant 0\}\tag{2.28}$$

以及稳定与不稳定流形

$$W^{s}(\overline{x})=\bigcup_{k\geqslant 0}G^{k}(W_{Loc}^{s}(\overline{x}))\tag{2.29}$$

$$W^{u}(\overline{x})=\bigcup_{k\geqslant 0}G^{-k}(W_{Loc}^{u}(\overline{x}))\tag{2.30}$$

同连续时完全一样的方法可以证明下面两个定理.

定理 2.4(Hartman 定理) 设 $G:R^{n}\to R^{n}$ 是连续可微的同胚,$\overline{x}$ 是 G^{k} 的平衡点.则存在 $\overline{x}$ 的 R^{n} 中的邻域 U 和同胚映射 h:$U\to h(U)\subset R^{n}$,使得 $h(\overline{x})=0$ 且

$$h(G^{k}(x))=(DG(\overline{x}))^{k}\cdot h(x),\forall x\in U,G^{k}(x\in U)\tag{2.31}$$

定理 2.5(平衡点的稳定流形定理) 设 $G:R^{n}\to R^{n}$ 是连续可微的同胚,$\overline{x}$ 是 G^{k} 的双曲平衡点.则存在着局部稳定和不稳定流形 $W_{Loc}^{s}(\overline{x})$和 $W_{Loc}^{u}(\overline{x})$分别在 $\overline{x}$ 点相切于$DG(\overline{x})$的特征子空间 E^{s} 和E^{u}(见图 2.7).

§ 2.1.3 Poincaré 映射

Poincaré 映射是研究动力系统非常有效的手段,它能把 n 维连续的动力系统化成为 $n-1$ 维离散的动力系统.

设 $\varphi^{t}:R^{n}\to R^{n}$ 是以 f 为向量场的动力系统,γ 是 φ^{t} 的周期轨道,取一块或许是并不平坦的 $n-1$ 维超曲面$\Sigma\subset R^{n}$,使得它是局部截面,即 $\forall x\in\Sigma$,φ^{t} 在 x 点的切向量 $f(x)$与Σ在 x 点的法向量 $n(x)$不垂直,即 $f(x)\cdot n(x)\neq 0$.可以设Σ与 γ 只有惟一的一个交点 p(若 γ 与Σ有若干个交点则可以把Σ削得充分小).取 $U\subset\Sigma$是 p 在Σ上的某一邻域,则定义 Poincaré 映射:

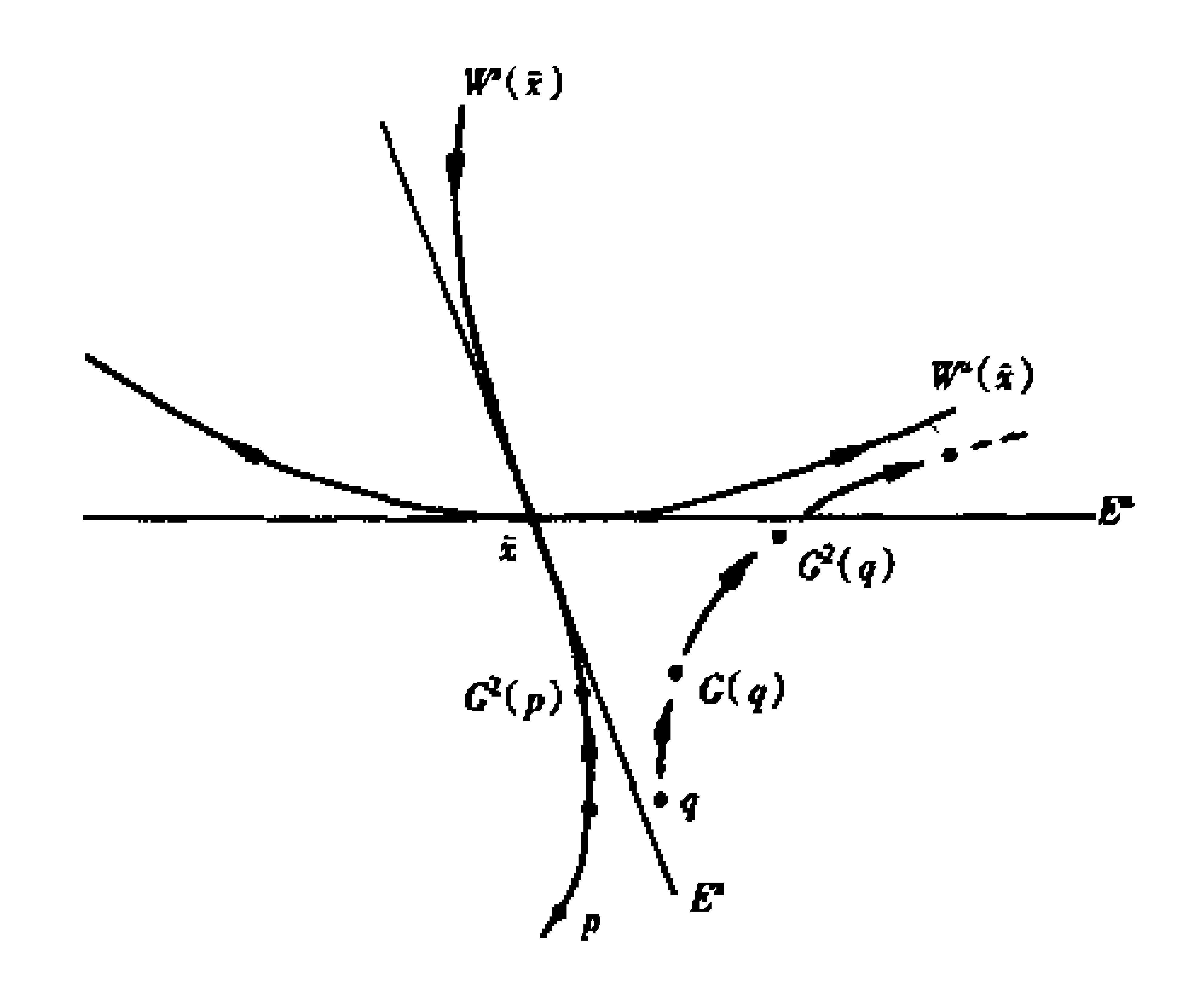
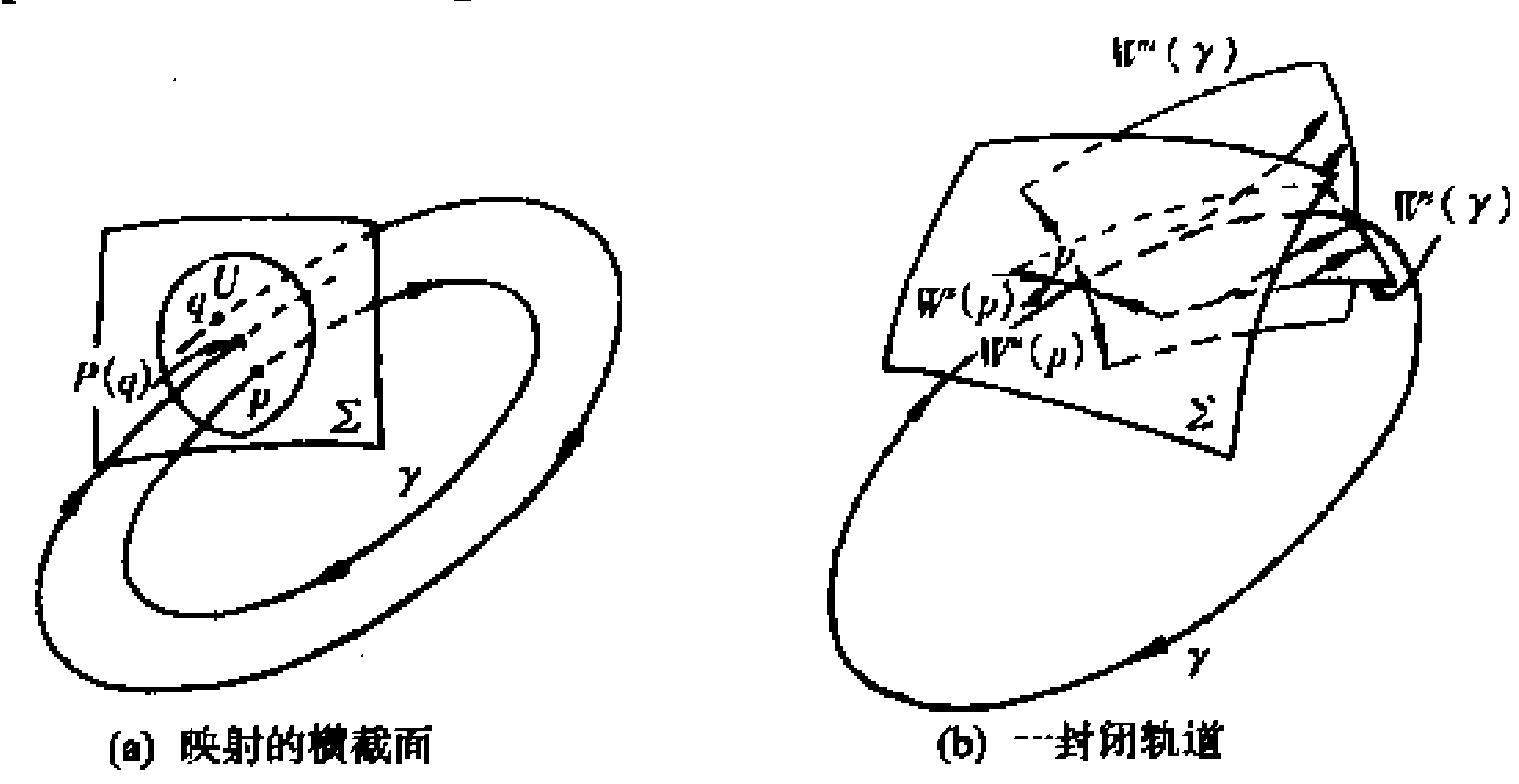


图 2.7 映射 $G:R^2 \to R^2$ 的稳定流形和轨道

$P: U \to \Sigma$ 使得 $P(q) = \varphi^{\tau}(q)$. $\forall q \in U$，其中 $\tau = \tau(q)$ 是以 q 为初值的轨道 $\varphi^{\tau}(q)$ 返回到 Σ 即 $\varphi^{\tau}(q) \in \Sigma$ 的第一时刻，从而 $\tau = \tau(q)$ 与 q 有关，它不必等于 γ 的周期 $T = T(p)$，但是当 $q \to p$ 时，$\tau \to T$，因此 p 是 P 的平衡点(见图 2.8).



(a) 映射的横截面 (b) 一封闭轨道

图 2.8 Poincaré 映射

类似于平衡点的概念，可定义周期轨道 O 是吸引的(稳定的)或排斥的(不稳定的)，简言之，若 $t \to +\infty$，$\text{dist}(\varphi^t(x), O) =$

$\inf_{y\in O}|\varphi^t(x)-y|\to 0$,则称 O 为吸引的;若 $t\to-\infty$,$\text{dist}(\varphi^t(x),O)=\inf_{y\in O}|\varphi^t(x)-y|\to 0$,则称 O 为排斥的.于是,要判断上述的 γ 是吸引或排斥的,只要考查 P 的平衡点 p 是否为吸引或排斥即可.

下面我们假设 p 是 P 的双曲平衡点.由于 P 是 $n-1$ 维的,因此 $(n-1)\times(n-1)$ 阶矩阵 $DP(p)$ 具有 n_s 个模小于 1 的特征值和 n_u 个模大于 1 的特征值($n_s+n_u=n-1$),从而 P^k ($P^k=P(P^{k-1})$)的稳定和不稳定流形的维数为 $\dim W^s(p)=n_s$, $\dim W^u(p)=n_u$. 设 $x\in\Sigma$,且 x 在 P 的邻近,则过 x 的轨道 $P^k(x)$ 必是由 φ^t 的轨道与 Σ 相交而得到的,所以我们可以定义周期轨道 γ 的稳定和不稳定流形 $w^s(\gamma)$ 和 $w^u(\gamma)$,使得 $\dim W^s(\gamma)=n_s+1$, $\dim W^u(\gamma)=n_u+1$. 我们没有给出 $w^s(\gamma)$ 和 $w^u(\gamma)$ 的精确定义,但相信下面的例子可以消除这一不足.

作为例子,我们考虑 2 维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x-y-x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=x+y-y(x^2+y^2)\end{cases}\tag{2.32}$$

取 $\Sigma=\{(x,y)\in R^2\mid x>0,y=0\}$,则 Σ 的法向为 $(0,y)$, $y>0$,而系统(2.32)的在点 $(x,0)$ 处的切向量为 $(x-x^3,x)$. 易见这两个方向不垂直,所以 Σ 是截面.

利用极坐标变换 $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta=\arctan(y/x)$,则(2.32)化为

$$\begin{cases}\dot{r}=r(1-r^2)\\ \dot{\theta}=1\end{cases}\tag{2.33}$$

而且 $\Sigma=\{(r,\theta)\mid r>0,\theta=0\}$. 易见,对于 $\forall(r,\theta)$,(2.33)的解为

$$\varphi^t(r,\theta)=((1+(r^{-2}-1)\mathrm{e}^{-2t})^{-\frac{1}{2}},t+\theta)$$

从而,$\forall(r,\theta)\in\Sigma$, $\tau=2\pi$ 是使得轨道 $\varphi^t(r,\theta)$ 返回 Σ 的第一时刻,所以有

$$p(r)=(1+(r^{-2}-1)\mathrm{e}^{-4\pi})^{-\frac{1}{2}}$$

显然 $r=1$ 是 P 的不动点，即是系统(2.33)的周期轨道，由

$$DP(1)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=1}=-\frac{1}{2}(1+(r^{-2}-1)\mathrm{e}^{-4\pi})^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2\mathrm{e}^{-4\pi}}{r^3}\right)\Big|_{r=1}$$
$$=\mathrm{e}^{-4\pi}<1$$

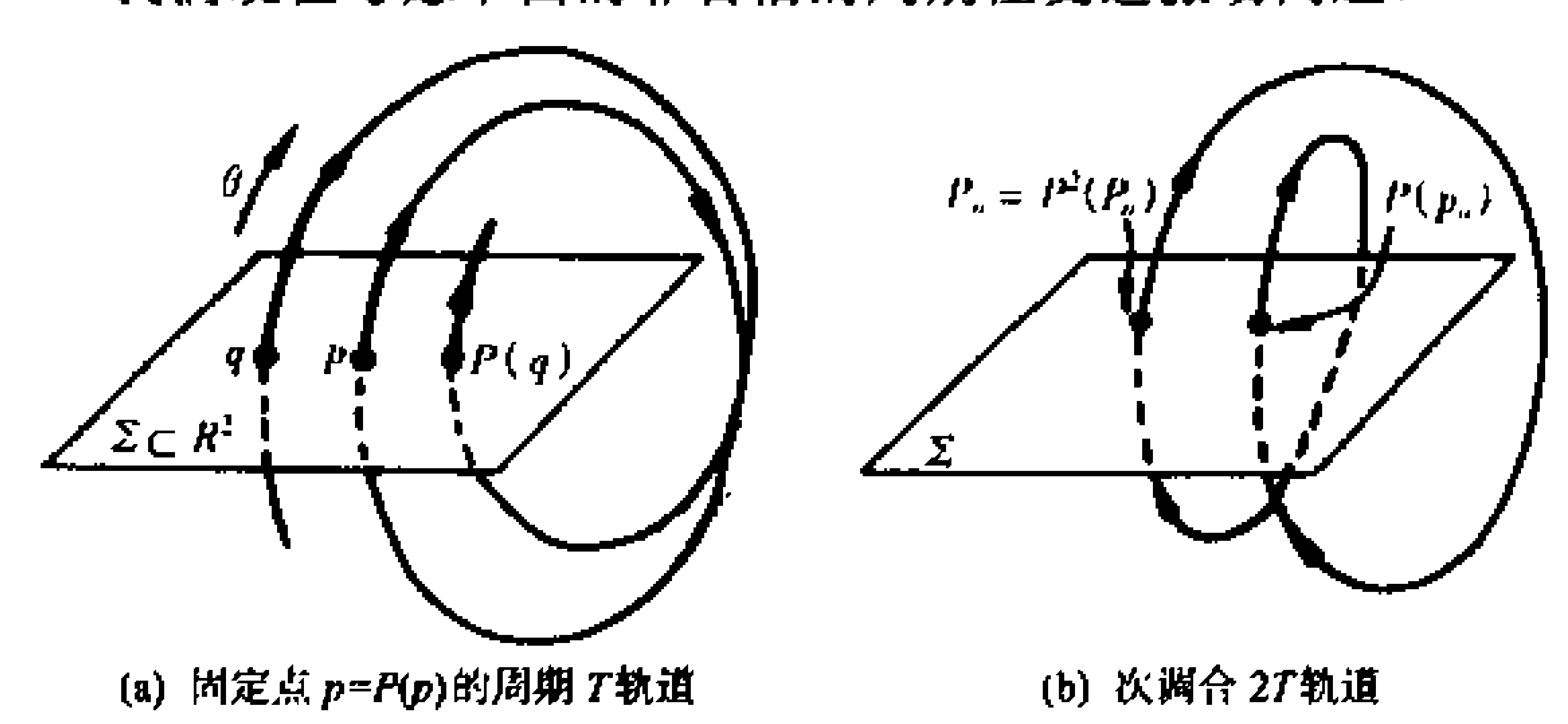
得 $p=1$ 是 P 的稳定不动点，从而(2.33)的周期轨道 $r=1$ 是稳定的或为吸引的周期轨道.

值得注意的是，若仅仅是为了求 $DP(1)$，则我们无须先求 P 的表达式，因为若 φ^t 满足 $\dot{x}=f(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\varphi^t(x))=Df(\varphi^t(x))\cdot D\varphi^t(x)$$

设 $\varphi^t(r)$是(2.33)的周期轨道 $r=1$ 在第一分量上的投影，则由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r-r^3)=1-3r^2$，所以在 $r=1$ 上，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\varphi^t(1))=-2D\varphi^t(1)$，从而 $D\varphi^t(1)=\mathrm{e}^{-2t}$，所以 $DP(1)=D\varphi^t(1)|_{t=2\pi}=\mathrm{e}^{-4\pi}<1$.

我们现在考虑下面的非自治的周期性受迫振动问题.



(a) 固定点 $p=P(p)$的周期 T轨道　　(b) 次调合 $2T$轨道

图 2.9　Poincaré 映射的强迫振动

$$\dot{x}=f(x,t),\qquad (x,t)\in R^n\times R \tag{2.34}$$

其中 $f(x,t)=f(x,t+T)$，T 为 f 关于 t 的周期，为了写成动力系统的形式，我们给(2.34)所示的系统相空间再增加一维，写成

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,\theta)\\ \dot{\theta}=1\end{cases}\qquad (x,\theta)\in R^n\times s^1 \tag{2.35}$$

其中 s^t 是周长为 T 的圆周，即 $S^t = R(\bmod T)$. 对于这个问题，我们可以定义整体的截面

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in R^n \times S^t \mid \theta = \theta_0\}$$

因为 $\dot{\theta} = 1$ 导致了由(2.35)定义的轨道必然与 Σ 横截相交，设 φ^t 是由(2.35)确定的动力系统，则我们可以定义 Poincaré 映射 $P: \Sigma \to \Sigma$ 使得

$$P(x) = \pi \cdot \varphi^T(x, \theta_0), \qquad x \in R^n$$

这里 $\pi(x, \theta) = x$ 是 $R^n \times s^t$ 到 R^n 的投影映射.

§2.1.4 不变集和吸引子

我们已经给出了不动点和周期轨道，它们是最特殊的不变集，下面我们引进一般的情形.

设 $\varphi^t: t \in \Lambda$ 是 R^n 上的动力系统，集合 A 称 $A \subset R^n$ 为 φ^t 的不变集(invariant set)，若 A 是 R^n 中的闭集且 $\varphi^t(A) = A$, $\forall t \in \Lambda$. 若 φ^t 是连续的动力系统，则常称 φ^t 的不变集为不变流形(invariant manifold).

下面介绍比周期轨道略微一般的不变流形——K 维轮胎面. 设 φ^t 是 R^n 上连续的动力系统. $\varphi^t(\overline{x})$ 是 φ^t 的一个周期 T 轨道，其中 $\overline{x}$ 是轨道上一固定点，则可以写成

$$\varphi^t(\overline{x}) = \Phi(\overline{x}, \omega t) \tag{2.36}$$

其中 $\Phi(\overline{x}, \cdot)$ 是周期与周长均为 2π，频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 的圆周 S^t. 实际上还有更一般的集合 $S^t \times \cdots \times S^t = T^k$ 为 k 维轮胎面(torus)，$1 < k < n$，在下述情形下组成 φ^t 的不变流形.

事实上，在(2.36)中 Φ 可以看成是以 ω 为频率的简谐振子，所以自然地还可能有 k 个简谐振子叠加的情形，其频率分别为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$，对于 $x \in T^K$，$1 < k < n$，$\omega_i / \omega_j \neq$ 有理数，$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots, k$ 和连续的动力系统 φ^t 轨道.

$$\varphi^t(x) = \Phi(x, \omega_1 t, \omega_2 t, \cdots, \omega_k t) \tag{2.37}$$

其中 Φ 关于第 2 至第 $k+1$ 个变量是以 2π 为周期. $\varphi^t: T^k \to T^k$,

则 $\varphi^t(x)$称为拟周期轨道(quasiperiodic orbit),所有这些拟周期轨道恰好构成轮胎面 T^k.由于 $\omega_i/\omega_j\neq$有理数,$i\neq j$,则每一周期轨道都不可能返回到初值点,从而易见拟周期轨道不是不变流形.但是每一周期轨道在 T^k 中稠密,当 $k=2$ 时,则以 $x\in T^2$ 为初值的拟周期轨道 $\varphi^t(x)$是沿着轮胎面绕无穷多圈的轨道.

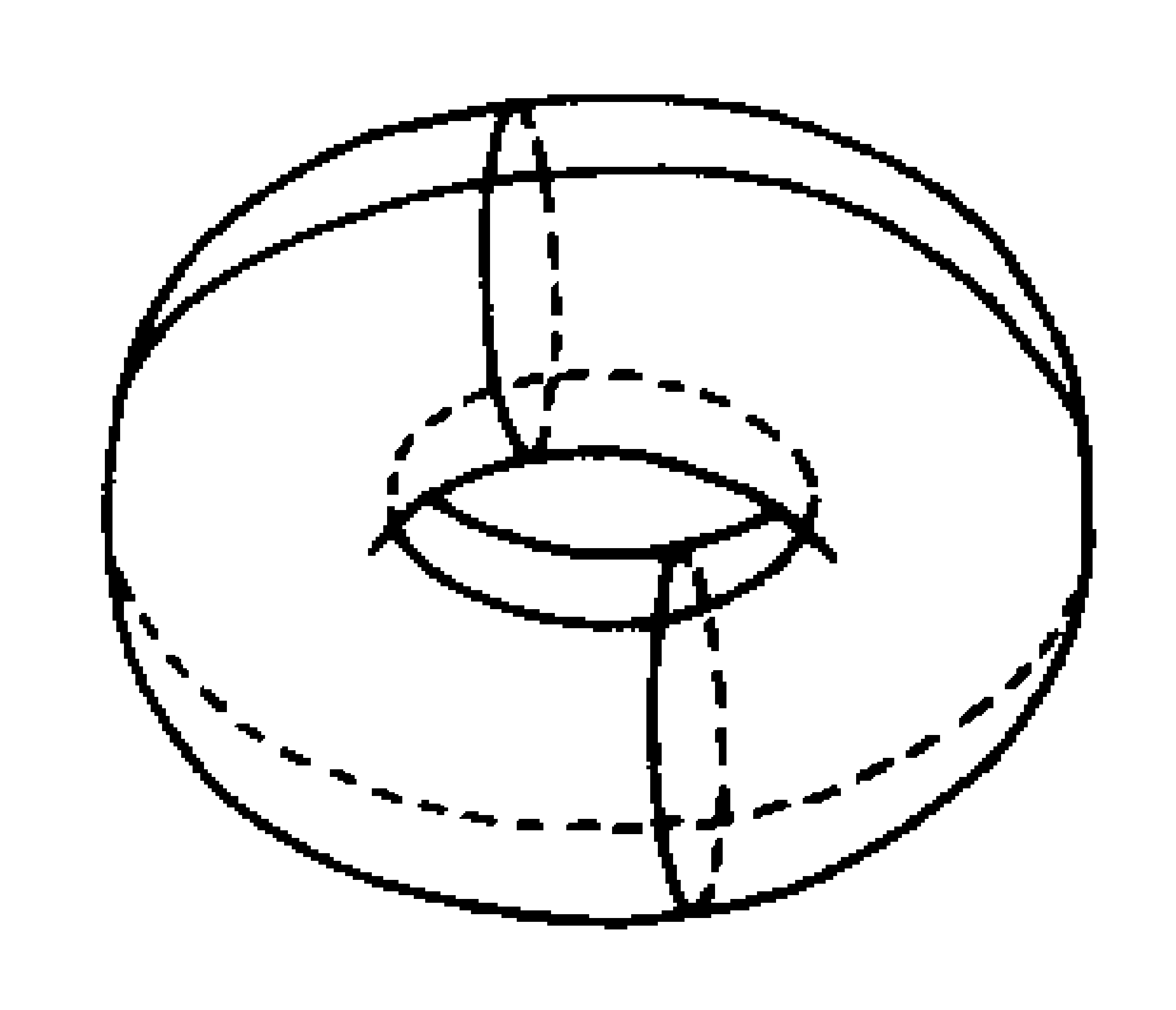


图 2.10 轮胎面 T^2

还有如图 2.11 所示的较常见的不变集.其中 p, p_1, p_2 都是不动点,不变集 A 是一条过不动点 p 的封闭曲线称为同缩轨道(homoclinic orbit).不变集 B 是一条连接两个不同不动点 p_1 和 p_2 的曲线称为异缩轨道(heteroclinic orbit).

还有一类集合为非游荡集(nonwandering set),这是与不变集非常相近似的集合.设点 $x\in R^n$,若 x 的任意邻域 U,都存在 $T>0$,当 $t>T$ 时 $\varphi^t(U)\cap U\neq\varnothing$,则称 x 是 $\varphi^t, t\in\Lambda$ 的非游荡点,所有非游荡点组成的集合为非游荡集.关于非游荡集我们有以下

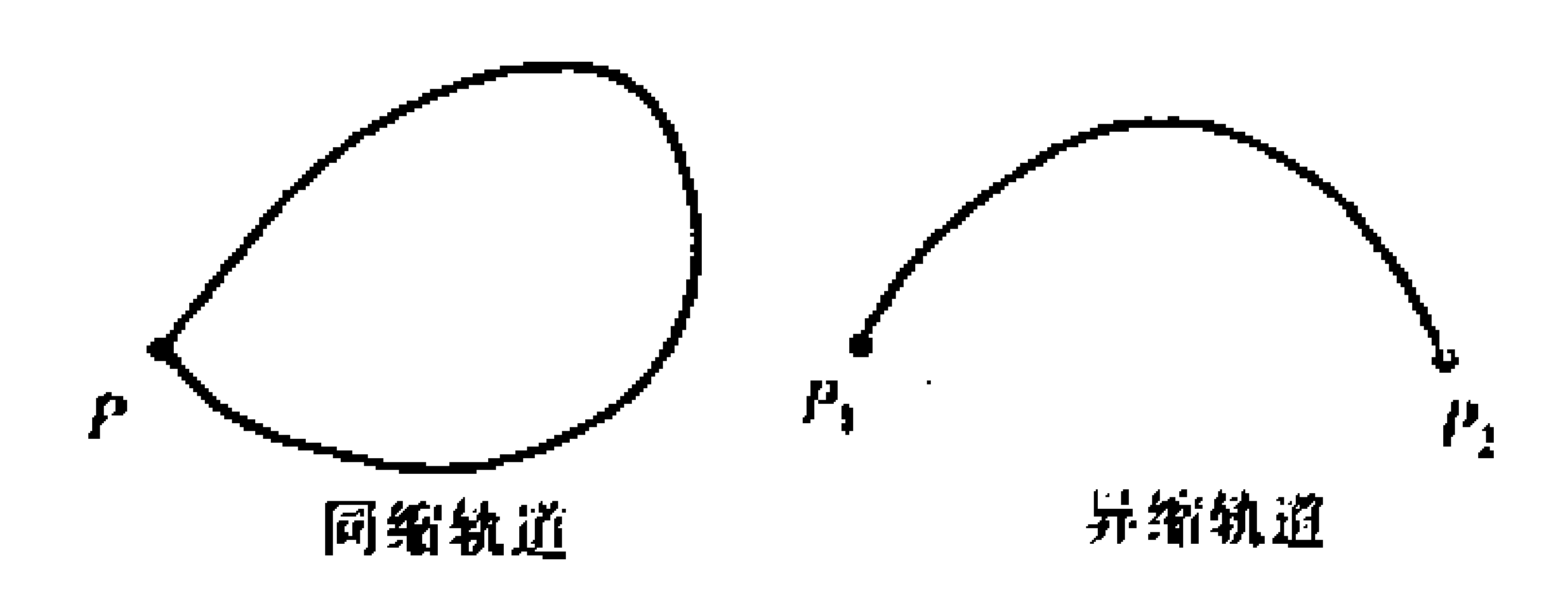


图 2.11

结论：R^2 上连续动力系统 φ^t 的非游荡集(Andronov, et al, 1966)只可能有下列三种集合构成：i) φ^t 的不动点；ii) φ^t 的周期轨道；iii) φ^t 的同缩轨道和异缩轨道，而且容易知道若有同缩或异缩轨道为非游荡集的一部分时，其上的平衡点若是双曲的那必是鞍点，因为在汇和源的邻近不可能有非游荡点。若 φ^t 可逆时，非游荡点集是不变集。图 2.12 给出了 R^2 上连续的动力系统的非游荡集的组成情形。

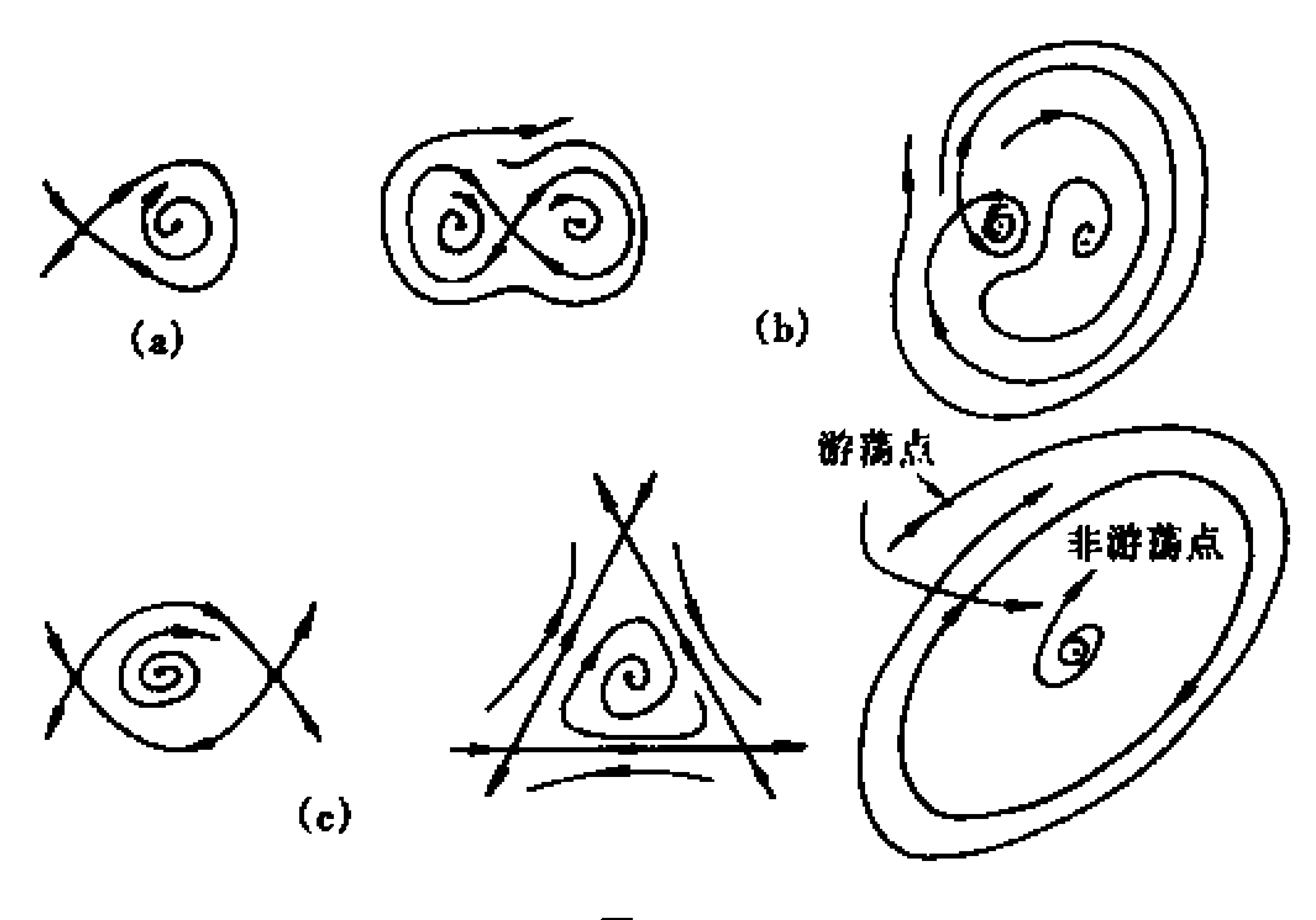


图 2.12

由图 2.12 可见，非游荡集由数个互不相交的部分组成，若这些组成部分是连通的，即不能再分解成数个互不相交的组成部分，则可称其为拓扑可迁的，即非游荡集是数个互不相交的拓扑可迁集之并，其严格的数学定义如下：

令 $\varphi^t, t\in\Lambda$，是 R^n 上的动力系统，$A\subset R^n$ 称为拓扑可迁的(topological transitive)，若存在单个轨道 $\varphi^t(x)$在 A 中稠密，即此轨道的闭包为 A，且 A 是 φ^t 的不变集。

下面介绍几个与稳定平稳点密切相关的不变集的概念。

集 $A\subset R^n$ 称为 R^n 上动力系统 $\varphi^t, t\in\Lambda$ 的吸引集(attracting set)，若 A 是 φ^t 的不变集，且存在着 R^n 中开集 $U\supset A$，使得 $\forall x\in$

U, $d(\varphi^t(x), A)=\inf_{y\in A}|\varphi^t(x)-y|\to 0(t\to\infty)$. 当 $U=R^n$ 时，A 称为整体吸引集(global attracting set). 当 A 为拓扑可迁的吸引集时，称之为吸引子(attractor). 当 A 是拓扑可迁的整体吸引集时，称之为整体吸引子(global attractor).

不难看出，稳定的平衡点是吸引子，以周期轨道构成的轮胎面是拓扑可迁的，所以若它是吸收集则必是吸引子.

作为例子，图 2.13 所示的系统

$$\dot{x}=x-x^3, \dot{y}=-y \tag{2.38}$$

有整体吸引集 $[A,B]$ 和吸引集 $\{A,B\}$，$\{A,O,B\}$ 是非游荡集，$\{O\}$ 是鞍点，所以 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 是系统仅有的两个吸引子.

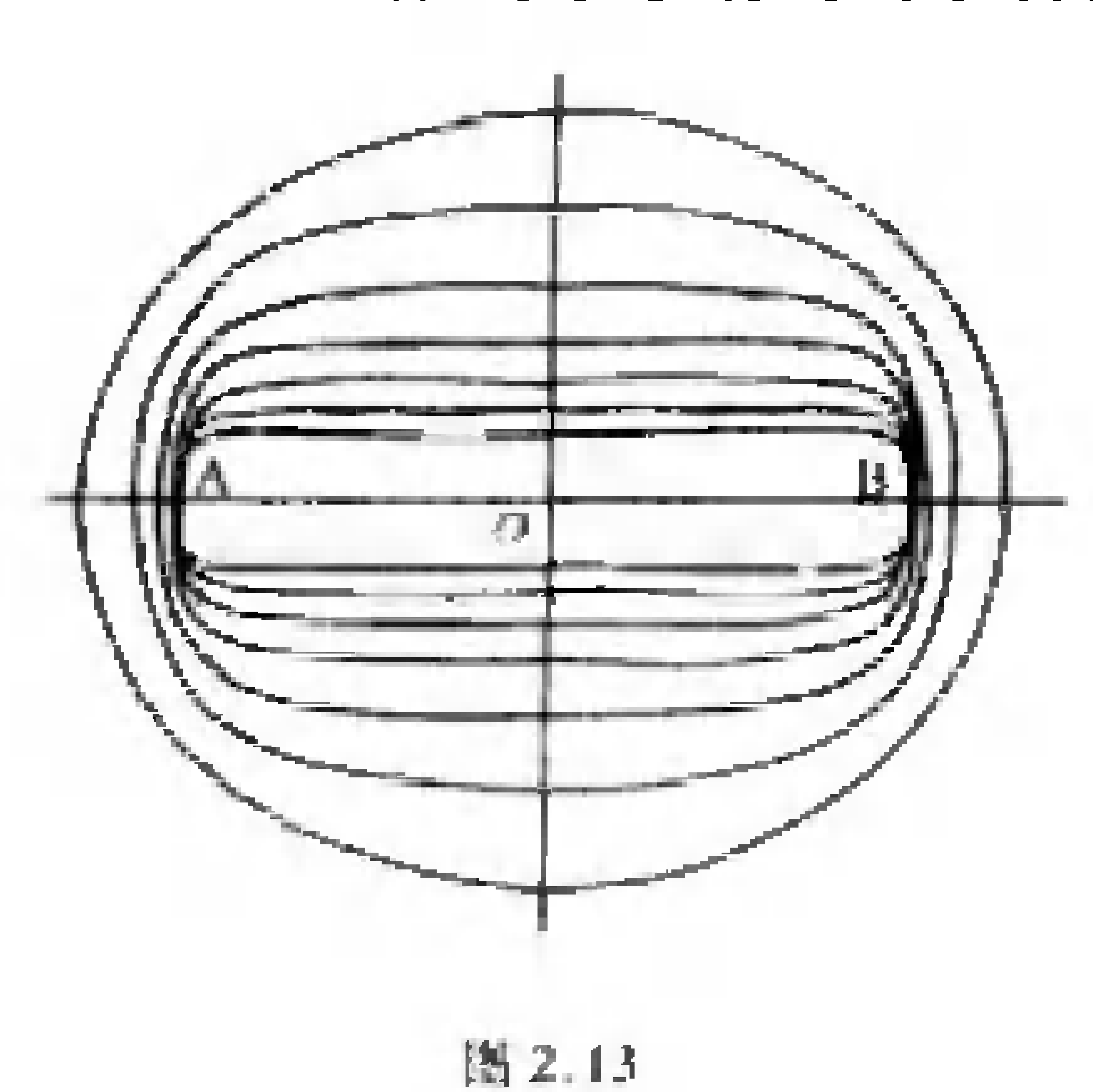


图 2.13

§2.1.5 结构稳定性和分岔的定义

分岔所关心的是系统经某种小扰动后，其基本结构是否发生变化，这其实是微分拓扑学中的基本内容.

设 $f,g:R^n\to R^n$ 是连续可微的，称 f 是 g 的 ε 尺度 C^r 扰动. 若存在 $N>0$，使得 $f(x)=g(x)$，$\forall x\in R^n$ 且 $|x|\geqslant N$，则有

$$|f(x)-g(x)|+|Df(x)-Dg(x)| \\ <\varepsilon, \forall x\in R^n, |x|<N \tag{2.39}$$

在这一节中，对于 $f:R^n\to R^n$，我们令 φ_f^t 为由 f 生成的离散

的动力系统 $f^t, t\in Z_+$，或为以 f 为切向量场的连续的动力系统 $\dot{x}=f(x)$.

我们称映射 $f,g:R^n\to R^n$ 拓扑等价，若存在同胚映射 $h:R^n\to R^n$ 使得 $h(g(x))=f(h(x))$, $\forall x\in R^n$. 我们称动力系统 φ_f^t 和 φ_g^t 拓扑等价(topological equivalence)或拓扑共轭(topological conjugate)，若存在同胚映射 $h:R^n\to R^n$ 使得对于 $x\in R^n$ 和 $t\in\Lambda$，

$$h(\varphi_g^t(x))=\varphi_f^t(h(x)) \tag{2.40}$$

若 $A\subset R^n$ 是闭集，$U\supset A$ 是 A 的邻域，$h:U\to h(U)$ 是同胚映射，使得当 $x\in U, t\in\Lambda(=Z_+$ 或 $[0,+\infty))$ 时，(2.40)式成立，则称 φ_f^t 与 φ_g^t 在 A 邻域拓扑等价.

分别称映射 $f:R^n\to R^n$ 和动力系统 $\varphi_f^t:R^n\to R^n$ 是结构稳定的(structurally stable)，若存在 $\varepsilon>0$，使得任意 f 的 ε 尺度 C^r 扰动 g，都有 f 与 g 以及 φ_f^t 与 φ_g^t 分别拓扑等价. $A\subset R^n$ 是闭集称 f 和 φ_f^t 分别在 A 的邻域结构稳定. 若 $\exists\,\varepsilon>0$，使得 $\forall f$ 的 ε 尺度的 C^r 扰动 g，都有 f 与 g 以及 φ_f^t 与 φ_g^t 分别在 A 邻域拓扑等价. 若 φ_f^t 在 A 邻域结构稳定，则称 A 是结构稳定的.

值得注意的是，映射 $f:R^n\to R^n$ 的结构稳定和 $f^k:R^n\to R^n$ 的结构稳定这两个概念是完全一样的. 若两个动力系统拓扑等价，也就是这两个系统的拓扑结构完全一样，从而两系统的平衡点、周期轨道、各种不变集或是各种轨道都可以在相应的同胚 h 下建立连续的对应关系. §2.1.2中的 Hartman 定理所说的是动力系统在双曲点邻域拓扑等价于一个线性的动力系统，也可以说动力系统的双曲平衡点是结构稳定的.

事实上，当系统 φ^t 经同胚映射 $h:R^n\to R^n$ 转化为另一个与其拓扑等价的动力系统 $h\cdot\varphi^t\cdot h^{-1}$ 时，若 $\bar{x}$ 是 φ^t 的平衡点，则 $h(\bar{x})$ 是 $h\cdot\varphi^t\cdot h^{-1}$ 的平衡点. 若 $\bar{x}$ 分别是 φ^t 的汇、源或鞍点，则 $h(\bar{x})$ 也必然分别是 $h\cdot\varphi^t\cdot h^{-1}$ 的汇、源或鞍点. 但是值得注意的是，当 $\bar{x}$ 是结时，$h(\bar{x})$ 可能会变成焦点，反之，当 $\bar{x}$ 是焦点时，$h(\bar{x})$ 可能会转化成结点.

作为例子，考虑线性的动力系统 $\varphi_0^t,\cdots,\varphi_3^t$. 它们分别是方程 $\dot{u}=A_k u, k=0,1,2,3$ 的解，其中 A_0,A_1,A_2,A_3 分别为

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix} \quad (2.41)$$

易见，原点是以上系统的平衡点且是汇，不难看出，我们有如下的表达式

$$\varphi_0^t=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix},\qquad \varphi_1^t=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\varphi_2^t=e^{-t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix},\qquad \varphi_3^t=e^{-3t}\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix} \quad (2.42)$$

现分别取 R^2 到 R^2 的同胚

$$h_1\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ |y|y\end{pmatrix},h_2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y-x\ln|x|\end{pmatrix}$$

$$h_3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}r^3\sin(\theta-\ln r)\\ r^3\cos(\theta-\ln r)\end{bmatrix},r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},\theta=\arctan\frac{x}{y} \quad (2.43)$$

则 $\varphi_i^t\cdot h_i=h_i\cdot\varphi_0^t,\quad i=1,2,3$，即 φ_i^t 与 φ_0^t 拓扑等价($i=1,2,3$).

值得注意的是同胚 h_1,h_2 和 h_3 在平衡点(0,0)处是不可微的，事实上，不存在着可微的同胚即微分同胚使得(2.43)式成立.

通常我们需要考虑和参量 μ 有关的动力系统 φ_μ^t，随着 μ 的变化，动力系统的拓扑结构也会发生变化，即动力系统 φ_μ^t 发生“质”的变化. 而产生“质”的变化的 μ 值是我们最感兴趣的，这就是源于 poincaré 的分岔.

设 $\varphi_\mu^t, t\in A$，是 R^n 上含参量 $\mu\in R^k$ 的一簇动力系统. 若 $\mu=\mu_0$ 时，φ_μ^t 非结构稳定，则称 μ_0 是 μ 的分岔值(bifurcation value)，也称 φ_μ^t 在 μ_0 点出现分岔.

例如系统 $\dot{x}=\mu x-x^3$，在 $\mu=0$ 出现分岔，因为当 μ 增长穿过点 $\mu=0$ 时系统由单个平衡点变成具有两个平衡点．见图 2.14，显然在 $\mu=0$ 时系统不可能结构稳定．

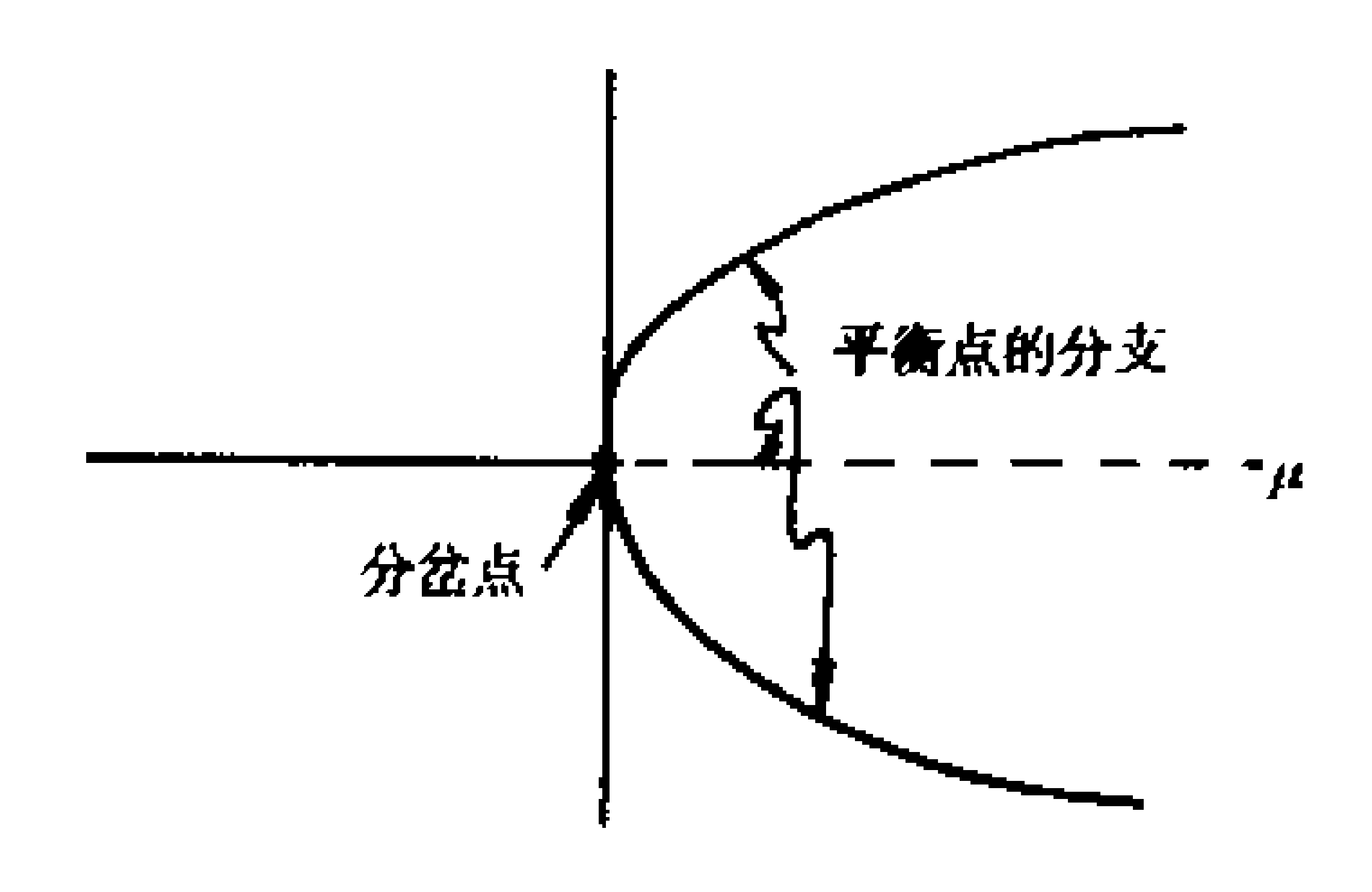


图 2.14　$f_\mu(x)$的 $\mu x-x^3$ 分岔图

分岔理论的深入研究将需要许多微分拓扑学和代数拓扑学的知识，但这些知识已超出了本书范围．这里本书将从实用的角度介绍这方面的一些常识，事实上，从应用出发来研究分岔也可以得到许多好的结果（见 Guckenheimer－Holmes 1983 和 Wiggins 1990）．

关于动力系统的拓扑结构是否发生变化，最容易把握的是平衡点邻域的性态．若 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$ 时动力系统 $\varphi^t_{\mu_0}$ 在其平衡点邻域出现了分岔．那么这就意味着系统本身出现分岔．让我们考虑以 f_μ 为切向量场的 R^n 上的动力系统

$$\dot{x}=f_\mu(x);x\in R^n,\mu\in R^k \tag{2.44}$$

这一簇系统的平衡点也就是满足 $f_\mu(x)=0$ 的点$(x,\mu)\in R^n\times R^k$．若在这样的点上，$Df_\mu(x)$是可逆的，由隐函数定理知必然存在 $x=x(\mu)$，这是一一对应关系，即若系统在平衡点(x_0,μ_0)处 $Df_{\mu_0}(x_0)$可逆，则当 μ 穿过 μ_0 时系统 φ^t_μ 的平衡点的个数不会发生变化．当然在这样的情况下，我们还无法断定 μ_0 是否为分岔值，因为在这样的 μ_0 邻域虽然不会分岔出平衡点，但可能分岔出周期轨道，这就是下面所要讲到的 Hopf 分岔．若在 μ_0 处 x_0 是

$\varphi^t_{\mu_0}$的双曲平衡点,则由于 Hartman 定理,φ^t 不会在点(x_0,μ_0)处出现分岔;而出现分岔的只可能是非双曲点,即中心,若 φ^t_μ 在点(x_0,μ_0)处出现分岔,我们则称(x_0,μ_0)是分岔点.而在实际应用中特别重要的是那些使得 $Df_{\mu_0}(x_0)$不可逆的分岔点.

由于动力系统只可能在作为中心的平衡点邻域才可能出现分岔,所以局部分岔理论的主要任务就是研究中心的局部拓扑结构的变化情况.

设 φ^t_μ 是以f_μ 为切向量场的动力系统,如果 x_0 是 $\varphi^t_{\mu_0}$ 的中心,即 x_0 为满足 $f_{\mu_0}(x_0)=0$ 且 $Df_{\mu_0}(x_0)$有实部为零的特征值的点,那么在这种点上 $Df_\mu(x_0)$有下列几种常见的标准形式:

(i) 余维数为 1 的情形

a) 单个零特征值

$$Df_\mu(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

b) 单对纯虚数特征值

$$Df_\mu(x) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

(ii) 余维数为 2 的情形

a) 2 重零特征值,且不能对角化

$$Df_\mu(x)=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

b) 单个零特征值 + 单对纯虚数特征值

$$Df_\mu(x) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

在这里，每一个矩阵 A 都不含有实部为零的特征值.

§2.1.6 中心流形

当我们期望简化动力系统时，很容易会接受下面两种方法：第一种是尽量去除系统的非线性；第二种则是设法降低系统维数，即尽量把次要的不会使系统产生本质变化的维数去掉. 就第一种方法而言，我们在 Hartman 定理中已经讲过，如假设 $\bar{x}$ 是系统 $\dot{x}=f(x)$ 的双曲平衡点，即 $Df(\bar{x})$ 有 s 个实部小于零的特征值，有 u 个实部大于零的特征值，$f: R^{s+u}\to R^{s+u}$，则 Hartman 定理告诉我们存在 $\bar{x}$ 的 R^{s+u} 中的邻域 U，使得存在着同胚 $h: U\to h(U)$ 使系统 $\dot{x}=f(x)$ 与

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1, & x_1\in R^s,\\ \dot{x}_2=x_2, & x_2\in R^u,\end{cases}\quad (x_1,x_2)\in h(U) \tag{2.49}$$

在 $\bar{x}$ 邻域拓扑等价，显然(2.49)是结构稳定的，从而 $\dot{x}=f(x)$ 在 $\bar{x}$ 邻域是结构稳定的.

如果 $\bar{x}$ 是 $\dot{x}=f(x)$ 的中心，则问题将变得相当复杂，对于分岔问题 $\dot{x}=f_\mu(x)$，$x\in R^n$，$\mu\in R^k$ 可以化成为

$$\begin{cases}\dot{x}=f_\mu(x)\\ \dot{\mu}=0\end{cases} \tag{2.50}$$

即 $\dot{x}=f_\mu(x)$ 的分岔点就是(2.50)的中心. 由此可见，研究中心邻域的状态就意味着研究分岔或是局部分岔. 在以上的 Hartman 定理中可以粗糙地看到稳定和不稳定流形都是结构稳定的，所以若 $\bar{x}$ 是系统 $\dot{x}=f_\mu(x)$ 的中心，则 $\bar{x}$ 的邻域将会出现三种流形：稳定流形 $w^s(\bar{x})$，不稳定流形 $w^u(\bar{x})$ 和中心流形 $w^c(\bar{x})$. 其定义为：$w^c(\bar{x})$ 是系统 $\dot{x}=f(x)$ 的不变流形，它与 $\dot{x}=f(x)$ 的中心子空间 E^c 维数相同，且 $w^c(\bar{x})$ 在 $\bar{x}$ 点与 E^c 相切. 为了简化系统，我们希望把结构稳定的稳定流形和不稳定流形削去，从而降低了系统的维数，但被削去的系统依然保留了原系统在中心邻域的性质，这就是中心流形理论所关心的根本问题.

为了对中心邻域的性质有一个直观的了解,我们先考虑下列的例子

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2\\ \dot{y}=-y,\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}\in R^2 \tag{2.51}$$

注意到(2.51)在一般情况下其右端比较复杂,因此整体解往往不存在,但这并不重要,它依然可以提供中心邻域的变化情况.

由于(0,0)是(2.51)的平衡点,且对于

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}x^2\\ -y\end{pmatrix}$$

$$Df=\begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\text{在 }(x,y)=(0,0)\text{点} \tag{2.52}$$

所以(0,0)是(2.51)的中心,其稳定子空间和稳定流形是 y 轴,中心子空间是 x 轴,不稳定流形不存在.

对(2.51)积分得

$$t=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x(t)},\quad y(t)=y_0e^{-t} \tag{2.53}$$

从而

$$y(x)=y_0e^{-\frac{1}{x_0}}e^{\frac{1}{x}} \tag{2.54}$$

由于 y 关于 x 在原点的导数为零且 $y(x)\to\infty$,当 $x\to0^+$;$y(x)\to0$,当 $x\to0^-$,且$(x,y(x))$在 x 轴上时如图 2.15. 可见(2.51)有无数条中心流形,它们的全体恰好盖住了第二、三象限和

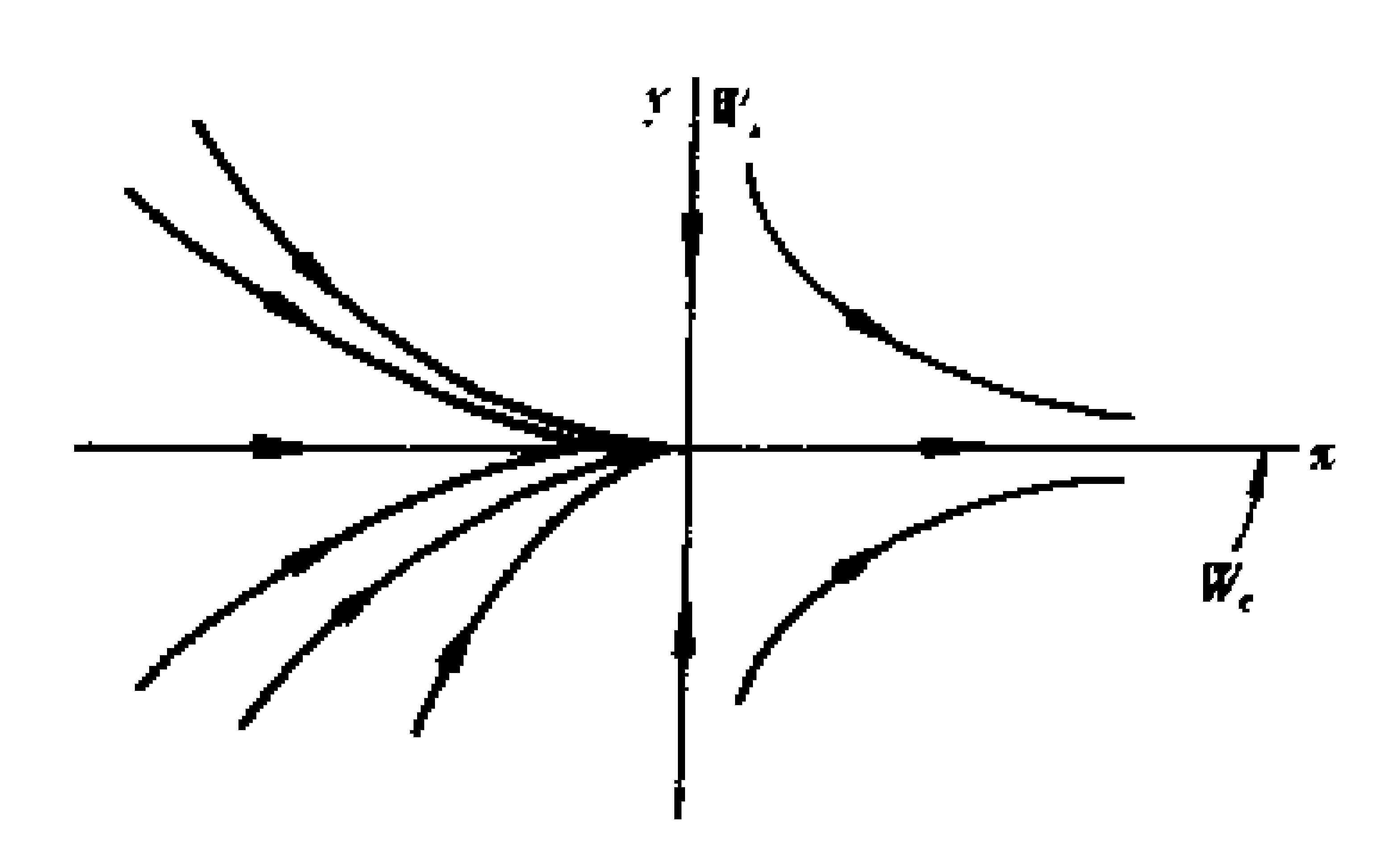


图 2.15　方程(2.51)的相图,图中黑线为中心流形

x 轴，因此，中心流形的明显特点是不惟一性，实际上，中心流形的光滑性也要比稳定流形差.

下面再举一例，考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = y \\ \dot{\mu} = 0\end{cases}, \qquad f\begin{pmatrix}x \\ y \\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu x - x^3 \\ y \\ 0\end{pmatrix} \tag{2.55}$$

其平衡点为 μ 轴和 (x,μ) 平面中的抛物线：$(x,y,\mu)=(x,0,x^2)$，而

$$Df = \begin{pmatrix}\mu - 3x^2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{2.56}$$

这意味着(2.55)所有的平衡点都是中心，当中心是 μ 轴上的点 $(0,0,\mu_0)$ 时，(2.55)的稳定、不稳定和中心流形与其相应的子空间重叠. 如 $(0,0,\mu_0)$ 的中心流形为 μ 轴，若中心 $(x_0,y_0,z_0)=(\pm\sqrt{\mu_0},0,\mu_0)$ 时，相应于此中心的中心子空间和中心流形分别是 $\operatorname{span}\{(\pm 1/2\sqrt{\mu_0},0,1)\}$ 和抛物线 $(x,y,\mu)=(\pm\sqrt{\mu},0,\mu)$.

下面给出连续动力系统的中心流形定理.

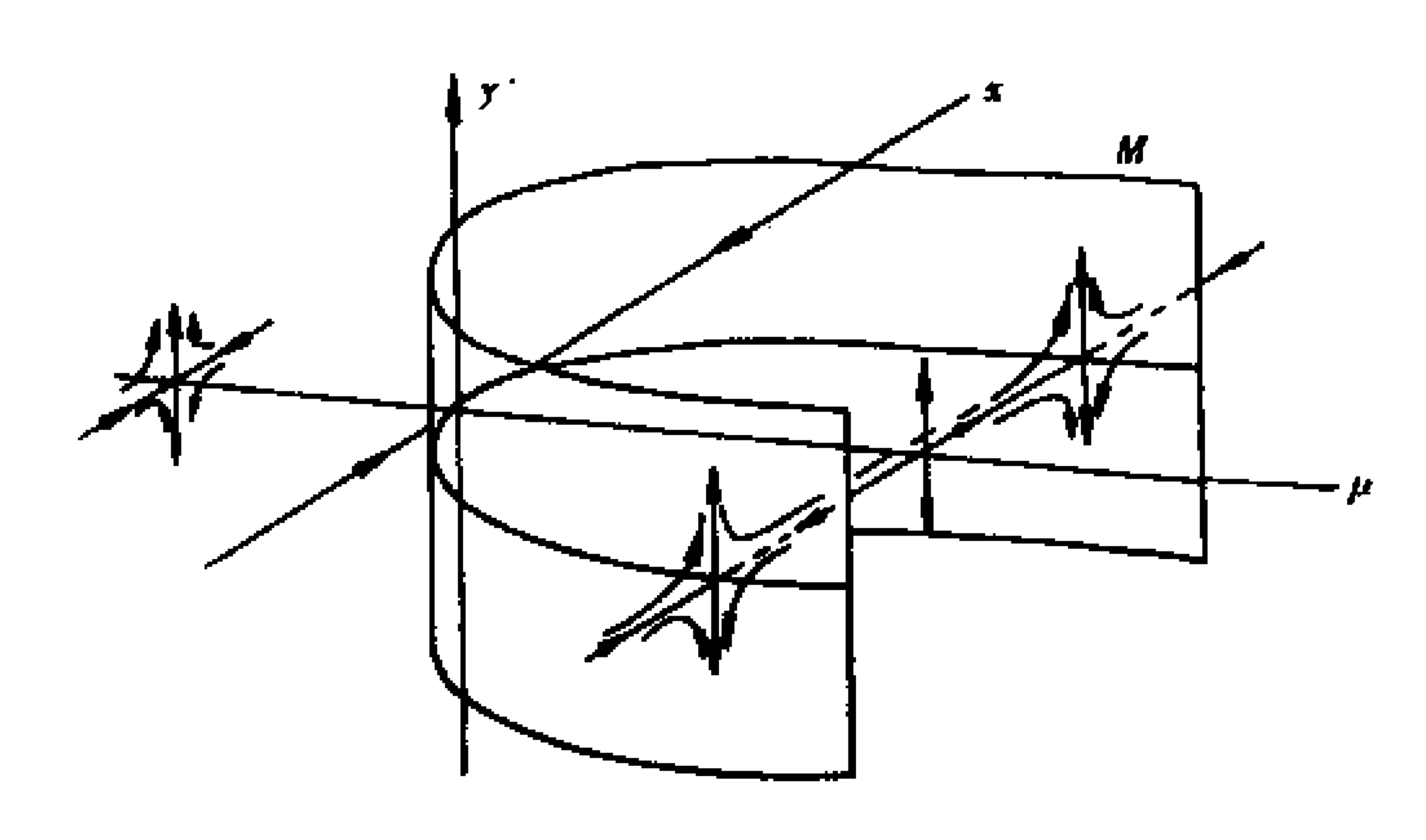


图 2.16　方程(2.55)的不变流形

定理 2.6(Marsden - McCracken [1976],Carr[1981]) 设 f: $R^n \to R^n$ 二次连续可微,系统 $\dot{x}=f(x)$ 以 0 为平衡点,$Df(0)$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,记 $\sigma_s=\{\lambda_k \mid \mathrm{Re}\lambda_k<0\}$,$\sigma_c=\{\lambda_k \mid \mathrm{Re}\lambda_k=0\}$,$\sigma_u=\{\lambda_k \mid \mathrm{Re}\lambda_k>0\}$,且相应于 σ_s,σ_c 和 σ_u 的稳定、中心和不稳定子空间为 E^s,E^c 和 E^u.则系统 $\dot{x}=f(x)$ 的稳定和不稳定流形分别与 E^s 和 E^u 在 0 点相切,且存在着 0 点的一个中心流形 $w^c(0)$ 在 0 点与 E^c 相切,进一步地,$\dot{x}=f(x)$ 在 0 点邻域局部拓扑等价于

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{f}(\tilde{x}) \\ \dot{\tilde{y}}=-\tilde{y} \\ \dot{\tilde{z}}=\tilde{z}\end{cases} \tag{2.57}$$

其中

$$(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in E^c \times E^s \times E^u.$$

此定理的几何图像见图 2.17.

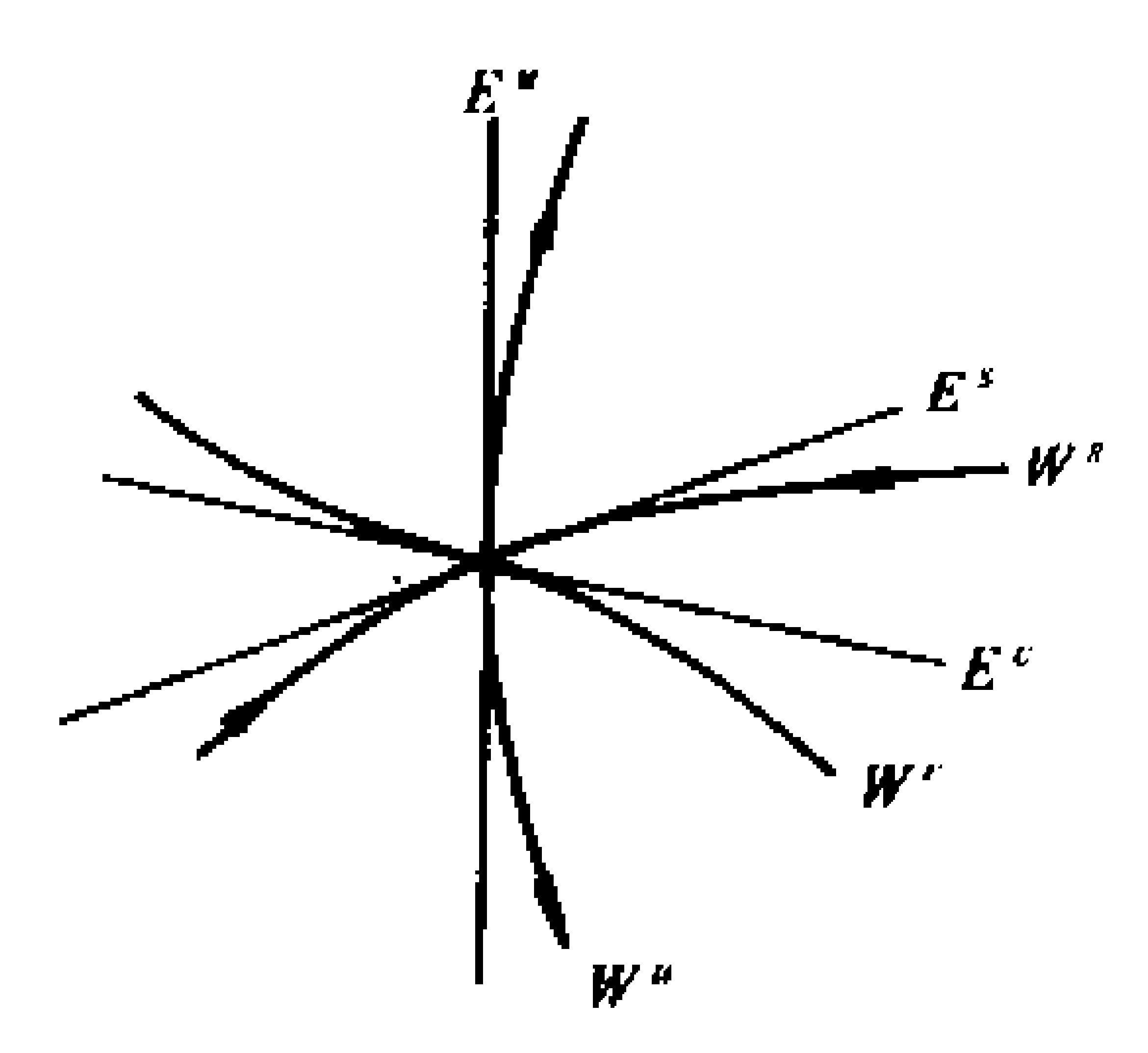


图 2.17 稳定,不稳定和中心流形

下面我们来求出(2.57)中的 $\tilde{f}$,为简便起见,我们考虑系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+f(x,y) \\ \dot{y}=By+g(x,y)\end{cases} \tag{2.58}$$

其中 $(x,y)\in R^n\times R^m$,A 和 B 分别是 $n\times n$ 和 $m\times m$ 矩阵,A 的 n 个特征值的实部全为零,且 B 的 m 个特征值的实部全部小于

零，且 $f(0,0)=0, g(0,0)=0, Df(0,0)=0, Dg(0,0)=0$. 以上假设使得我们得到(2.58)的在(0,0)点的中心子空间 $E^c=R^n$ 而稳定子空间 $E^s=R^m$. 由于中心流形 $w^c((0,0))$ 与 $E^c=R^n$ 在原点相切，则必存在 R^n 中零点的邻域 $U\subset R^n$ 以及可微映射 $h: U\subset R^n$ 使得 $W^c(0,0)$ 在(0,0)邻域可以表示为 h 的图像：

$$W^c((0,0))=\{(x,y)\mid y=h(x), x\in U\} \tag{2.59}$$

由于 $W^c(0,0)$ 与 R^n 相切，所以 h 还需满足

$$h(0,0)=0, Dh(0,0)=0$$

把系统(2.58)在 $W^c(0,0)$ 上的向量场 $\begin{pmatrix} f(x,h(x)) \\ g(x,h(x)) \end{pmatrix}$ 投影到 $E^c=R^n$ 上，得

$$\dot{x}=Ax+f(x,h(x)) \tag{2.60}$$

这就得到我们所要找的 $\tilde{f}(x)=Ax+f(x,h(x))$，从而把一个 $n+m$ 维的系统(2.58)化为 n 维系统(2.60)，"削"掉了我们不感兴趣的结构稳定的部分，研究(2.58)转化为研究(2.60).

为了说明以上简化的合理性，我们给出下列定理.

定理 2.7（Carr[1981]） 设 φ^t 和 ψ^t 分别为由(2.60)和(2.58)所确定的系统. 若 φ^t 在 0 点渐近稳定（asymptotically

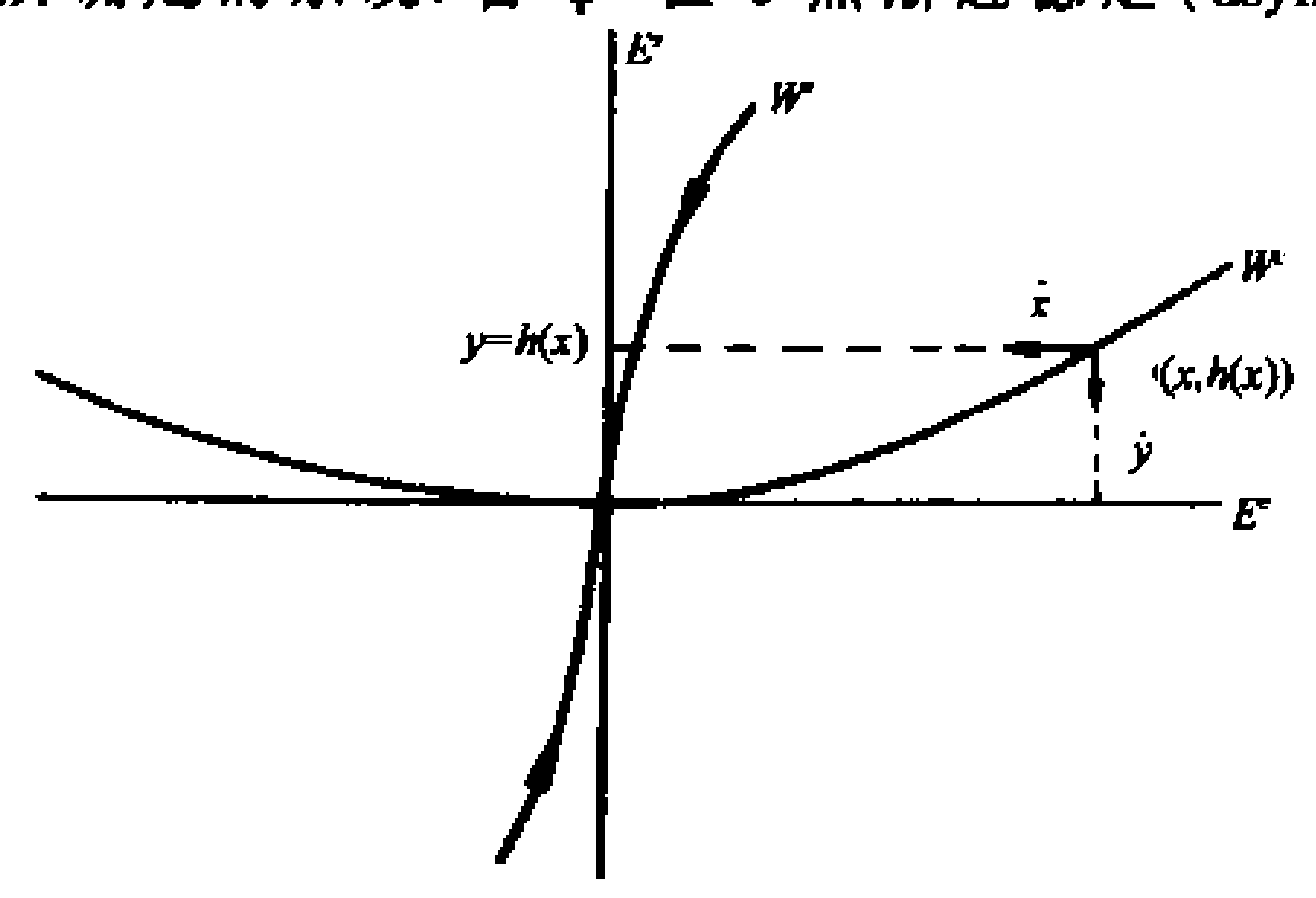


图 2.18 中心流形和其投影向量区域

stable)，即 $\exists\,\delta>0$ 使得当 $|x|<\delta, x\in R^n$ 时 $\varphi^t(x)\to 0\quad(t\to+\infty)$，则 ψ^t 在(0,0)点渐近稳定. 若 φ^t 在 0 点渐近不稳定(asymptotically unstable)，即 $\exists\,\delta>0$，当 $|x|<\delta, x\in R^n$ 时，$\varphi^t(x)\to 0$ $(t\to-\infty)$)，则 ψ^t 在(0,0)点渐近不稳定.

一般来说 h 是可以确定出来的，或者至少可以确定出其主要部分. (2.60)中的 h 的求法如下：用 $y=h(x)$ 代入(2.58)得

$$\dot{y}=Dh(x),\dot{x}=Dh(x)(Ax+f(x,h(x)))$$

所以

$$Bh(x)+g(x,h(x))=Dh(x)(Ax+f(x,h(x)))\tag{2.61}$$

从而我们得到 h 的三个方程

$$N(h)=0,h(0)=0,Dh(0)=0\tag{2.62}$$

$N(h)$为(2.61)式的右端与左端的差. 对 h 在零点进行 Taylor 展开，则基本上可以确定出 h 的主要部分.

例

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=-v+\alpha u^2+\beta uv\end{cases}\tag{2.63}$$

其中参量 α,β 将在以后确定，易见(0,0)是(2.63)的平衡点. 向量场$(v,-v+\alpha u^2+\beta uv)^T$ 在(0,0)点的 Jacobi 矩阵为$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$，从而特征值为 0，-1，而且不难得到

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}T$$

其中

$$T=T^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \alpha u^2+\beta uv\end{bmatrix}$$

令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$$

那么

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha u^2 + \beta uv \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(x+y)^2 - \beta(x+y)y \\ -\alpha(x+y)^2 + \beta(x+y)y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x+y)^2 - \beta(x+y)y \\ \dot{y} = -y - \alpha(x+y)^2 + \beta(x+y)y \end{cases} \tag{2.64}$$

从而可设欲求的 h 满足条件 $h(0)=0, h'(0)=0$ 且

$$\begin{aligned} N(h(x)) = h'[\alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x)+h^2(x))] + h(x) \\ + \alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x)+h^2(x)) = 0 \end{aligned}$$

由于 $h(0)=h'(0)=0$,则 h 在 0 点邻近的 Taylor 展开为

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + \cdots$$

由此得

$$\begin{aligned} N(h(x)) &= (2ax+O(x^2))[\alpha(x+O(x^2))^2 - O(x^3)] \\ &\quad + ax^2 + bx^3 + \alpha(x+ax^2+O(x^3))^2 - \beta(ax^3+O(x^4)) \\ &= 2a\alpha x^3 + ax^2 + bx^3 + \alpha x^2 + 2a\alpha x^3 - \beta a x^3 \\ &\quad + O(x^4) \end{aligned}$$

由 $N(h(x))=0$ 得

$$h(x) = -\alpha x^2 + \alpha(4\alpha-\beta)x^3 + O(x^4) = -\alpha x^2 + O(x^3)$$

因此,对于 $\alpha\neq0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x+h(x))^2 - \beta(x+h(x))h(x) \\ &= \alpha(x-\alpha x^2+O(x^3))^2 - \beta(x(-\alpha x^2+O(x^3))+O(x^4)) \\ &= \alpha x^2 + \alpha(\beta-2\alpha)x^3 + O(x^4) \end{aligned} \tag{2.65}$$

从而,我们可以把(2.65)看成是方程 $\dot{x}=\alpha x^2$ 经小扰动后得到的.

类似地,当 $\alpha>0$ 时(2.64)在(0,0)邻域的相图可以类似于图 2.19 的形式.

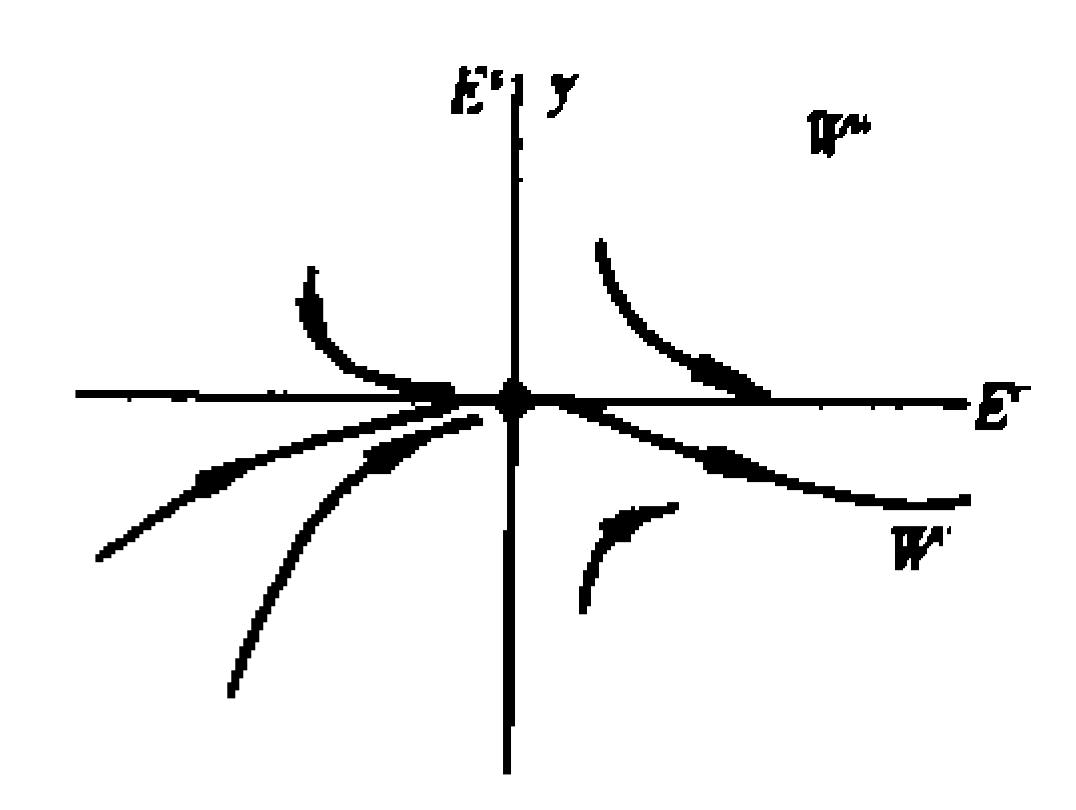


图 2.19　系统(2.63)在(0,0)邻域的相图

接下来再考虑一个例子:

$$\begin{cases}\dot{x}=xy\\ \dot{y}=-y+\alpha x^2\end{cases}\tag{2.66}$$

此系统以(0,0)为平衡点,其向量场在此点的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

设 $h(x)=ax^2+bx^3+\cdots$ 得

$$\begin{aligned}N(h(x))&=h'(x)\cdot[xh(x)]+h(x)-\alpha x^2\\ &=2ax\cdot ax^3+ax^2-\alpha x^2+O(x^3)\\ &=(a-\alpha)x^2+O(x^3)=0\end{aligned}$$

从而

$$h(x)=\alpha x^2+O(x^3)$$

所以

$$\dot{x}=\alpha x^3+O(x^4)$$

当 $\alpha<0$ 时是渐近稳定的,从而(2.66)在(0,0)是渐近稳定的(图 2.20),是系统(2.66)在(0,0)邻域相图.

下面我们将简述一下如何用中心流形定理的方法来考察分岔

$$\begin{cases}\dot{x}=A_\mu x+f_\mu(x,y)\\ \dot{y}=B_\mu y+g_\mu(x,y)\\ \dot{\mu}=0\end{cases}\tag{2.67}$$

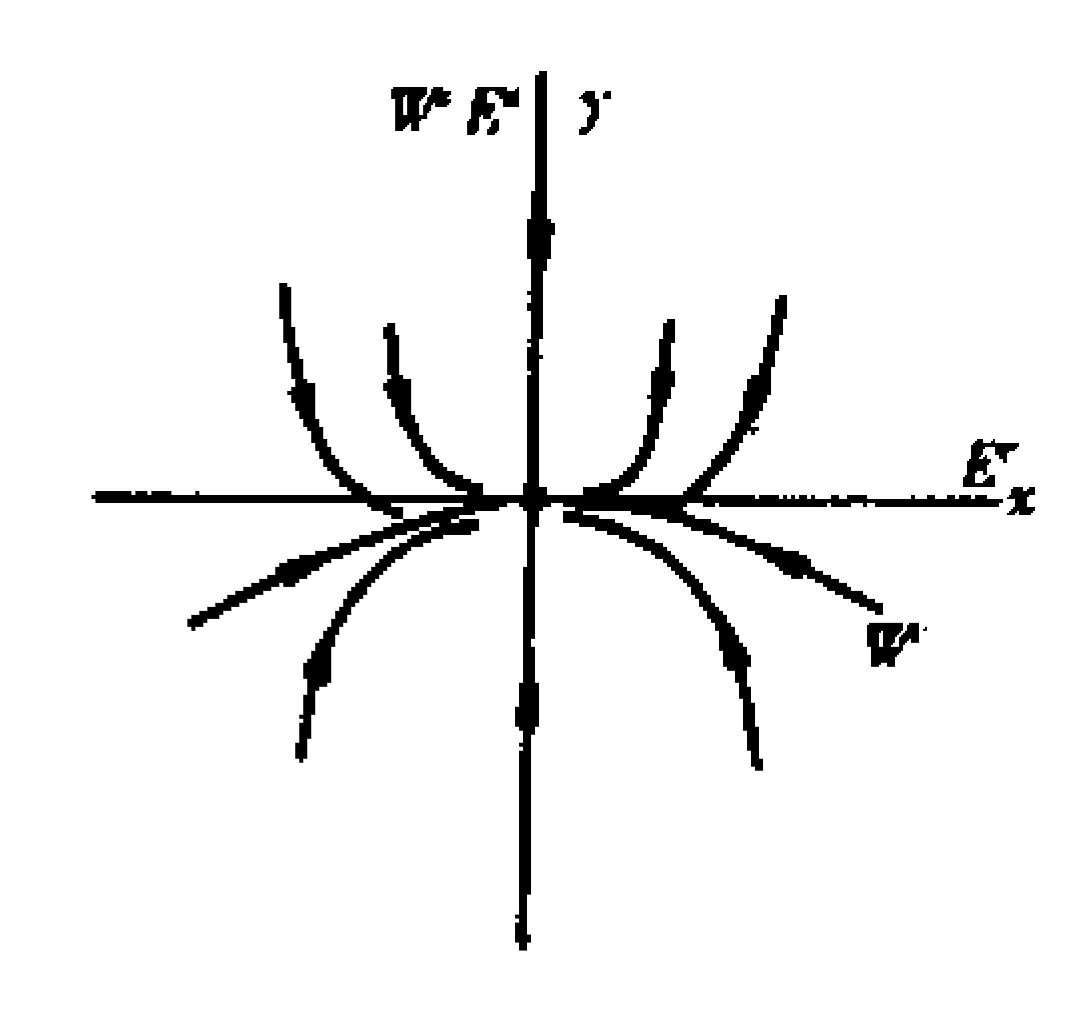


图 2.20 系统(2.66)在(0,0)邻域的相图

其中$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{\mu}\in R^k$. $n\times n$ 矩阵 A_μ 和 $m\times m$ 矩阵 B_μ 与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 无关，且其特征值实部分别是等于零和小于零，则由中心流形定理可得(2.67)在中心平衡点(0,0,0)处有一中心流形相切于中心子空间 $R^n\times R^k$，从而有一个映射 $\boldsymbol{h}: R^n\times R^k\to R^m$，使得(0,0,0)处的中心流形可以局部地表成 $\boldsymbol{h}$ 的图像. 而中心流形的流不变性使得(0,0,0)分岔出的所有解依然在中心流形里面，这意味着我们只要在中心流形里考查分岔即可.

例如，考虑下列二次 Duffing 方程

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=\beta u-u^2-\delta v\end{cases}\tag{2.68}$$

在 $\beta=0$ 处的分岔问题. 为了利用中心流形的思想把(2.68)写成

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=\beta u-u^2-\delta v\\ \dot{\beta}=0\end{cases}\tag{2.69}$$

从而(2.69)的向量场在平衡点$(u,v,\beta)=(0,0,0)$处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\delta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -\delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\delta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/\delta & 0\\ 0 & -1/\delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{2.70}$$

从而(2.69)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=\frac{\beta}{\delta}(x+y)-\frac{1}{\delta}(x+y)^2\\ \dot{y}=-\delta y-\frac{\beta}{\delta}(x+y)+\frac{1}{\delta}(x+y)^2\\ \dot{\beta}=0\end{cases} \tag{2.71}$$

其中

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/\delta\\0 & -1/\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{2.72}$$

由于(2.71)的中心子空间是(x,β)平面,所以其中心流形应该是图像$\{(x,y,\beta)\mid y=h(x,\beta)\}$.下面利用$h(0,0)=0,Dh(0,0)=0$来确定$h$,由 Taylor 展开,可设

$$h(x,\beta)=ax^2+bx\beta+c\beta^2+O(3)\qquad O(3)=O(|(x,\beta)|^3)$$

注意到

$$Dh(x,\beta)=(\partial_x h(x,\beta),\partial_\beta h(x,\beta))=(2ax+b\beta+\cdots,bx+2c\beta+\cdots)$$

从而

$$\begin{aligned}N(h(x,\beta))&=Dh(x,\beta)\begin{pmatrix}(\beta/\delta)(x+h)-(1/\delta)(x+h)^2\\0\end{pmatrix}+\delta h\\&\quad+\frac{\beta}{\delta}(x+h)-\frac{1}{\delta}(x+h)^2\\&=(2ax+b\beta)(\frac{\beta}{\delta}(x+O(2))+O(2))\\&\quad+\delta(ax^2+bx\beta+c\beta^2)+\frac{\beta}{\delta}(x+ax^2+bx\beta+c\beta^2)\\&\quad-\frac{1}{\delta}(x+O(2))^2+O(3)\end{aligned}$$

由$N(h(x,\beta))=0$得

$$a=\frac{1}{\delta^2},\quad b=-\frac{1}{\delta^2},\quad c=0$$

因此

$$y=h(x,\beta)=\frac{1}{\delta^2}(x^2-\beta x)+O(3)$$

把系统限制在中心流形上再投影到(x,β)平面,得

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\beta}{\delta}\left(x+\dfrac{1}{\delta^2}(x^2-\beta x)\right)-\dfrac{1}{\delta}(x+\cdots)^2+O(3)\\ \dot{\beta}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{1}{\delta}\left(1-\dfrac{\beta}{\delta^2}\right)x(\beta-x)+O(3)\\ \dot{\beta}=0\end{cases}\tag{2.73}$$

而(2.68)在分岔点$(u,v,\beta)=(0,0,0)$邻近的分岔状况也等价于

$$\dot{x}=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\beta}{\delta^2}\right)x(\beta-x)+O(3)\tag{2.74}$$

在分岔点$(x,\beta)=(0,0)$邻近的分岔状况. 图 2.21 是方程(2.71)

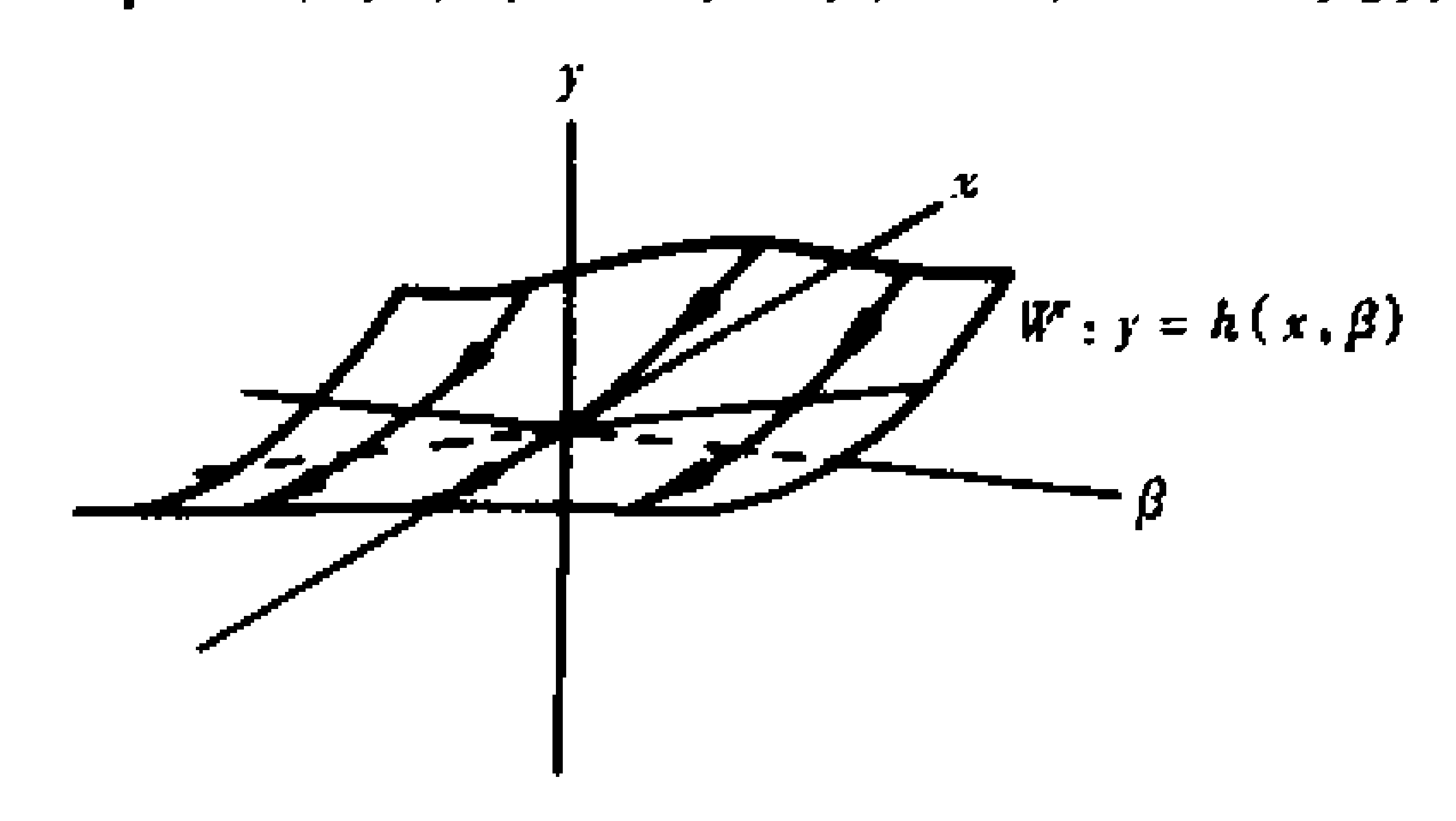


图 2.21　方程(2.71)的中心流形

的中心流形图,(2.68)在此中心流形中分岔状况也已画了出来,所以也是(2.68)的分岔图. 图 2.22 所示的是(2.74)分岔图,这是图 2.21 的分岔图在(x,β)平面,即(2.73)的中心流形上的投影所得

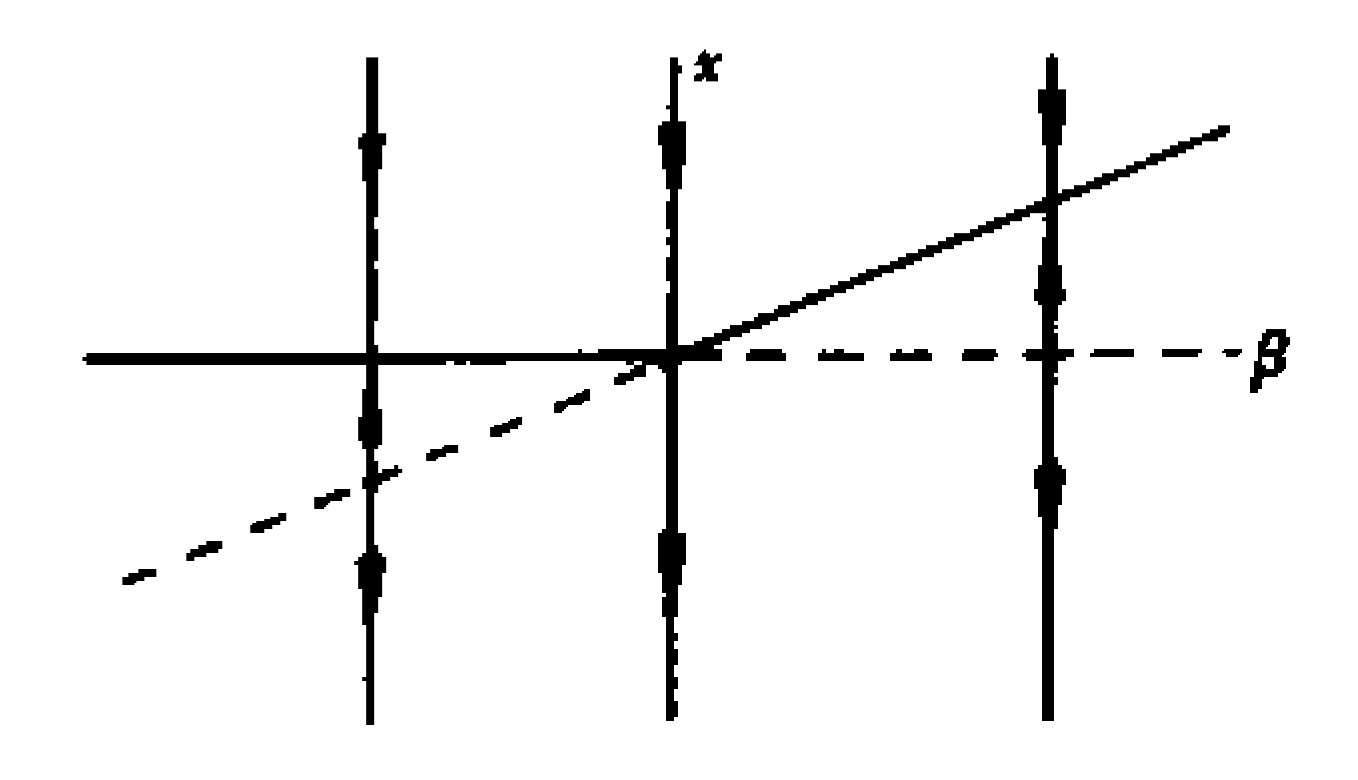


图 2.22　方程(2.74)的分岔图

到的.图 2.21 及图 2.22 两个分岔图具有相同的拓扑结构.

以上所讲的都是有关连续动力系统的中心流形.关于离散动力系统的中心流形理论与连续的是平行的,我们几乎可以完全类似地推得.Wiggins[1990].

下面我们将给出几种典型的余维数为 1 的分岔.

§2.1.7 鞍结点分岔

设(ρ,μ_0)是系统 $\dot{x}=f_\mu(x)$,$x\in R^n$,$\mu\in R$ 的分岔点,且其余维数为 1.若 $Df_{\mu_0}(\rho)$是只有一特征值为零的矩阵,则根据中心流形思想 $\dot{x}=f_\mu(x)$的分岔(在(ρ,μ_0)邻近)只可能发生在 $\dot{x}=f_\mu(x)$,$\dot{\mu}=0$ 的中心流形里面.这是一个二维曲面,利用中心流形定理,把 n 维系统 $\dot{x}=f_\mu(x)$简化成 1 维系统,所以我们不妨设 f_μ 是R 到R 的函数.

下面考虑系统

$$\dot{x}=f_\mu(x),\qquad x\in R,u\in R \tag{2.75}$$

在点$(x,\mu)=(0,0)$出现分岔,若(2.75)是下面非常特殊的情况

$$\dot{x}=\mu-x^2,\qquad x\in R,\mu\in R \tag{2.76}$$

则其分岔图如图 2.23.当 $\mu<0$ 时,(2.76)没有平衡点;当 $\mu=0$ 时,只有一个平衡点;当 $\mu>0$ 时,有两个平衡点,一个是结点,另一个是鞍点,这种分岔称为鞍结点分岔,通常也称为切分岔(tan-

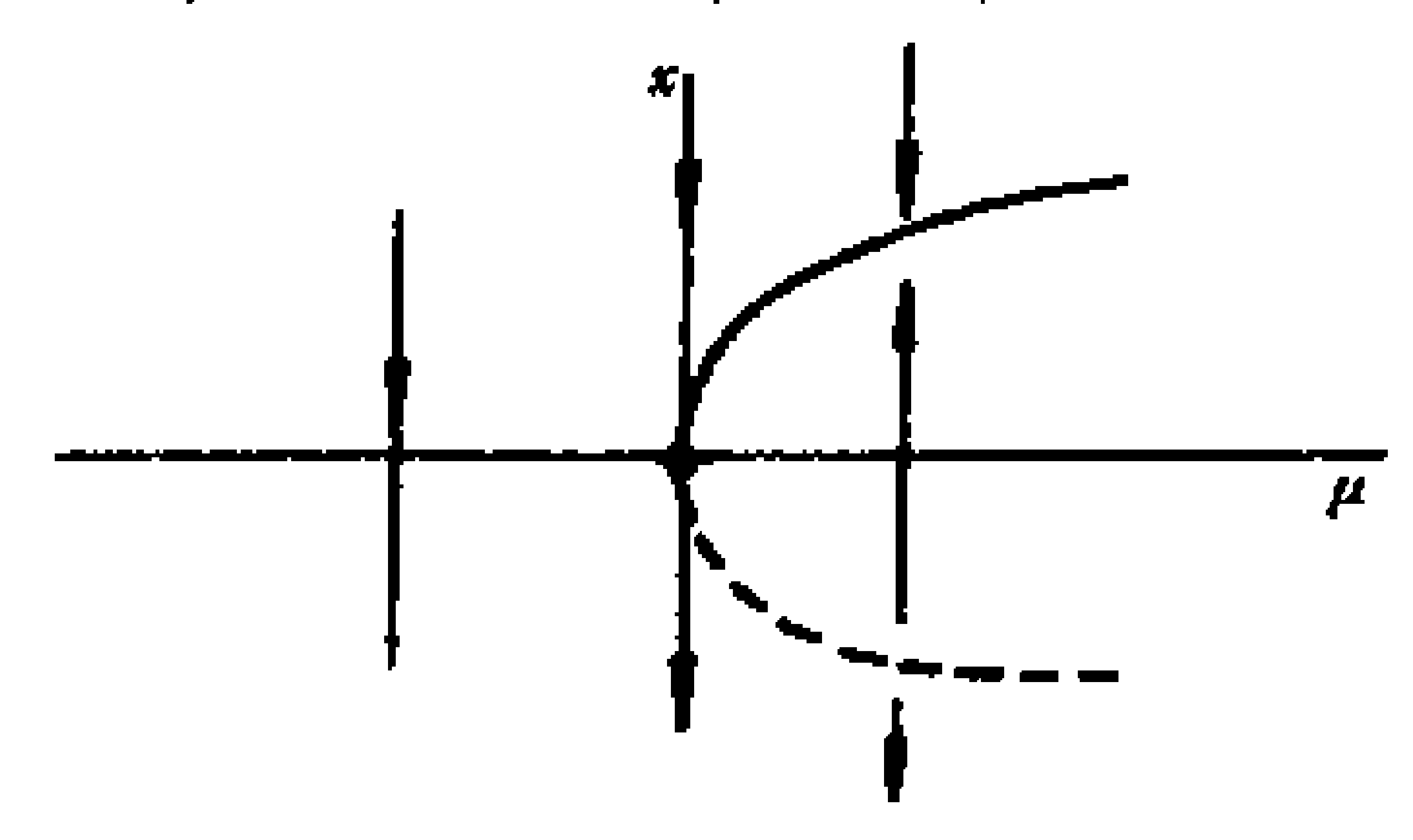


图 2.23 鞍结点分岔

gent bifurcation).对于一般的情况,我们有下面简单的定理.

定理 2.8 若存在 $a,b,c\in R,ab\neq 0$,使得 $f_\mu(x)=a\mu-bx^2+c\mu^2+O(|(\mu,x)|^3)$,则(2.75)在 $(x,\mu)=(0,0)$ 点邻近出现鞍结点分岔,即当 $ab\mu<0$ 时,(2.75)没有平衡点,当 $ab\mu>0$ 时,(2.75)有一个鞍点和一个结点,且由(2.75)的平衡点 (x,μ) 组成的曲线在分岔点(0,0)与 x 轴相切.

图 2.24 给出的是二维的鞍结点分岔.

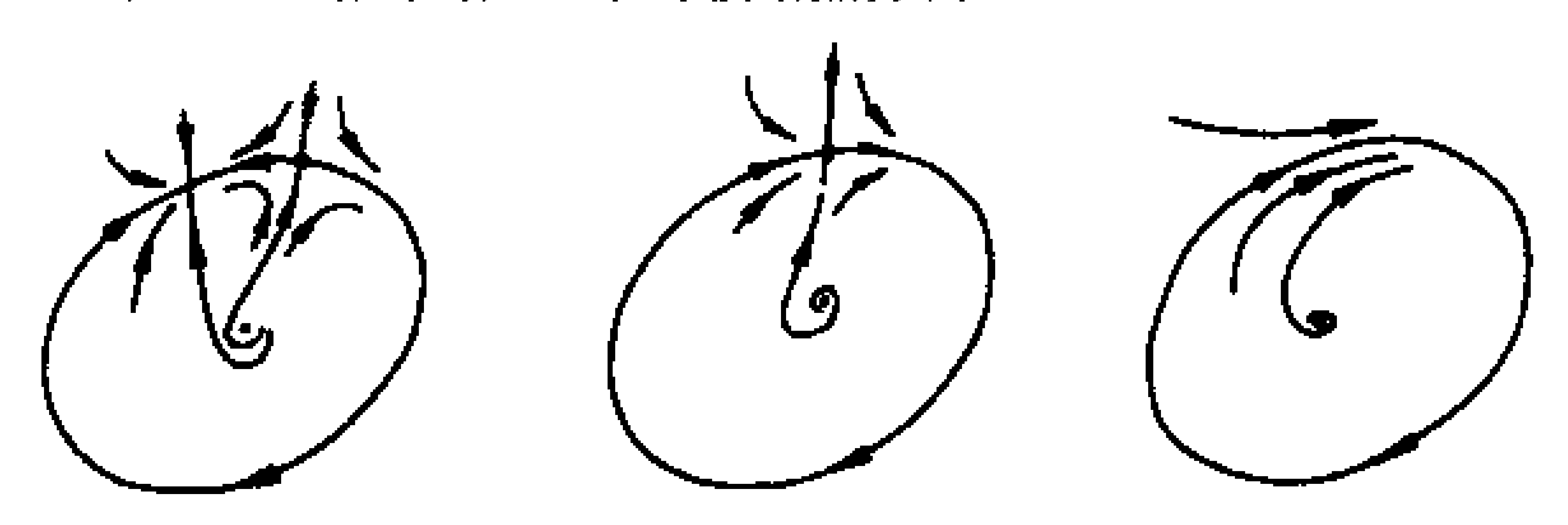


图 2.24 鞍结点(封闭曲线内)导致的全局分岔

§2.1.8 Transcritical 分岔和 Pitchfork 分岔

现研究系统 $\dot{x}=\mu x-x^2$ 在分岔点(0,0)邻近所产生的分岔. 图2.25是 $\dot{x}=\mu x-x^2$ 的分岔图,即其平衡点由两条线组成,它们仅在原点处相交.当 $\mu<0$ 时,若 (x,μ) 是结点,则当此点沿着所在的线穿过原点则成为鞍点或是源,而源从左边越过零点时则成为结点,我们把这种平衡点在分岔点处交错变化的分岔称为 Transcritical 分岔.一般地,若存在 $a,b\neq 0$ 使得 $f_\mu(x)=a\mu x-bx^2+O(|(\mu,x)|^3)$,则显然 $\dot{x}=f_\mu(x)$ 在 $(\mu,x)=(0,0)$ 点邻域

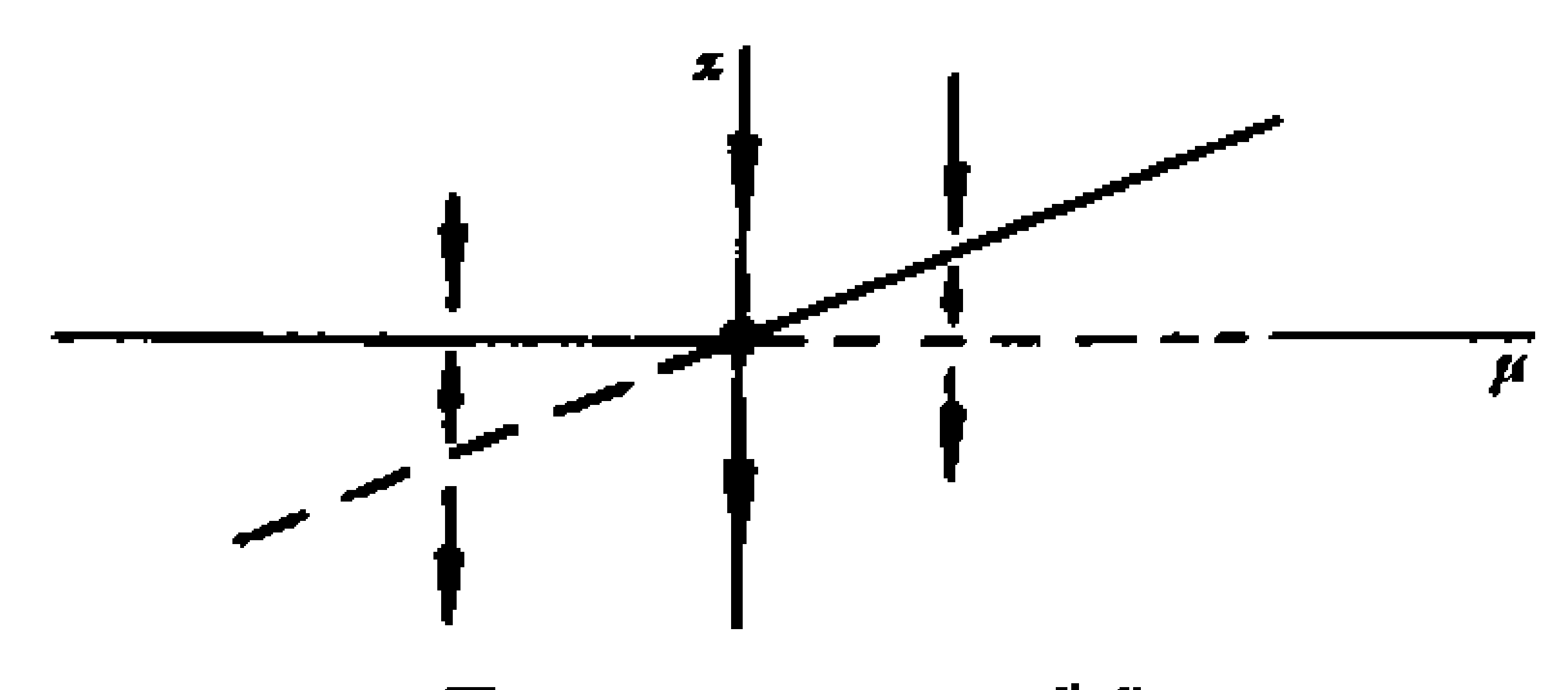
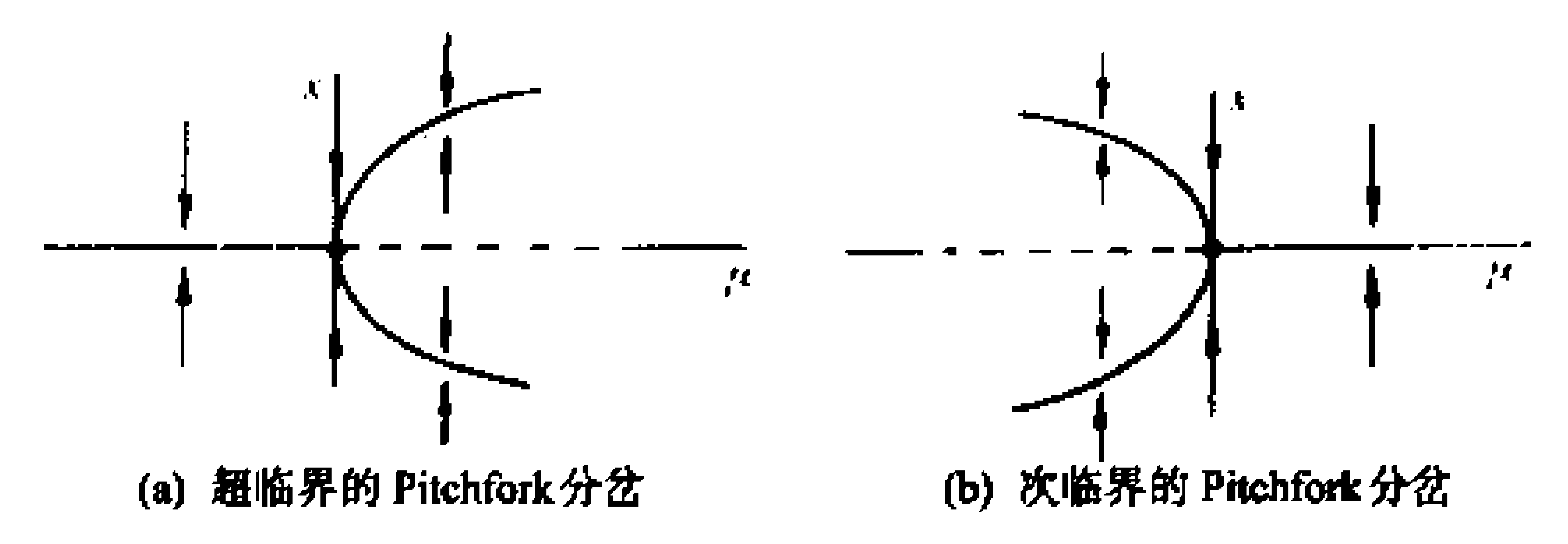


图 2.25 Transcritical 分岔

产生 Transcritical 分岔.

典型的 Pitchfork 分岔则来自系统 $\dot{x}=\mu x-x^3$ 和 $\dot{x}=\mu x+x^3$ 在(0,0)邻域分别产生超临界的(supercritical)Pitchfork 分岔和次临界的 Pitchfork 分岔,见图 2.26. Pitchfork 也称分岔为树枝分岔.



(a) 超临界的 Pitchfork 分岔　　(b) 次临界的 Pitchfork 分岔

图 2.26

接下去我们介绍比前面三种略微复杂一些的余维数为 1 的分岔.

§2.1.9 Hopf 分岔

与§2.1.7 和§2.1.8 不同的是这里的系统在分岔点分岔出来的不是平衡点而是周期轨道,所以这里的中心流形要比前三种的高一维.

考虑系统

$$\dot{x}=f_\mu(x),x\in R^n,\mu\in R \tag{2.77}$$

其分岔点为(0,0),且 $Df_0(0)$ 可以是下列的形式

$$Df_0(0)=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix} & 0\\ 0 & A\end{bmatrix} \tag{2.78}$$

其中 A 是 $(n-2)\times(n-2)$ 矩阵且 A 的 $n-2$ 个特征值的实部都不为零.利用中心流形定理,(2.77)的(0,0)的分岔只发生在

$$\begin{cases}\dot{x}=f_\mu(x)\\ \dot{\mu}=0\end{cases}$$

$x\in R^n$ 的中心流形里面.此中心流形是一个三维的流形,我们不妨设 $n=2$(因为其他相应于 A 的 $n-2$ 维在分岔中不起作用),并

只考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha\mu x-\omega y+f_{\mu}(x,y)\\ \dot{y}=\omega x-\alpha\mu y+q_{\mu}(x,y)\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2,\mu\in R \tag{2.79}$$

其中 $f_{\mu}(0,0)=g_{\mu}(0,0)=0, Df_{\mu}(0,0)=Dg_{\mu}(0,0)=0$，$\alpha$ 是非零的常数，系统(2.79)的最典型的例子是

$$\begin{cases}\dot{x}=\mu x-y-x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=x+\mu y-y(x^2+y^2)\end{cases} \tag{2.80}$$

此系统的分岔点为 $(x,y,\mu)=(0,0,0)$，且在 $(x,y)=(0,0)$ 点的 Jacobi 矩阵为 $\begin{pmatrix}\mu & -1\\ 1 & \mu\end{pmatrix}$，即此矩阵有两个特征向量 $\lambda_{\pm}=\mu\pm i$，而 $\mu=\mathrm{Re}\lambda_{\pm}$，即(2.80)的所有平衡点组成 μ 轴. 当 $\mu<0$ 时平衡点是焦点，也就是稳定的焦点；当 $\mu>0$ 时，平衡点 $(0,0,\mu)$ 是不稳定的焦点，即 $(0,0,\mu)$ 点邻近为初值的轨道都是绕着 μ 轴而离开点 $(0,0,\mu)$ 的，见图2.27. 从而使得系统在 $(x,y,\mu)=(0,0,0)$ 处分支出一周期轨道；这是以 $\sqrt{\mu}$ 为半径的圆 $x^2+y^2=\mu$. 这种分岔称为超临界的 Hopf 分岔. 由图2.27还可见，由周期轨道组成的抛物面 $\{\mu=x^2+y^2,\quad \mu\geqslant 0, x,y\in R^2\}$ 在原点(0,0,0)与 (x,y) 平面相切.

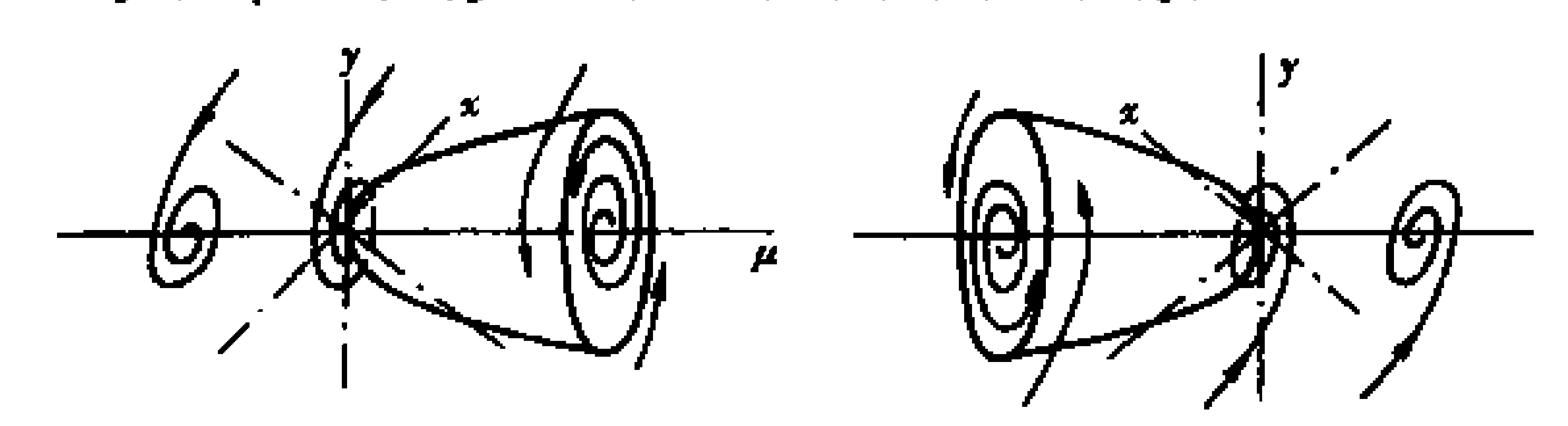


图 2.27　超临界的 Hopf 分岔　　　图 2.28　次临界的 Hopf 分岔

图 2.28 所示的是次临界的 Hopf 分岔，即是(2.80)中的 μ 用 $-\mu$ 代替所得系统的分岔图. 从(2.80)中可见，若取 $y=0$，则(2.80)化成为 $\dot{x}=\mu x-x^3$，即 Hopf 分岔化成为 Pitchfork 分岔，这也就是说 Pitchfork 的分岔图可以看成是 Hopf 分岔图沿着 (x,μ) 平面切开而得到的截痕.

下面我们考虑(2,79)的 Hopf 分岔的一般形式,下面陈述为简化了的 Guckenheimer - Holmes(1983)定理.

定理 2.9 若 $\omega\neq0,\alpha\neq0,g_\mu(0,0)=f_\mu(0,0)=0$,且 $Dg_\mu(0,0)=Df_\mu(0,0)=0$,则存在着 R^2 到 R^2 的光滑的坐标变换,从而使得(2.79)经这一坐标变换后在(0,0,0)点邻近的 Taylor 展开为

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha\mu x-\omega y+a(x^2+y^2)x+(c\mu+b(x^2+y^2))y+O(|(x,y,\mu)|^4)\\ \dot{y}=\omega x+\alpha\mu y+(c\mu+b(x^2+y^2))x+a(x^2+y^2)y+O(|(x,y,\mu)|^4)\end{cases}\tag{2.81}$$

当 $a\neq0$ 时(2.81)在分岔点(0,0,0)邻近出现 Hopf 分岔,即在(0,0,0)分支出一周期轨道 $\mu\approx-\frac{a}{\alpha}(x^2+y^2)$.若$\frac{-a}{\alpha}>0$,则是超临界的 Hopf 分岔,若$\frac{-a}{\alpha}<0$,则是次临界的 Hopf 分岔.

这里,确定常系数 a,b,c,特别是 a 是重要的,实际上(2.81)的向量场是(2.79)的向量场的正规形式(norm form).由于正规形式的推导需要一些 Lie 代数的知识,所以这里省略了.若知道了正规形式的求法,那么其系数则自然能得到.

Hopf 分岔仅仅是对于一对纯虚数的特征值而言.若是向量场中出现了多对纯虚数的特征值,则从分岔点分支出来的很可能不再是周期轨道而是拟周期轨道,从而在其分岔图中所出现的是高维的轮胎面,这其实也是 Landau - Hopf 关于湍流发生机制的 Landau - Hopf 道路的出发点,尽管人们已趋向于认为这种道路所实现的不是真正的湍流.

在 Ruelle - Takens 的文章中,提出了奇怪吸引子也就是混沌吸引子的概念,这种概念的提出也是依赖于对 Navier - Stoke 方程运用中心流形和 Hopf 分岔的思想而得到的.

下一节所阐述的主要内容是混沌吸引子和混沌不变集.这通常依赖于整体分岔的理论,值得注意的是关于整体分岔,很少有一般的定理和理论,它只能针对具体的系统作具体的分析,所用的更多的是几何上直观的想象力和计算机的帮助.

§2.2 混沌动力系统

混沌的研究现已成为动力系统的中心内容之一，在数学上混沌(chaos)一词来自于 Li(李天岩)- York(1975)的文章. 到目前为止，有关混沌的期刊、论著已相当多了，特别是 20 世纪 90 年代以来增长得更快，但真正给混沌下明确定义的并不多. 不同的学派往往会从不同的角度来理解和定义混沌，在这里我们并不关心广义的混沌概念，而是关心在数学物理界被大多数人所接受且认可的混沌概念，其本质就是系统对初值的敏感依赖性.

下面给出有关混沌的定义

对于动力系统 $\varphi^t: R^n \to R^n, t \in \Lambda, (\Lambda = [0, \infty)$, 或者 $\Lambda = Z_+$)和集合 $A \subset R^n$. 若 $\exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall x \in A$ 和 $\forall$ 以 x 为中心的开球 $B^n(x, \epsilon)$, 必 $\exists y \in B^n(x, \epsilon) \cap A$ 和 $t \in \Lambda$ 适合

$$|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)| \geqslant \delta \tag{2.82}$$

则称 φ^t 在 A 上关于初值是有敏感依赖性(sensitive dependence on initial conditions)或称 φ^t 在 A 上是混沌的；反过来，也称 A 是 φ^t 的混沌集. 进一步地，若 A 的 n 维 Lebesque 测度 $L^n(A) > 0$, 则称 φ^t 是混沌的动力系统. 由此可见，混沌的动力系统具有不能忽略的混沌集，或者说具有容易由实验方法"捉到的"混沌集.

从以上定义还可以看到，若 φ^t 是混沌的动力系统，那么 φ^t 关于初值的微小的误差将很可能导致"灾难性"的后果.

在研究动力系统时，最令我们感兴趣的集合是不变集. 若 $\varphi^t: R^n \to R^n$ 的混沌集 $A \subset R^n$ 是 φ^t 的不变集，则称 A 是混沌不变集，且若 A 还是吸引集，则称其为混沌吸引集. 若 φ^t 的混沌集 A 是吸引子，则称 A 为混沌吸引子或为奇怪吸引子(strange attractor).

注意到若 $A \subset R^n$ 为系统 $\varphi^t: R^n \to R^n$ 的混沌吸引子，则存在一开集 $U \supset A$ 使得 $\varphi^t(U) \subset U$, 且 $\varphi^t(U)$ 将会与 A 重合. 当 $t \to \infty$ 时(此 U 称为 A 的吸引盒)，不难想象 U 也是 φ^t 的混沌集，由 $L^n(U) > 0$ 得 φ^t 是混沌的动力系统.

同样不难看出，平衡点、周期轨道、拟周期轨道、同缩轨道和异缩轨道都不可能是混沌集，但 Cantor 三分集是由帐篷映射生成的动力系统的混沌不变集.

以下我们将介绍几个在混沌理论发展过程中起过关键作用的混沌集和混沌动力系统，以及把握混沌的几种常用的方法.

§2.2.1 逻辑斯谛映射

所谓逻辑斯谛映射是指依参量 $\mu>0$ 变化的一维映射 $f_\mu(x)=1-\mu x^2$，注意到当 $0<\mu\leqslant 2$ 时 $f_\mu([-1,1])\subset[-1,1]$，则我们将首先考虑逻辑斯谛映射

$$f_\mu:[-1,1]\to[-1,1],\qquad 0<\mu\leqslant 2$$

逻辑斯谛映射有三种表示形式，其他两种为

$$\bar{f}_\mu(x)=x^2-\mu,\quad \bar{f}_\mu:[-1,1]\to[-1,1],\mu\in(0,2];$$
$$F_a(x)=ax(1-x),\quad F_a:[0,1]\to[0,1],a\in(2,4] \tag{2.83}$$

这是因为存在着同胚映射

$$\bar{h}_\mu(x)=-\mu x\qquad(\bar{h}:R\to R)$$

和

$$\bar{\bar{h}}_a(x)=-\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\qquad(\bar{\bar{h}}:R\to R)$$

使得

$$f_\mu(x)=\bar{h}_\mu^{-1}\cdot\bar{f}_\mu\cdot\bar{h}_\mu(x),\mu>0$$
$$\bar{h}_\mu(x)=\bar{\bar{h}}_a^{-1}\cdot F_a\cdot\bar{\bar{h}}_a(x)\quad 0<\mu=\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2} \tag{2.84}$$

这也就是说，f_μ，$\bar{f}_\mu$ 和 F_a 都是拓扑等价的.

由逻辑斯谛映射产生的动力系统

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n) \tag{2.85}$$

是生物学中昆虫的数量即虫口的模型，若 x_0 代表某一种昆虫初始的数量，那么经过第 n 代的繁殖后的数量则为 x_n.

在详细研究(2.85)之前，我们先回顾一下几个基本概念，并以

一维映射为例介绍几个重要的定理.

一维映射 $f:R\to R$ 以 $x_0,\cdots,x_{n-1}$ 为周期 n 轨道,若

$$|f^{n'}(x_0)|<1 \tag{2.86}$$

此轨道称为稳定的或为吸引的,或

$$|f^{n'}(x_0)|>1 \tag{2.87}$$

则称其为不稳定的或为排斥的,当然周期 1 轨道是不动点,注意

$$f^{n'}(x_0)=f^{n'}(x_1)=\cdots=f^{n'}(x_{n-1}).$$

现在我们考虑具有下列性质的一维映射

$$f:[-1,1]\to[-1,1]$$

下面的定理是重要的.

定理 2.10(Li - Yorke(1975)) 令 $f:[-1,1]\to[-1,1]$ 连续,且 f 具有周期 3 轨道,则

i) 对于任意 $n\in N$,f 有周期 n 轨道.

ii) 存在一个不可数集 $A\subset[-1,1]$ 和 $\varepsilon>0$,使得对于任何 $x,y\in A,x\neq y$ 有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}|f^k(x)-f^k(y)|\geqslant\varepsilon$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}|f^k(x)-f^k(y)|=0$$

这个定理告诉我们具有周期 3 的连续映射 $f:[-1,1]\to[-1,1]$ 必有一个混沌集,这也是 Li - York(1975)的题目:"周期 3 隐含着混沌",值得注意的是具有混沌集的连续映射所生成的动力系统并不一定是混沌的,因为此混沌集的 Lebesque 测度可能为零.

下面让我们给出一个类似于 Li - Yorke 定理但相应于周期轨道而言是更一般的定理.

定理 2.11(Sarkovskii(1964)) 设 $f:[-1,1]\to[-1,1]$ 连续,且对于所有的自然数以下列次序即 Sarkovskii 次序进行排列:

$3\rhd5\rhd7\rhd9\rhd\cdots$

$\triangleright 2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright 2\cdot 7 \triangleright 2\cdot 9 \triangleright \cdots$

……

$\triangleright 2^n\cdot 3 \triangleright 2^n\cdot 5 \triangleright 2^n\cdot 7 \triangleright 2^n\cdot 9 \triangleright \cdots$

……

$\triangleright \cdots \triangleright 2^m \triangleright \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$

则对于任意的自然数 p,q,适合 $p \triangleright q$,且 f 具有周期 P 轨道,则 f 必具有周期 q 轨道.

由定理 2.11 可见,若 f 具有周期 p 轨道,且 $p \neq 2^n$, $\forall n \in N$,则 f 具有周期 2^n 轨道.

这两个定理将有助于我们对逻辑斯谛映射作更深入的了解.下面我们再来研究逻辑斯谛映射,关于此映射,我们有

定理 2.12(Collet - Eckmann[1980]),对于 $\mu \in (0,2]$,逻辑斯谛映射 $f_\mu:[-1,1] \to [-1,1]$具有下列性质:

i) f_μ(或称动力系统 f_μ^k)至多有一个稳定的周期轨道.

ii) 若 f_μ 具有稳定的周期轨道 γ,则集合 $A = \{x \in [-1,1]$轨道 $f_\mu^k(x)$不被 γ 所吸引$\}$是 Lebesque 零测集,即 $L(A)=0$.

iii) 若 f_μ 具有一稳定的周期轨道,则临界点 O(即适合$f_\mu'(x)=0$ 的点)必然被此周期轨道所吸引.

这个定理可以被推广到单峰函数(unimodal),这里就不去缀述了.由此定理可见若 f_μ^k 具有稳定的周期轨道,则 f_μ^k 不可能是混沌的.若以 O 为初值的轨道不被一周期轨道所吸引,则此时的 f 就不可能有稳定的周期轨道.由此可见,了解稳定的周期轨道以及以 O 为初值的轨道对于 f_μ 的混沌分布将是至关重要的.注意到这一点,我们可以借助于计算机把 f_μ 的混沌性态作一个大概的描述.

逻辑斯谛映射(2.85)出现不动点的条件是

$$x_{n+1} = x_n, \text{或 } F(x_n) = x_n \tag{2.88}$$

(2.85)离散映像的不动点类似微分方程解的定态.定态有稳定性问题,不动点也有稳定性问题,也就是说不动点可能是稳定

的，也可能是不稳定的．根据定义假设不动点坐标 x_s 满足(2.88)式，设外界影响使 x 值稍微偏离 x_s 一极小量 ε，$x = x_s + \varepsilon$，则

$$x_{n+1} = x_s + \varepsilon_{n+1} = F(x_n) \doteq F(x_s + \varepsilon_n)$$
$$= F(x_s) + F'(x_s)\varepsilon_n + \frac{1}{2}F''(x_s)\varepsilon_n^2 + \cdots \qquad (2.89)$$

则

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_s = F'(x_s)\varepsilon_n + \frac{1}{2}F''(x_s)\varepsilon_n^2 + \cdots \qquad (2.90)$$

由于 ε 很小，(2.90)写成

$$\varepsilon_{n+1} = F'_s\varepsilon_n \qquad (2.91)$$

或

$$\varepsilon_{n+1} = (F'_s)^n\varepsilon_1 \qquad (2.92)$$

所谓稳定性，自然要求经过迭代后的 ε 越来越小，因此离散映像的稳定性条件是

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| = |F'_s| < 1 \qquad (2.93)$$

也就是说，稳定不动点要求图 2.29 中 F 曲线在 S 处的斜率绝对值小于 1．如果 $|F'_s| > 1$，则 x_s 不可能是稳定的，如图 2.30 所示，稍许偏离 x_s 的值(如图中的 x_1)经过多次迭代后，越来越偏离 x_s，从而 x_s 是不稳定的．

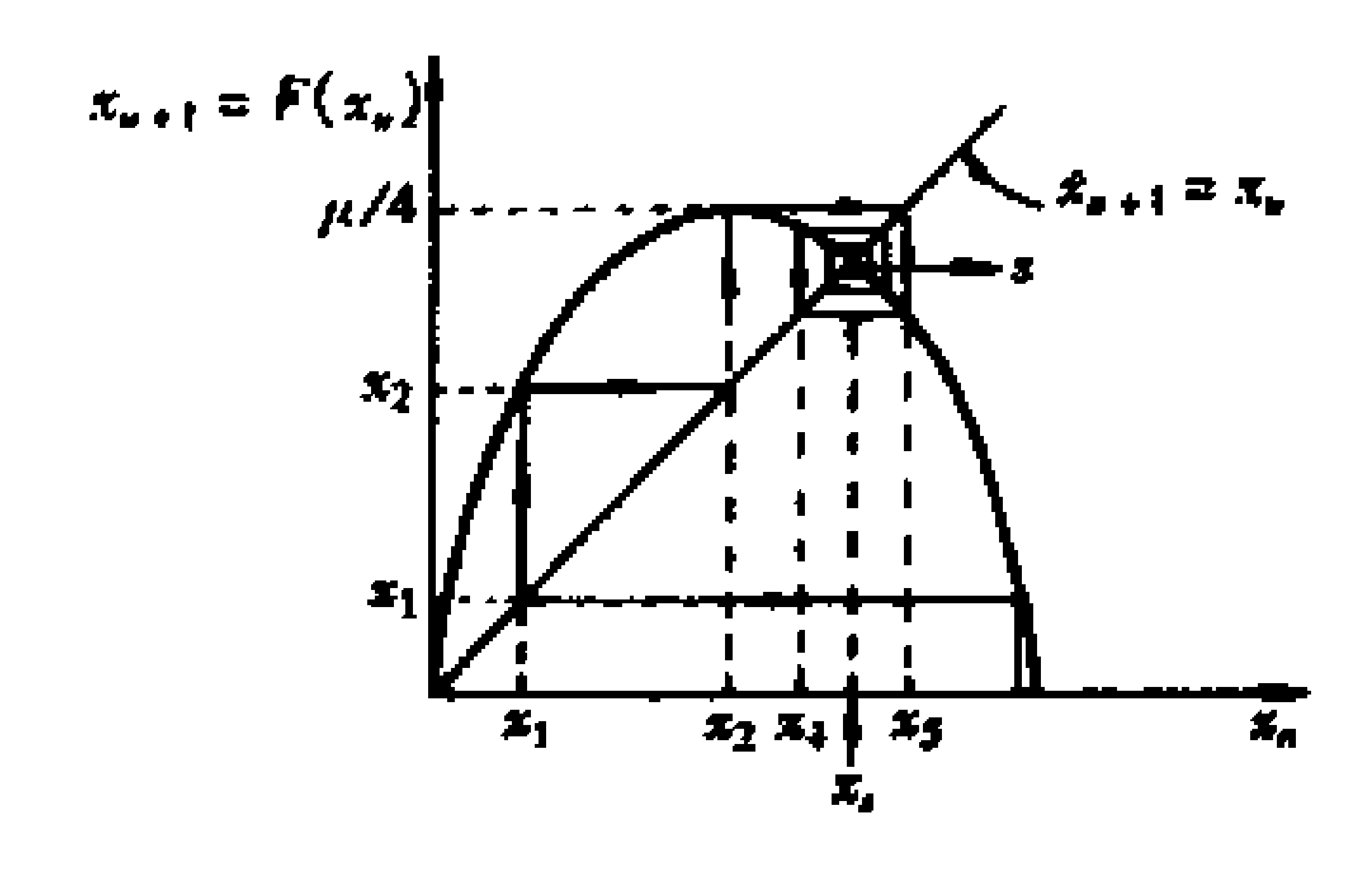


图 2.29　不动点 x_s 稳定情形

图 2.30　不动点 x_s 不稳定情形

对于由稳定到不稳定的临界情形：

$$|F'_s| = 1 \tag{2.94}$$

在式(2.90)中只保留 ε_n 的线性项就得不出相应的结论，这类似经典力学中所谓中立平衡的情形，这时必须考虑式(2.90)中的高次项.

对于逻辑斯谛映射(2.85)不动点条件为

$$x_s = \mu x_s(1 - x_s)$$

得

$$x_s = (\mu - 1)/\mu \tag{2.95}$$

临界条件(2.94)为

$$\mu - 2\mu x_s = \pm 1 \tag{2.96}$$

联立解(2.95)和(2.96)得

$$\mu = 1 \tag{2.97}$$

$$\mu = 3 \tag{2.98}$$

当 $\mu = 1$ 时，$x_s = 0$，所以 $\mu = 1$ 表示 x_s 由不稳定的负值过渡到稳定的正值.由于通常 x 取负值没有实际意义，这种临界情形可不予考虑.

当 $\mu = 3$ 时，不动点 x_s 由稳定过渡到不稳定，这时会出现分岔.

当 μ 比 3 大得不太多(具体说，$3 < \mu < 3.4494897$)时，单一不动点条件(2.88)不能满足，这时将交替出现两个状态，即

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n) \\ x_{n+2} = F(x_{n+1}) = F[F(x_n)] = F^{(2)}(x_n) = x_n \end{cases} \tag{2.99}$$

或

$$x_{n+2} = T(x_n) = x_n \tag{2.100}$$

式中 $T(x)$是复合函数：

$$T(x) = F^{(2)}(x) = F[F(x)] \tag{2.101}$$

$F^{(2)}$表示两次迭代，从而

$$T(x) = F^{(2)}(x)$$
$$= \mu^2 x[1-(1+\mu)x+2\mu x^2-\mu x^3] \qquad (2.102)$$

此结果可以从图 2.31 表示的 $x_{n+1}-x_n$ 关系或图 2.32 表示的 $x_{n+2}-x_n$ 关系清楚看出.图中 x_d 和 x'_d 表示交替出现的两个数值.

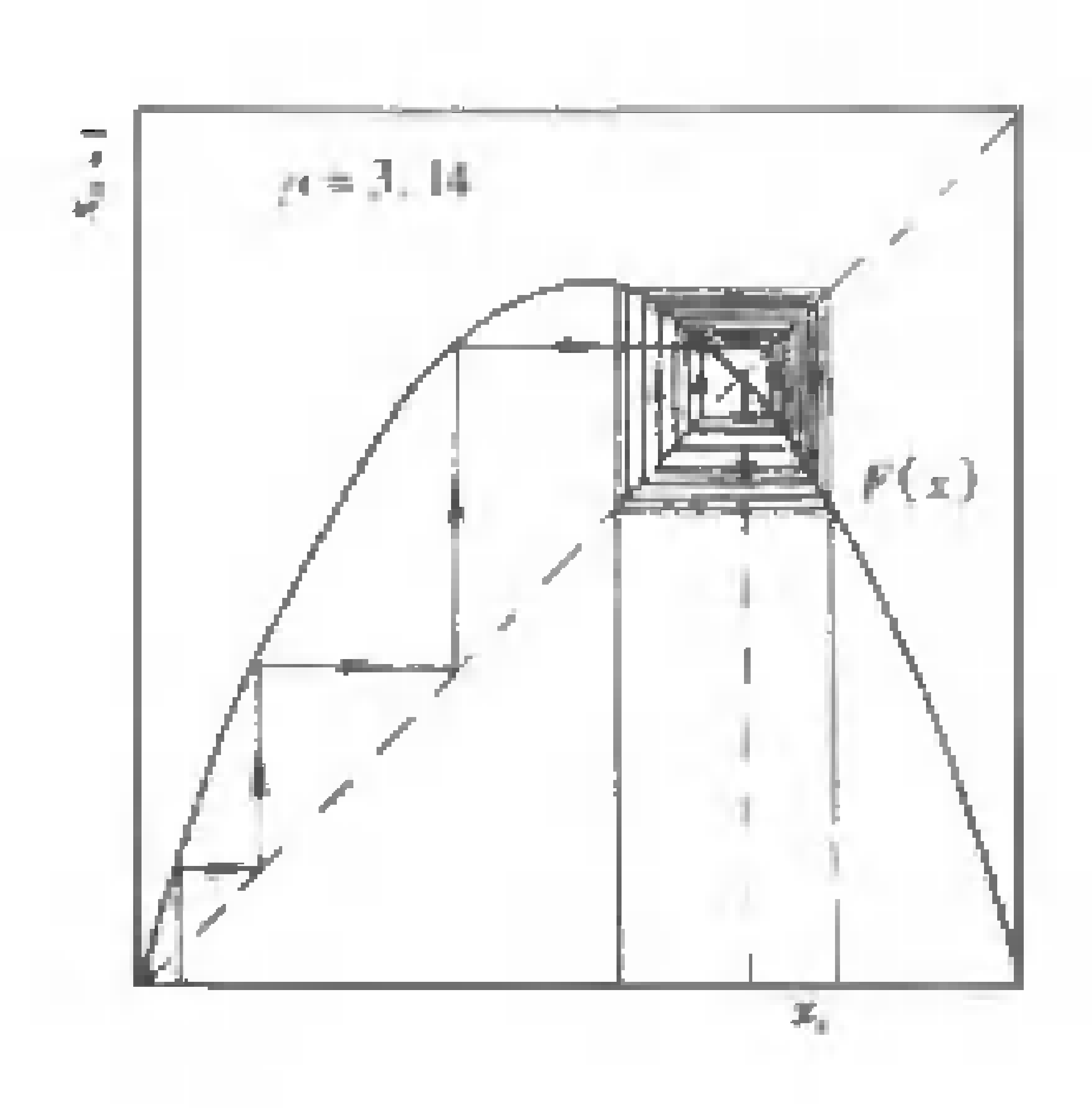


图 2.31 $x_{n+1}-x_n$ 关系图

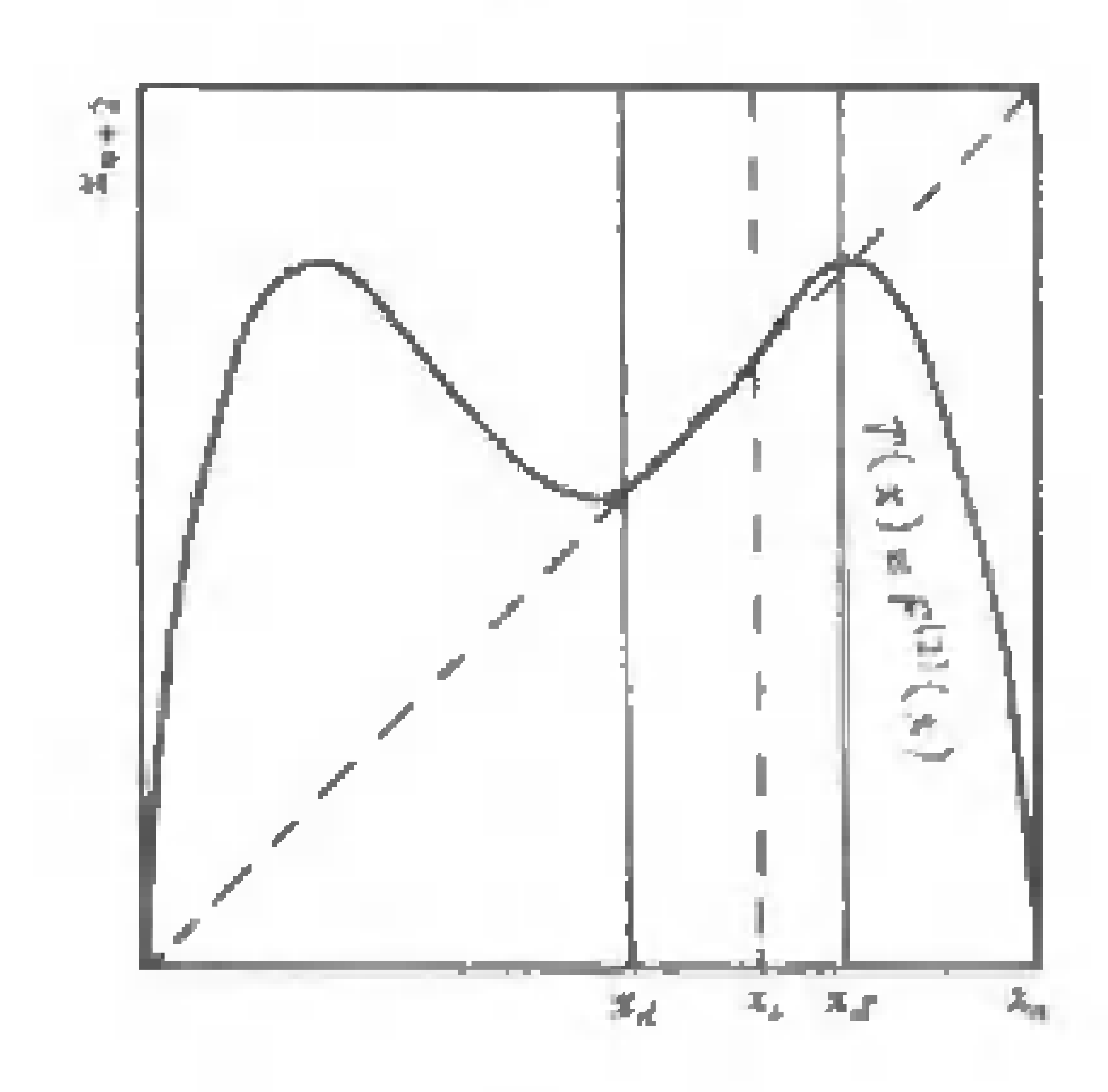


图 2.32 $x_{n+2}-x_n$ 关系图

与一个不动点是否稳定类似,两点周期也有是否稳定的问题,其稳定的条件是

$$|T'(x)| = |F^{(2)\prime}(x)| < 1 \tag{2.103}$$

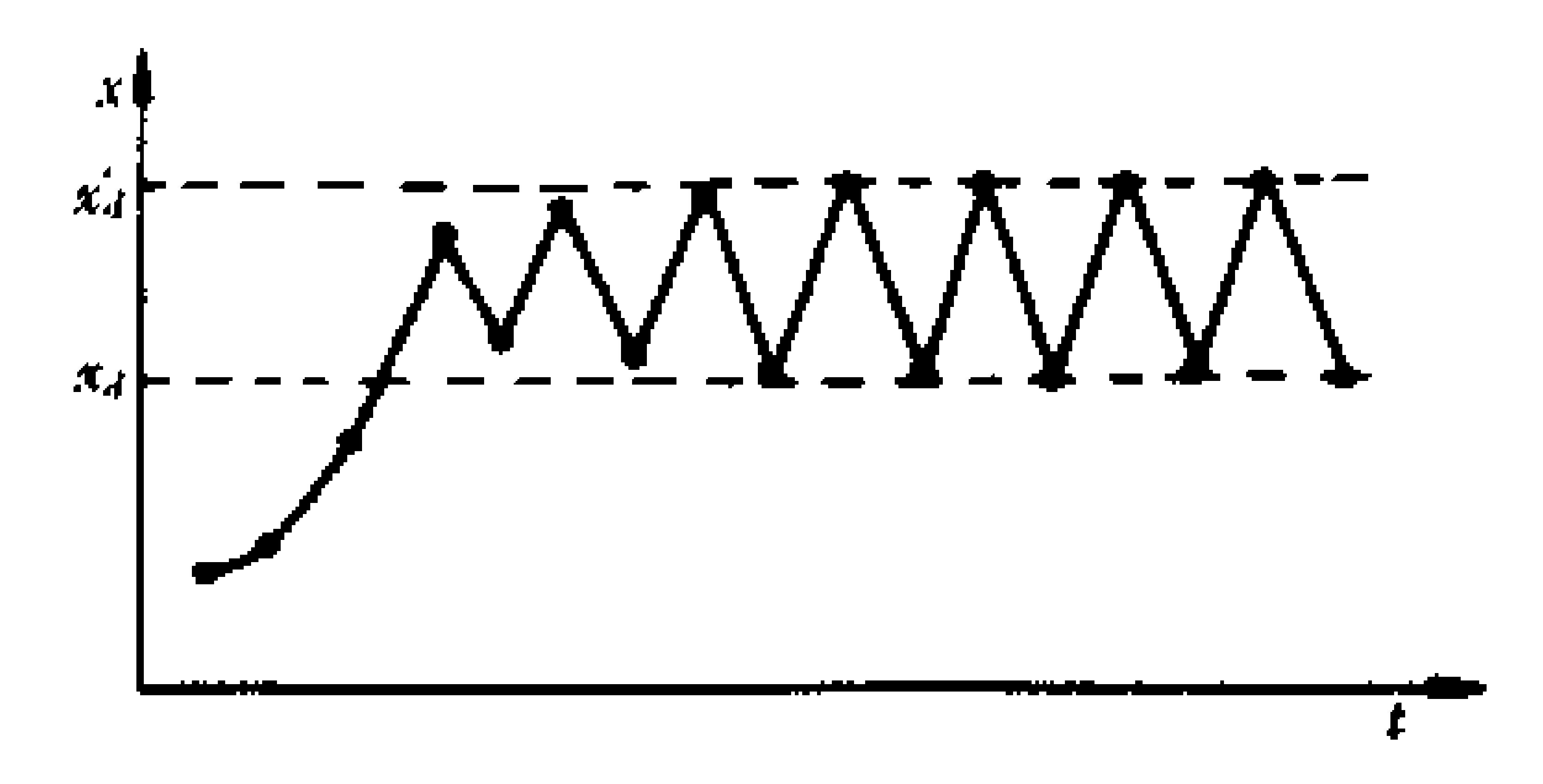


图 2.33 两点周期中数值随时间的变化(时间 t 不大时是暂态过程)

在两点周期的两个数值 x_d 和 x'_d 上,上式表示的导数值相等,因为

$$\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_n} = \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x}\right)_{x=x_n} = \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_{n+1}}\right)_{x=x_{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right)_{x=x_n}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_n} = \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_{n+1}}$$

即

$$\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_d} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x'_d} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_d} = \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x'_d} \tag{2.104}$$

所以 $F^{(2)}$ 在两点的导数相等,两点的稳定性相同.

对于逻辑斯谛映射(2.85),由式(2.102)可知其两点周期的不动点由下式决定:

$$\mu^2 x[1-(1+\mu)x+2\mu x^2-\mu x^3] = x \tag{2.105}$$

这是一个四次方程,它的四个根就是复合函数 $F^{(2)}$ 与分角线的四个交点(图 2.31,图 2.32).对于 $x=0$ 这个根,很易证明(当 $\mu>1$ 时)$T'>1$,因此它是不稳定的,还有一个根对应于不动点 x_t 也是不稳定的.剩下两点周期的两点 x_d 和 x'_d 之值可由下述方法求得.因为

$$x_d = \mu x'_d(1-x'_d), \quad x'_d = \mu x_d(1-x_d) \tag{2.106}$$

解得

$$x_d, x'_d = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \qquad (2.107)$$

由(2.107)和(2.104)得到在此两点的导数为

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = \mu^2(1 - 2x_d)(1 - 2x'_d) = -\mu^2 + 2\mu + 4 \qquad (2.108)$$

两点周期临界稳定的条件是

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = \pm 1 \qquad (2.109)$$

于是得到两点周期参数的临界值为

$$\mu_1 = 3 \text{ 当 } F'^{(2)} = 1 \qquad (2.110)$$

$$\mu_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.4494897, \text{当 } F'^{(2)} = -1 \qquad (2.111)$$

所以两点周期只可能是参数 μ,取值在(3,3.4494897)中出现,否则它是不稳定的.

当 $\mu > \mu_2$ 时又将怎样呢? 这时两点周期也不稳定了,但可能出现四点周期,即四个稳定点 x_1, x_2, x_3, x_4 交替出现,如图 2.34~2.36.

$$x'_{1+4} = F(x_4) = F[F(x_3)] = F\{F[F(x_2)]\}$$

$$= F\{F[F(F(x_1))]\} = F^{(4)}(x_1) \qquad (2.112)$$

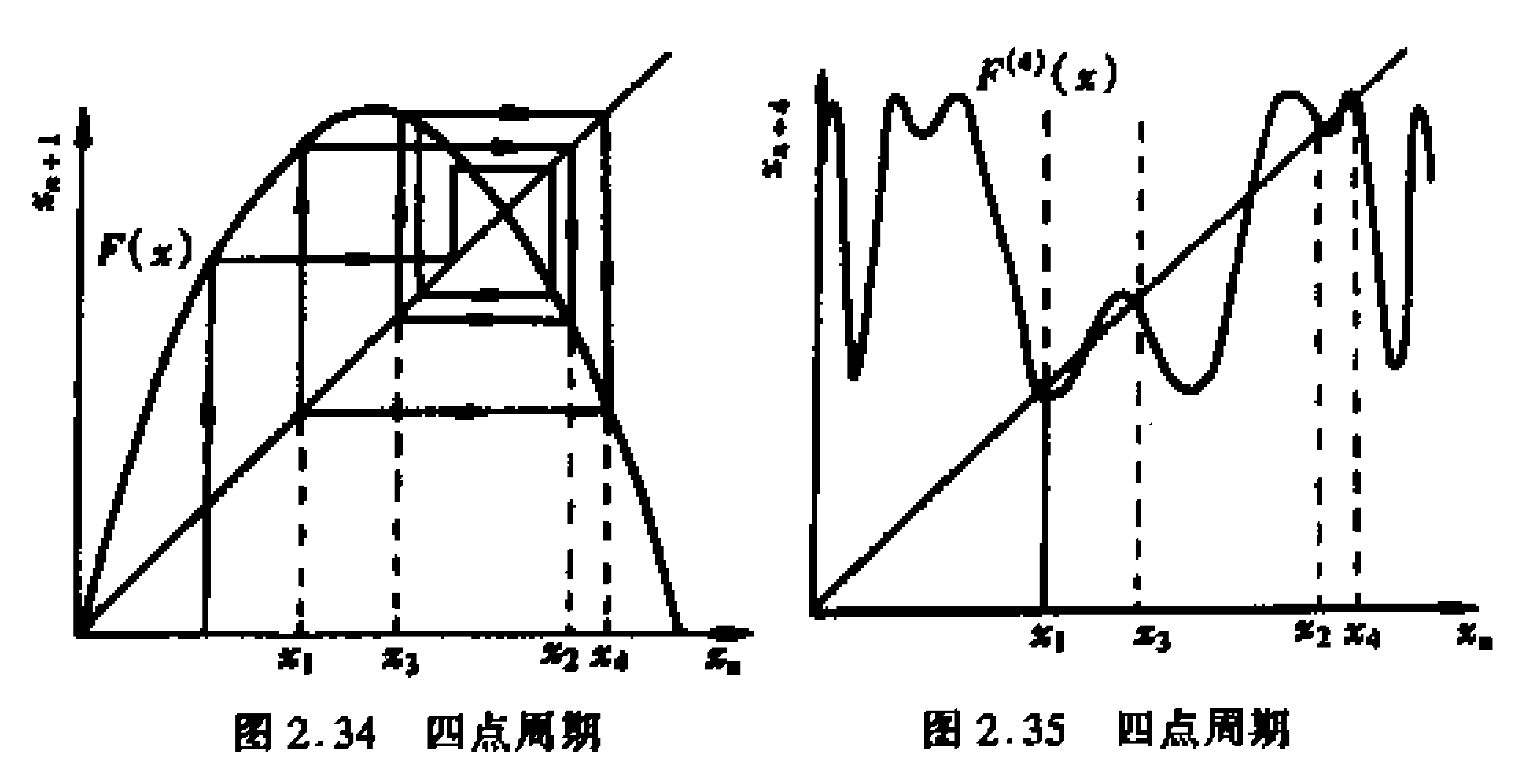


图 2.34 四点周期　　图 2.35 四点周期

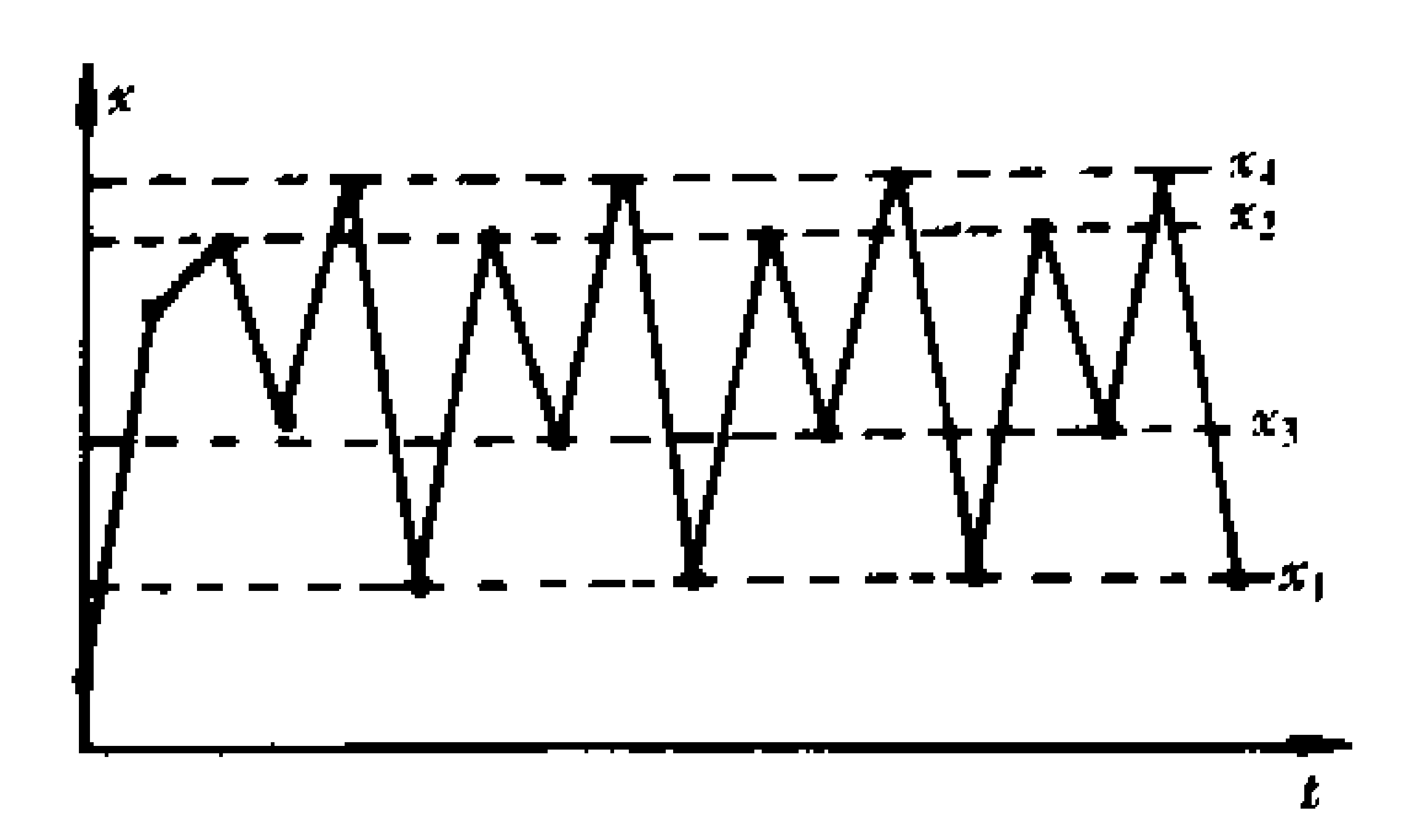


图 2.36 四点周期中 x 随时间变化

类似式(2.93),(2.103),(2.104),四点周期的稳定条件是:

$$|F'^{(4)}| = |F'(x_1)F'(x_2)F'(x_3)F'(x_4)| < 1 \quad (2.113)$$

而临界条件(分岔点)为

$$F'^{(4)} = F'(x_1)F'(x_2)F'(x_3)F'(x_4) = \pm 1 \quad (2.114)$$

以此类推,四点周期之后将相继出现 2^n 点周期($n=3,4,5,\cdots$).

类似上面诸式,我们有

$$F^{n\prime}_{(x)} = \underbrace{(F\{F[F\cdots F(x)]\})'}_{\text{共 } n \text{ 个 } F} = F'(x_1)F'(x_2)F'(x_3)\cdots F'(x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F'(x_i) \quad (2.115)$$

稳定条件是

$$|F^{n\prime}(x)| = \left|\prod_{i=1}^{n} F'(x_i)\right| < 1 \quad (2.116)$$

临界点(分岔点)则由 F 式决定:

$$|F^{n\prime}(x)| = \pm 1 \quad (2.117)$$

对于逻辑斯谛映射(2.85),其分岔点依次为

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
3.0	3.4494897	3.54409	3.56407
μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
3.568759	3.569692	3.569891	3.569934

上述这种依次出现周期加倍的现象就是倍周期分岔.

很明显,上表所列参数 μ 的临界值有收敛趋势.事实也的确如此,它们最后收敛到一极限值 μ_∞,此收敛序列可表为

$$\mu_n = \mu_\infty - \frac{c}{\delta^n} \qquad (n \gg 1 \text{ 时}) \tag{2.118}$$

式中 δ 就是费根鲍姆(Feigenbaum)普适常数

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_{k-1} - \mu_k}{\mu_k - \mu_{k+1}} = 4.66920 \tag{2.119}$$

$$\mu_\infty = 3.5699456 \tag{2.120}$$

$$c = 2.6327 \tag{2.121}$$

现在考察一个系统是否存在费根鲍姆普适常数(universal constant)已成为动力系统研究中的一个重要课题.

事实上由逻辑斯谛映射还可以得到另一个费根鲍姆普适常数 λ, 感兴趣的读者可参阅费根鲍姆[1978]和 Collet - Eckmann[1980]的文章.

此外,两相邻周期轨道之间的距离也是收敛的,如在 $x = 1/2$ 处轨道分岔的大小之比如图 2.37 趋于一常数:

$$d_n / d_{n+1} = -\alpha, \text{当 } n \gg 1 \text{ 时} \tag{2.122}$$

其中

$$\alpha \doteq 2.5029078751. \tag{2.123}$$

由上述可见 f_μ^k, $\mu \leqslant \mu_\infty$,不是混沌的动力系统,但判别 μ 取何值时 f_μ^k 是混沌的是一个相当困难的问题.我们可以通过计算机观察到离散映像中由倍周期分岔进入混沌的情况,即用计算机计算对应于每一参数 μ 的不动点 x 的值,然后适当选取参数 μ 的增量 $\Delta\mu$,用参数 μ 为横坐标,不动点 x 值为纵坐标作图,这样可得到图 2.38 的结果.由此图可见,当 $\mu < \mu_\infty$ 时,随着 μ 的增大,依次出现 2^n $(n = 1,2,3,\cdots)$ 周期分岔;当 $\mu > \mu_\infty$ 时,情况完全变了,这

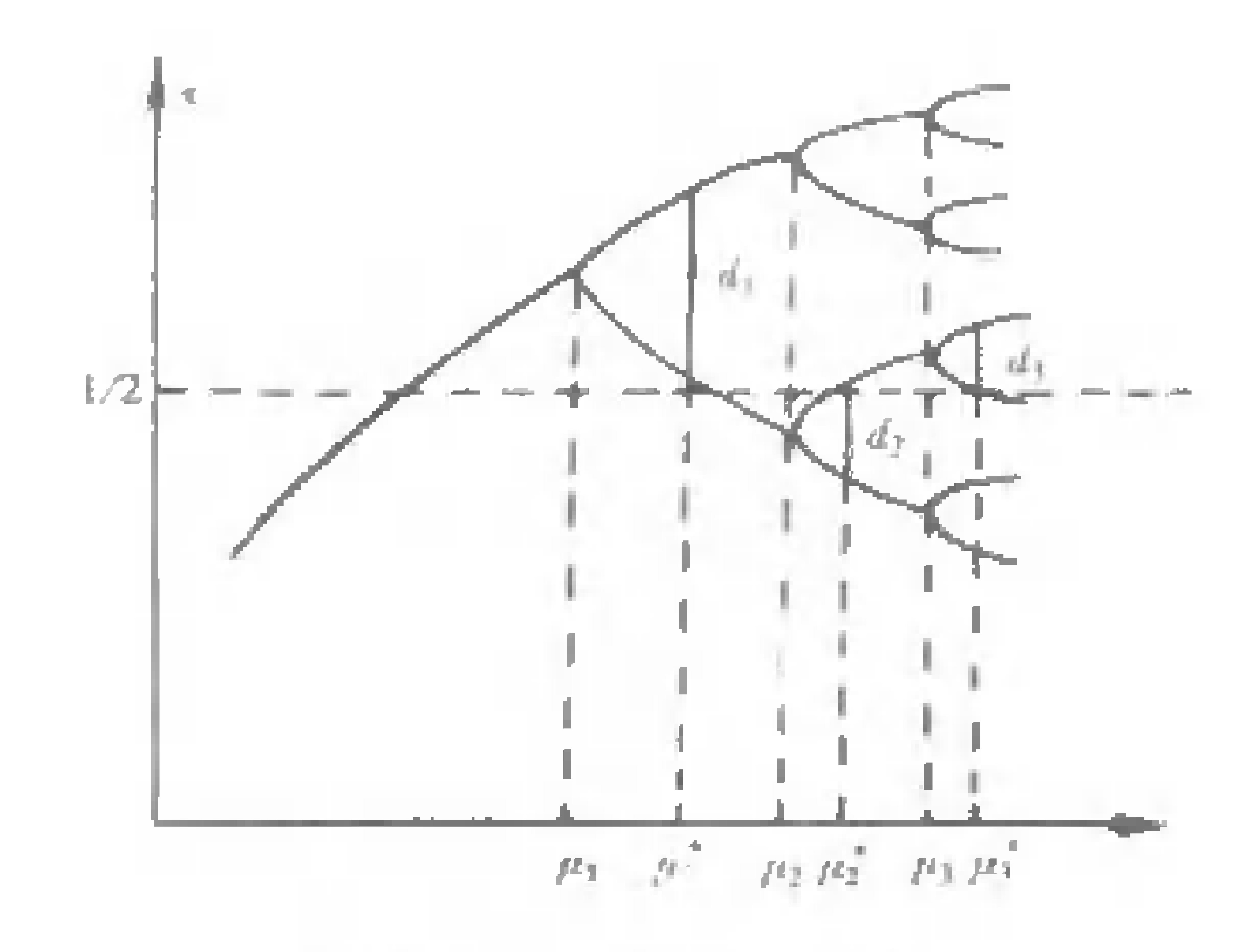


图 2.37 $x = 1/2$ 处轨道分岔

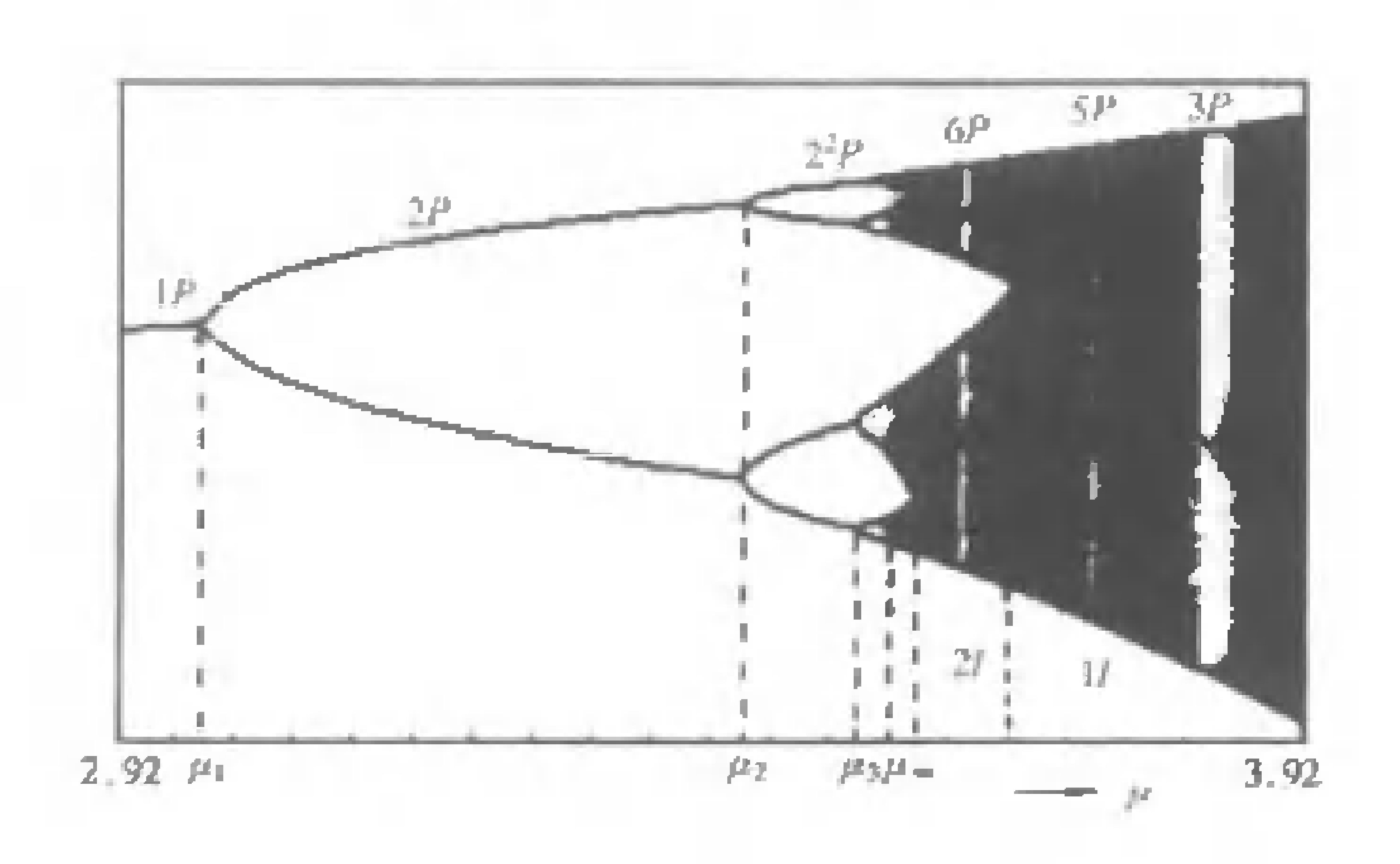


图 2.38 逻辑斯谛映像的倍周期分岔和混沌

时 x 取值是随机的,也就出现了混沌.所以 μ_∞ 是倍周期分岔到混沌的分岔点,也就是规则取值的周期序列区到混沌区的交界点.

必须注意,混沌区并不像白噪声那样完全混乱一片.首先由图 2.38 可见,在混沌区最右边,对参数 μ 的每一取值,x 的取值是连在一起的.由 μ 取值 3.676 处往左,x 的取值分成二个带.再往左,x 取值又分成四个带,如此下去,x 取值分成 8 个带,16 个

带，……，直到 μ_∞ 为止．也就是说，混沌区以与周期区相反的方向从右到左分为 $2^n(n=0,1,2\cdots)$ 个带．我们把这些混沌带分别称为 $1I,2I,4I,\cdots$（即 2^nI），混沌带．此处 I 表示相反(inverse) 或庞加莱映像中的岛(islands)，而用 $nP(n=0,1,2,\cdots)$ 表示 n 点周期，P 表周期(period) 或庞加莱映像中的点(points)．因此 μ_∞ 是周期序列 nP 和混沌带序列 nI 分别从两边相向收敛的共同极限．

如果把 x 和参数 μ 的尺度放大以便看出混沌区内的细节，可以发现，在混沌区内也还存在许多不是混沌的周期窗口．如 $\mu=3.83$ 附近的 $3P$ 窗口．$3P$ 往左依次还有 $5P,7P,9P,\cdots$ 窗口．在 $2I$ 区带内则依次有 $2\times3P,2\times5P,2\times7P,\cdots$ 窗口．在 $4I$ 带内则依次有 $4\times3P,4\times5P,4\times7P,\cdots$ 窗口．如此等等(图 2.39)，即混沌区内的周期窗口序列也是自右向左的．

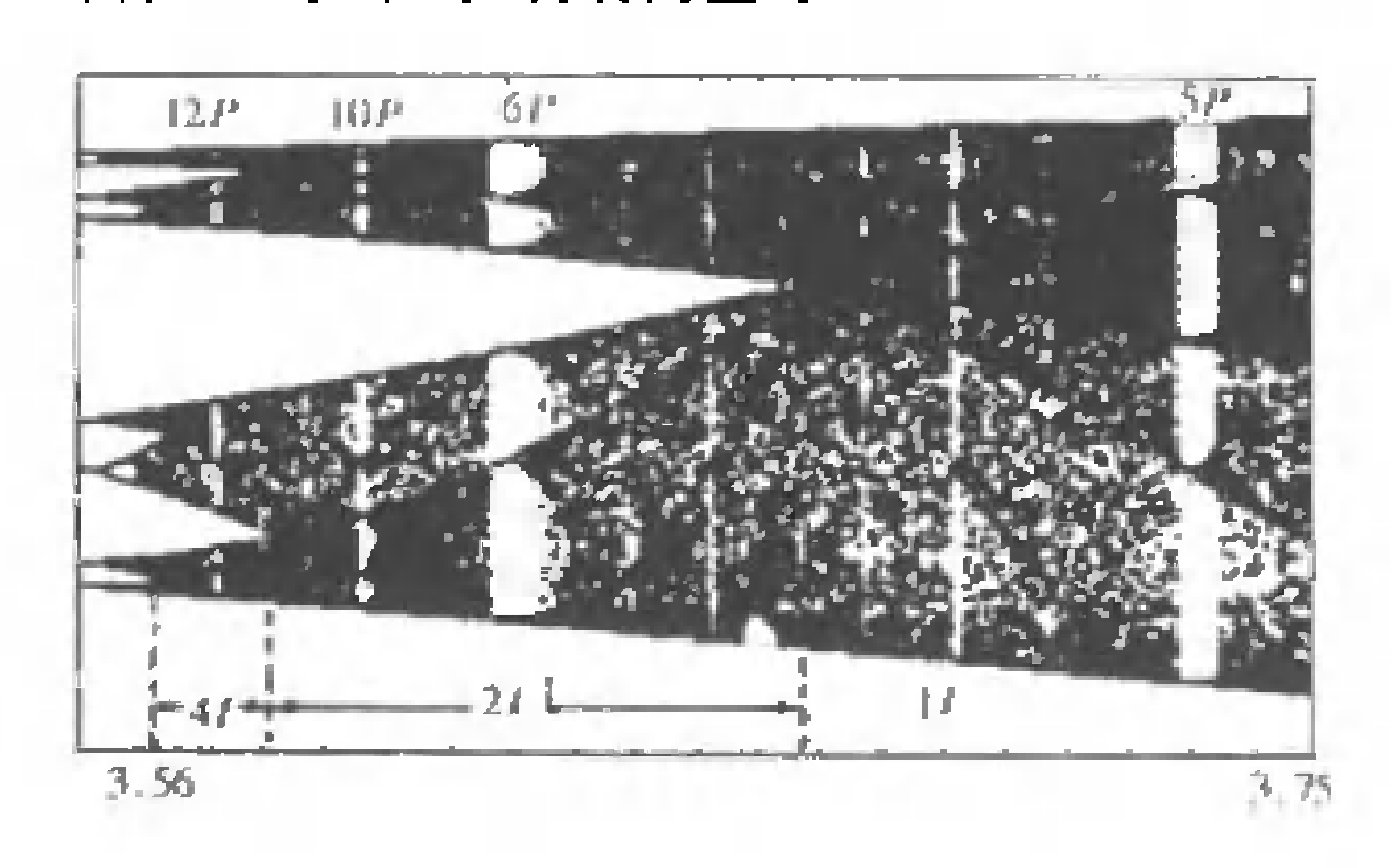


图 2.39 （图 2.38 部分放大）

根据 Sarkovskii 定理，如果一个映像有 $3P$ 周期，则它必定有全部更大的周期．当然，Sarkovskii 定理提出时(1964)，还不知道混沌的存在，因此定理中没有涉及混沌带的存在与编序．现在我们已经知道，在上述周期轨道序列中，起始的 $3,5,7,9,\cdots$ 诸周期轨道是嵌在 $1I$ 混沌带中的周期窗口，其次的 $2\times3,2\times5,2\times7,2\times9,\cdots$ 诸周期轨道是嵌在 $2I$ 混沌带中的周期窗口，而且由此引导李天岩

和约克(T. Y. Li, J. A. Yorke, 1975)得出一关于存在有混沌的简单判据,周期 $3P$ 意味着混沌. 当然,把此判据中的"周期 $3P$"改为"周期 $5P$"或"周期 $7P$"等非 2^nP 的周期,它仍然成立,因为这些周期轨道都是嵌在混沌区内的很窄的"窗口".

如果把周期窗口中某一部分放大还将发现,它也有与图 2.38 相同的精细结构,即它也包含有从左到右的倍周期分岔序列和从右到左的混沌带反序列. 图 2.40 就是把 $3P$ 的最上部放大的结果. 可以看出,这种二级结构与图 2.38 的一级结构完全一样. 因为图 2.40 中左边也是 $3P, 2\times 3P, 4\times 3P, 8\times 3P, \cdots$ 从左到右的周期分岔序列,右边也是从右到左的 $3I, 2\times 3I, 4\times 3I, 8\times 3I, \cdots$ 的混沌序列,而且在此二级混沌区中也还有从右到左的 $3\times 3P, 3\times 5P, 3\times 7P, 3\times 9P, \cdots$ 周期窗口.

如果把图 2.40 这种二级结构图的某一部分继续放大,如把其中的 $9P$ 的中部放大,又可得到同图 2.38 和图 2.40 完全一样的三级结构. 这样下去,可以不断地得到四级、五级、…… 结构. 由此可见,混沌带中存在着无穷层次的自相似结构. 这说明混沌与通常所说的随机过程还有着本质的区别.

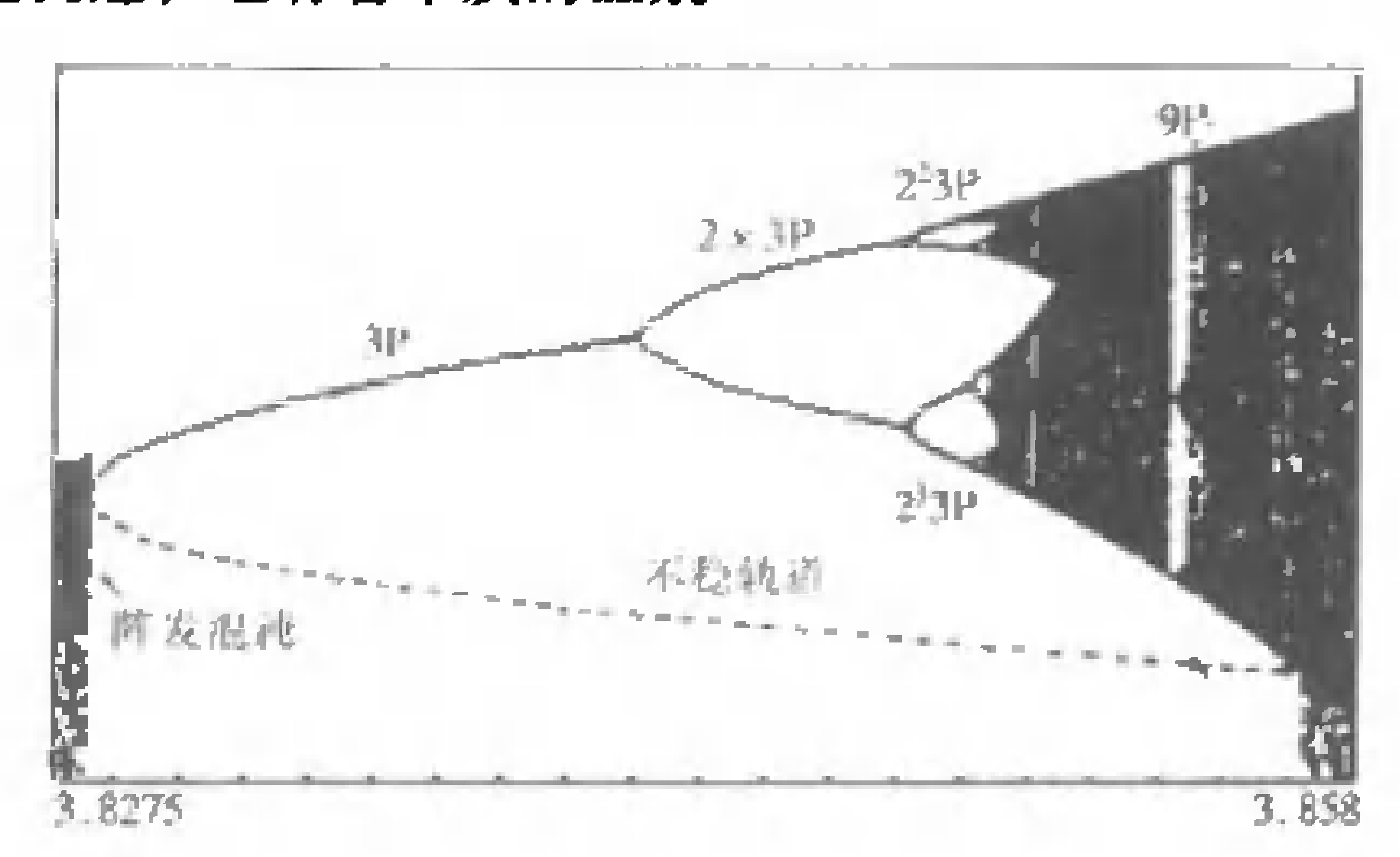


图 2.40　3P 中的精细结构

但是这类周期窗口和次级混沌带总是在参数变化不大时即发生了突变. 如图 2.40 中的 $3P$ 精细结构延伸到 $\mu = 3.8575$ 时,三个

二级混沌带突然又连成一个混沌带.这种由于参数连续变化而引起的混沌状态的突变被格瑞玻日(Grebogi,1993)称为混沌的危机(crisis).混沌危机的出现是由于不稳周期轨道(此处是由鞍-结点发出的不稳 $3P$ 轨道,如图2.40中的虚线所示)与次级混沌带相遇引起混沌带中的轨道充斥于各次级轨道之间.类似的危机(突变)也存在于二维和三维映像以及微分方程所描述的系统中.

对映像的较仔细的分析还可以使我们进一步了解混沌形成的过程.仍以逻辑斯谛映像为例,它把区间 $(0,1/2)$ 中的点映像到区间 $(0,\mu/4)$,把区间 $(1/2,\mu/4)$ 的点映像到区 $(\mu/4,\mu^2(4-\mu)/4^2)$(图2.41).区间 $(\mu/4,1)$ 的点映像到区间 $(\mu^2(4-\mu)/4^2,0)$,但由于 $\mu/4$ 是映像后可能取的最大值(参看图2.29),因此区间 $(\mu/4,1)$ 的进一步映像实际上不存在.当 $\mu>\mu_\infty=3.57$ 时,区间 $(0,1/2)$ 中的点映像后总是互相排斥分开,而区间 $(1/2,\mu/4)$ 中的点 x 值越大,映像后反而越变小,即映像相当于折叠作用(图2.41).这样连续映像便使点不断分离和折叠,映像点最后都集中在区间 $(\mu/4,\mu^2(4-\mu)/4^2)$ 内.也就是说映像最后只是在此区间内各点间反复迭代,这样映像点便可能形成复杂的看来不是规则的(即无序的)混沌.

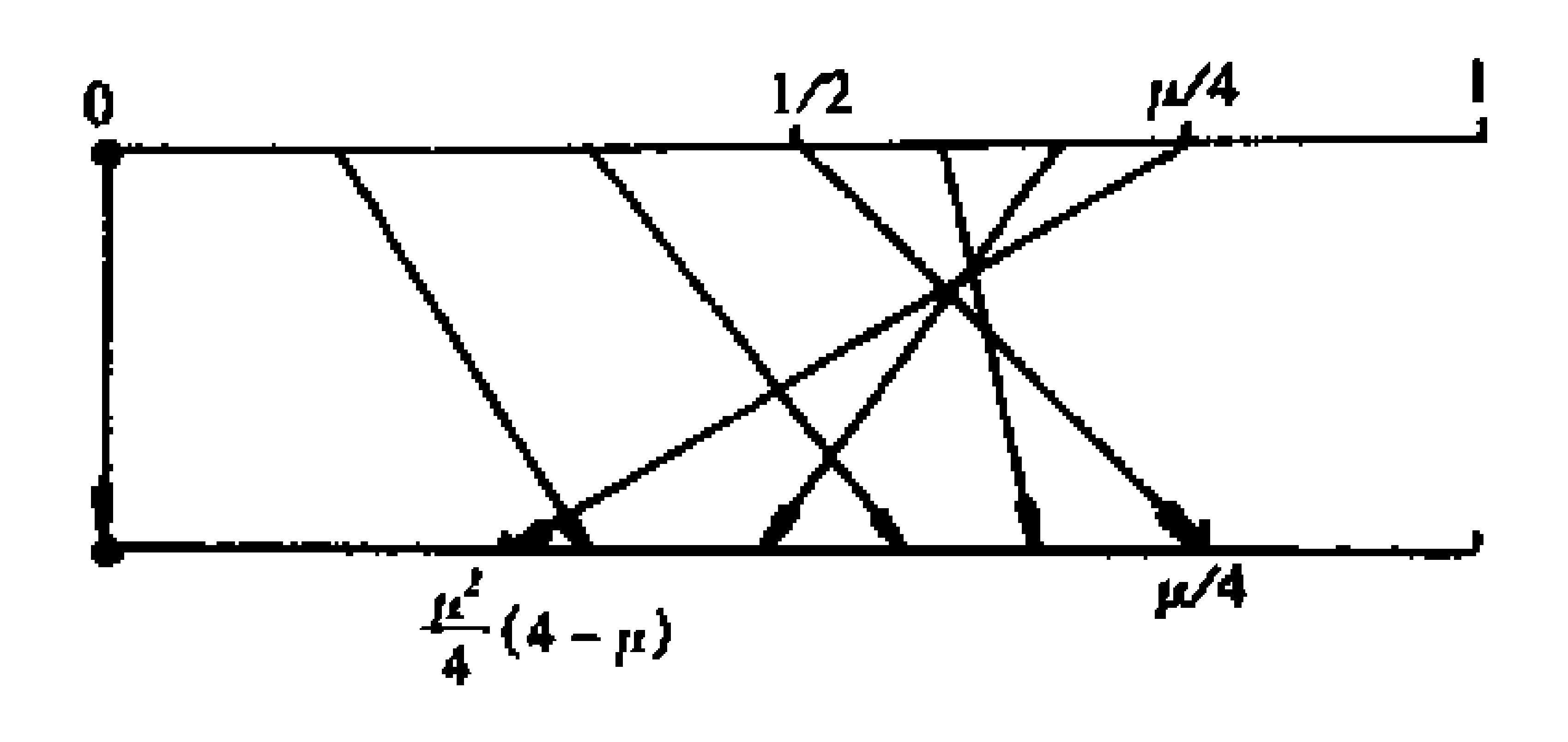


图2.41

§2.2.2 单位符号动力系统和逻辑斯谛映射

现在我们将建立一种动力系统以便我们能把一些动力系统的性态,特别是混沌性态,看得更清楚些.让我们先引进集合:

$$\sum = \{(s_0 s_1 s_2 \cdots) \mid s_i = 0 \text{或者} 1\},$$

即 Σ 的元素是一列符号 $(s_0 s_1 s_2 \cdots)$，再在 Σ 上建立距离 $d: \sum \to R$ 适合

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}, \quad \forall s = (s_0 s_1 \cdots),$$

$$t = (t_1 t_2 \cdots) \in \sum$$

可以验证，d 是 Σ 上的距离，即 Σ 成为度量空间. 现在 Σ 上建立左移映射 $\sigma: \Sigma \to \Sigma$，使得

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 s_3 \cdots), \forall (s_1 s_2 s_3 \cdots) \in \sum$$

从而我们称 $\sigma^k (k \in Z_+): \Sigma \in \Sigma$ 为单边符号动力系统，这个系统不是在 R^n 上定义而是在一度量空间上定义. 为了对此有更好的了解，我们需要下列命题.

定理 2.12 (i) 设 $t, s \in \Sigma$, $t = (t_0 t_1 t_2 \cdots)$, $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots)$. 若 $t_k = s_k$, $k = 0, \cdots, n$，则 $d(s,t) \leqslant 1/2^n$. 反之若 $d(s,t) < 1/2^n$，则 $t_k = s_k$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

(ii) 左移映射 $\sigma: \Sigma \to \Sigma$ 是连续的.

证明 (i) 若 $s_k = t_k$, $k \leqslant n$，则

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

但另一方面，若 $d(s,t) < \dfrac{1}{2^n}$，则存在 $k \leqslant n$，使得 $s_k \neq t_k$，$\dfrac{1}{2^n} > d(s,t) \geqslant |s_k - t_k| / 2^k = \dfrac{1}{2^k} \geqslant \dfrac{1}{2^n}$，矛盾.

(ii) 对任意 $\Sigma > 0$ 和 $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \in \Sigma$，取 $\delta = \dfrac{1}{2^{n+1}}$，其中满足 $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$，从而若 $t = (t_0 t_1 t_2 \cdots) \in \Sigma$ 适合 $d(s,t) < \delta < \dfrac{1}{2^{n+1}}$，

则由(i),得 $s_k = t_k, k \leqslant n+1$,所以有 $d(\sigma(t),\sigma(s)) \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

现在我们希望用左移映射 $\sigma: \Sigma \to \Sigma$ 来刻画逻辑斯谛映射 $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, \mu > 2$. 随着 $\mu > 2$ 的增长,函数 f_μ 的图像变得越来越陡,事实上这也就是系统对初值的依赖越来越敏感.

对于 $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, \mu > 2$,在 §2.2.1 中已给出其另外一种表现形式为 $F_a(x) = ax(1-x), a > 4$. 为了使得我们所讨论的问题与 Cantor 三分集更密切地联系在一起,我们将讨论逻辑斯谛映射 $F_a(x) = ax(1-x), a > 4$.

这里我们所感兴趣的是,给出 F_a 的混沌不变集,以及讨论 F_a 在此集上的性态.

由于 0 是 F_a 的不稳定的不动点,$F'_a(x) \geqslant a > 4$,对于 $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ 以及 $F_a((x_-,x_+)) \subset (1,\infty)$,所以有

$$|F_a^k(x)| \to \infty \quad (k \to \infty)$$

$$\forall x \in (-\infty,0) \cup (x_-,x_+) \cup (1+\infty) \qquad (2.124)$$

这里

$$x_\pm = (1/2)(1 \pm \sqrt{1-4/a})$$

记

$$I_0 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4/a}\right], I_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4/a}\right]$$

见图 2.42,则 F_a 的不变集必然在 $I_1 \cup I_0$ 中. 事实上,根据(2.124)我们不难看到 F_a 的不变集为

$$A = \{x \in I_1 \cup I_0 \mid F_a^n(x) \in I_1 \cup I_0, \forall n \in N\}$$

$$= \{x \mid F_a^n(x) \in [0,1], \forall n \in N\} \qquad (2.125)$$

若记

$$F_a^{-n}([0,1]) = \{x \mid F_a^n(x) \in [0,1]\}, \quad n \in N$$

则

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_a^{-n}([0,1]) \tag{2.126}$$

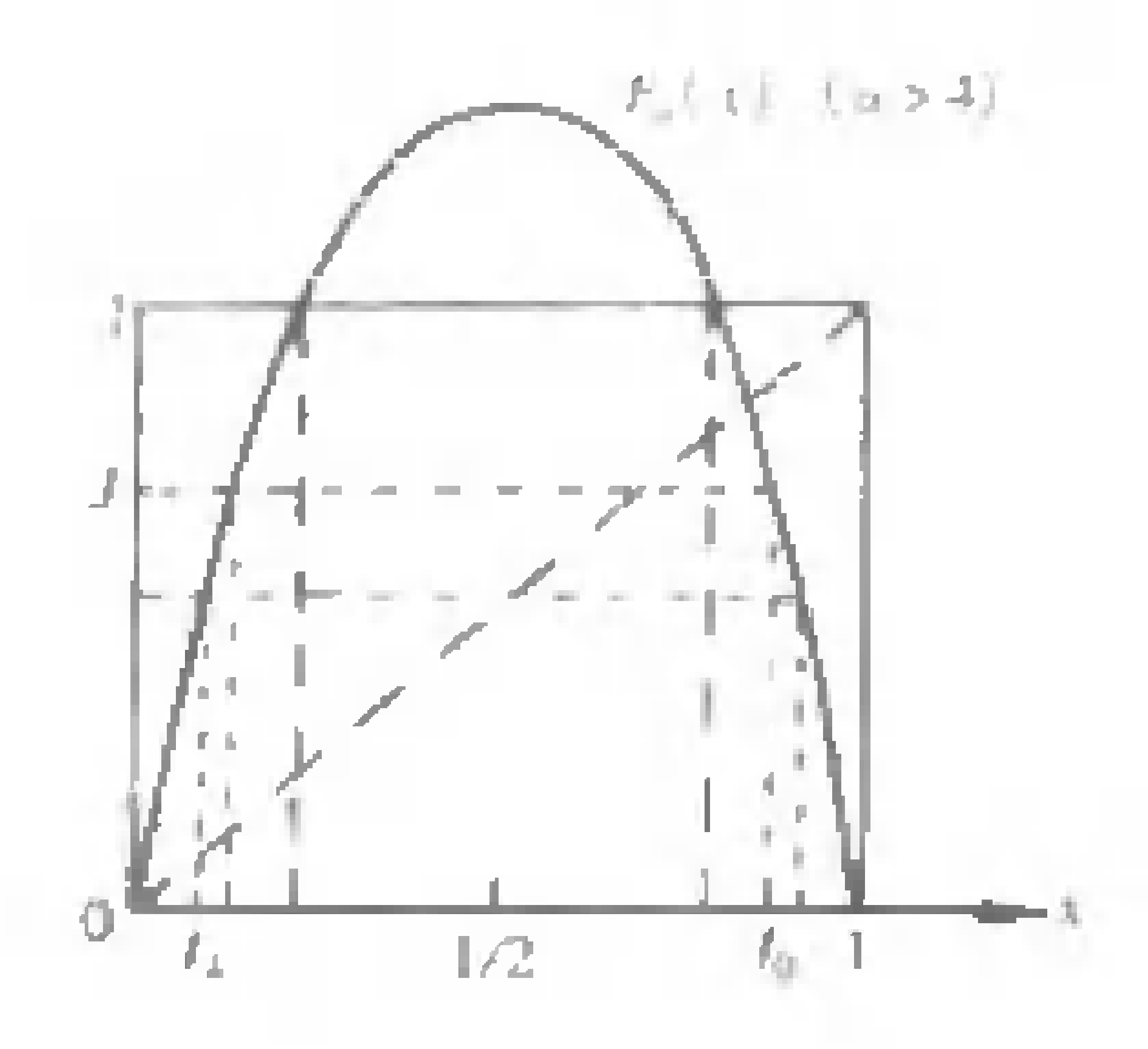


图 2.42　区间 I_1 和 I_0 中的 $F_a(x)$ 曲线

由此对比一下 Cantor 三分集的构造不难看出，A 的构造也几乎是一样的，只不过这里不是对区间进行三等分.

下面我们建立映射 $T: A \to \Sigma$:

$$T(x) = (s_0 s_1 \cdots s_n \cdots) \in \sum, \text{对于 } x \in A$$

其中

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } F_a^n(x) \in I_1 \\ 1, & F_a^n(x) \in I_0 \end{cases}$$

其中

$$F_a^n(x) = x \tag{2.127}$$

定理 2.13　$T: A \to \Sigma$ 是同胚.

证明　首先，我们证明 A 中不同点的像是不相同的. 事实上，任取 $x, y \in A$, $x \leqslant y$. 若 $T(x) = T(y)$，则对任意 $n \geqslant 0$,

$F_a^n(x), F_a^n(y)$ 同属于区间 I_0，或者 I_1. 由于 F_a 在 I_0 和 I_1 上都是单调的，所以 $\forall z \in [x, y]$ 都有 $F_a^n(z) \in I_0 \cup I_1$. 这意味着 $[x, y] \subset A$，而由 A 的构造不难看出，它同 Cantor 三分集一样，是不断地把 $[0,1]$ 剩下来的区间分成三部分，去掉中间开的部分而得到的，即 A 不可能含有区间，所以 $x = y$.

其次，我们证明 $T(A) = \Sigma$.

对任一间区间 $J \subset [0,1]$，记 $F_a^{-n}(J) = \{x \in [0,1] \mid F_a^n(x) \in J\}$，如图 2.42 所示. $F_a^{-n}(J)$ 所含的二个闭区间分别含在 I_0 和 I_1 中. 注意到这一点，我们任取 $s = (s_0 s_1 \cdots s_n \cdots) \in \Sigma$，且定义

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \cdots s_n} &= \{x \in [0,1] \mid x \in I_{s_0}, F_a(x) \in I_{s_1}, \cdots, F_a^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_a^{-1}(I_{s_1}) \cap \cdots \cap F_a^{-n}(I_{s_n}) \end{aligned}$$

由于 $I_{s_0} \cap F_a^{-1}(I_{s_1})$ 是单个闭区间，而

$$I_{s_0 s_1 \cdots s_n} = I_{s_0} \cap F_a^{-1}(I_{s_1 s_2 \cdots s_n})$$

由数学归纳法得 $I_{s_0 s_1 \cdots s_n}$ 依然是单个闭区间，注意到

$$I_{s_0 s_1 \cdots s_n} \supset I_{s_0 s_1 \cdots s_n s_{n+1}}$$

由闭区间套定理，必存在 $x \in \bigcap_{n \geqslant 0} I_{s_0 s_1 \cdots s_n}$，这也就是说

$$T(x) = (s_0 s_1 \cdots s_n \cdots)$$

最后，我们证明 T 的连续性. 任取 $x \in A$，设 $T(x) = (s_0 s_1 \cdots s_n \cdots)$. 任意 $\varepsilon > 0$，取 n 充分大使得 $1/2^n < \varepsilon$，由于 F_a 在 $[0,1]$ 上连续，所以存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - y| < \delta, y \in A$ 时有 $|F_a^k(x) - F_a^k(y)| < \sqrt{1 - 4/a}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

这意味着 $F_a^k(x), F_a^k(y) (k = 0, \cdots, n)$ 同属于 I_0 或者 I_1. 从而可以写成

$$T(x) = (s_0 s_1 s_2 \cdots s_n s_{n+1)} \cdots), T(y) = (s_0 s_1 \cdots s_n s_{n+1} \cdots)$$

由此得

$$d(T(x),T(y)) \leqslant \frac{1}{2^n} < \epsilon, \forall y \in A, |x-y| < \delta$$

所以 T 是连续的，当然，我们还容易证明 $T^{-1}: \Sigma \to A$ 是连续的，所以 T 是同胚.

下面我们来研究 F_a 与 σ 之间的关系.任取 $x \in A$，设 $T(x) = (s_0 s_1 \cdots s_n \cdots)$. 由 T 的定义有

$$T(F_a(x)) = (s_0 s_1 \cdots s_{n+1} \cdots) = \sigma(T(x))$$

这也就是

$$F_a = T^{-1} \sigma T, \qquad A \to A$$

$$\sigma = T F_a T^{-1}, \qquad \sum \to \sum$$

所以 $F_a|_A$ 与 σ 拓扑等价的，这意味着这两个映射在本质上是一样的. 对 $F_a|_A$ 的研究完全可以转化为对左移映射 σ 的研究，而 σ 是如此的简单明了，以至我们能把它的各种轨道都看得非常清楚. 例如 σ 的不动点：(000…) 和(111…)

σ 的周期 2 轨道为

{(010101…),(101010…)}

σ 的周期 3 轨道为

{(001001…), (010010…), (100100…), {(110110…), (101101…),(0110110…)}

更一般地，F_a^n 有 2^n 个不动点.

$$(s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_0 s_1 \cdots s_{n-1} \cdots), s_i \in \{0,1\}, i = 0, \cdots, n-1$$

不难看到 σ 的周期轨道的全体组成的集合在 Σ 中稠密，因为任取 $s = (s_0 s_1 \cdots s_n s_{n+1}) \in \Sigma$，有周期点 $(s_0 s_1 \cdots s_n s_0 s_1 \cdots s_n \cdots)$ 使得

$$(s_0 s_1 \cdots s_n s_0 s_1 \cdots s_n \cdots) \to (s_0 s_1 \cdots s_n s_{n+1} \cdots), (n \to \infty)$$

事实上，Σ关于 σ 是拓扑可迁的.若取 $s\in\Sigma$ 如下

$$s=(\overbrace{01}^{\text{所有的 }s_0}\underbrace{00011011}_{\text{所有的 }s_{-1}s_0s_1}\cdots\underbrace{\overbrace{0\cdots0}^{n}\cdots s_0s_1\cdots s_n\cdots\overbrace{1\cdots1}^{n}}_{\text{所有的 }s_0s_1\cdots s_n}\cdots)$$

从而任意 $t=(s_0s_1\cdots s_ns_{n+1}\cdots)\in\Sigma$，则必存在 k 使得$\sigma^k(s)=(s_0\cdots s_n\cdots)$ 从而得 $d(\sigma^k(s),t)\leqslant\frac{1}{2^n}$.

由于 n 可以事先取任意大，以及由 t 的任意性得，以 s 为初值的轨道在Σ中稠密，因此Σ关于 σ 是拓扑可迁的.

下面我们还将看到 σ 在Σ上关于初值有敏感的依赖性，事实上，任取 $s,t\in\Sigma$.若 $s=(s_0\cdots s_n\cdots)\neq t=(t_0\cdots t_n\cdots)$，则必存在 n 使得 $s_n\neq t_n$，从而由 $\sigma^n(s)=(s_ns_{n+1}\cdots)$，$\sigma^n(t)=(t_nt_{n+1}\cdots)$得

$$d(\sigma^n(s),\sigma^n(t))\geqslant|t_n-s_n|=1$$

所以Σ是 σ 的混沌不变集

注意到 $F_a|_A$ 与 σ 拓扑等价.由上面所述，我们实际上已证明了下面的定理.

定理 2.14 设 $a>4$，则 A 是F_a 的混沌不变集，F_a 的所有周期点组成的集在 A 中稠密，且 A 关于 F_a 是拓扑可迁的.

最后，我们注意到在定理 2.13 的证明中若用 Cantor 三分集代替其中的 A，且用函数 $f(x)=\frac{3}{2}-3\left|x-\frac{1}{2}\right|$ 代替 F_a，则同样有 Cantor 三分集与 Σ 同胚，从而有下述定理.

定理 2.15 Cantor 三分集与 A 同胚.

按照广义的说法，把同 Cantor 三分集同胚的集合都称为 Cantor 集，所以我们可以称 A 为 Cantor 集.

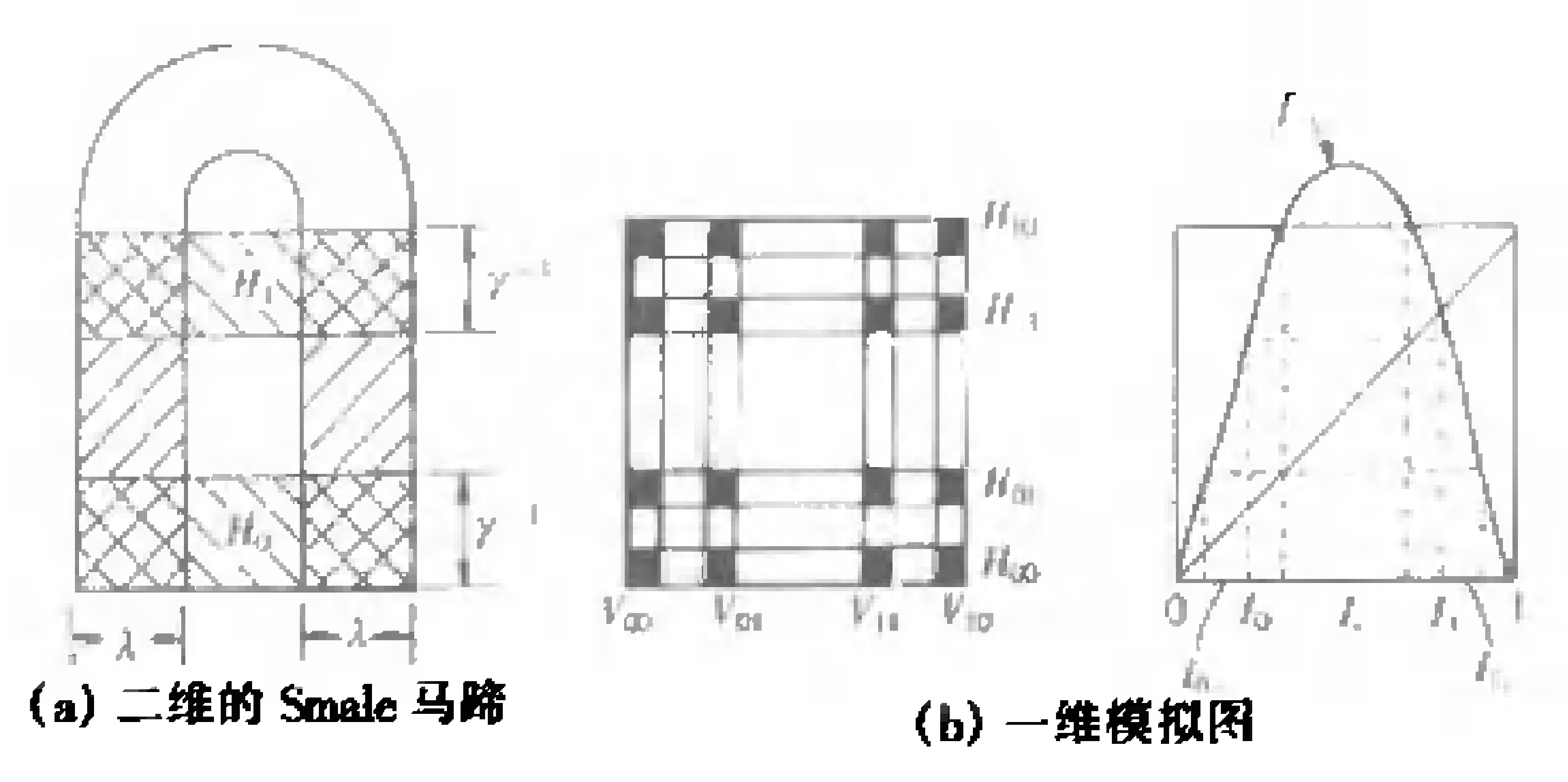
§2.3 Smale 马蹄和双边符号动力系统

在 §2.2.1 和 §2.2.2 中我们介绍了逻辑斯谛映射的混沌性

态，其实逻辑斯谛映射也就是以抛物线作为图像的一维映射．它的本质是其图像中出现了一个峰．而抛物线并不是本质的．人们往往能在单峰映射中找到与逻辑斯谛映射几乎一样的混沌性态．现在我们将 §2.2.2 中的思想运用到二维映射中，对一类充分"陡"的二维映射利用符号动力系统来寻找其各种混沌性态，并刻画其混沌不变集，这个不变集就是我们下面要讲到的 Smale 马蹄(horseshoe)．从历史上看 Smale 马蹄早在人们认识逻辑斯谛映射之前就出现了(见 Smale[1963])．它在混沌理论的发展中起了至关重要的作用．

下面给出 Smale 马蹄的构造．

令 $s=[0,1]\times[0,1]\subset R^2$．定义映射 $F: s\rightarrow R^2$ 如图 2.43



(a) 二维的 Smale 马蹄　　(b) 一维模拟图

图 2.43

所示，使得 $F, s\rightarrow F(s)$ 是可逆的，F 在两水平带 H_1 和 H_2 上是线性的，它们的像分别为二铅垂带 V_1 和 V_2，$F(s)$ 就是图 2.43(a) 中的宽度为 λ 的马蹄，由图中可见 F 满足条件

$$DF(x)\mid_{x\in H_0}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix},\quad DF(x)\mid_{x\in H_1}=\begin{pmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\tag{2.128}$$

其中 $0<2\lambda<1<\gamma/2$，即 F 在水平方向把 H_i 压缩 λ 倍，而在铅

垂方向上则把 H_k 拉长 γ 倍，定义 Smale 马蹄

$$A = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(s) \qquad (F^0(s) = s) \qquad (2.129)$$

则显然，A 是 F 和 F^{-1} 的不变集，从而 F^k 和 F^{-k} 都是 A 上动力系统，从而 F 在 A 上生成双边的动力系统.（注意逻辑斯谛映射是不可逆的，所以不可能生成双边的动力系统）

由于 $F^{-1}(s)\cap s = H_0\cap H_1$，以及 $s\cap F(s) = V_0\cup V_1$，则 $F^{-1}(s)\cap F^0(s)\cap F(s)$ 是四个高为 δ^{-1}，宽为 λ 的矩形之并，类似地 $\bigcap_{K=-2}^{2} F^k(s)$ 是16个高为 γ^{-2}，宽为 λ^2 矩形之并(见图2.43). 依次推得 $\bigcap_{n=-k}^{2} F^n(s)$ 是 4^k 个高为 γ^{-k}，宽为 λ^k 的矩形之并，从而 A 是一个紧的、完全不连通的 R^2 中的子集.

定理 2.15(Hocking - Young[1961]) 任何紧的、完全不连通的距离空间都同胚于 Cantor 三分集.

由于 A 是 Cantor 集，同 §2.2.2 中一样，我们将把 $F:A\to A$ 转化成左移映射 $\sigma: \Sigma\to\Sigma$，其中

$$\sum = \{(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n\cdots) \mid s_k = 0 \text{ 或者 } 1\}$$

通常我们称 $\sigma^k: \Sigma\to\Sigma$ 为双边符号动力系统(这里 $k\in Z$). 由于 Σ 中序列是双向无限的，为了明确起见，我们定义

$$T(x) = (\cdots T_{-k}(x)\cdots T_{-1}(x)T_0(x)T_1(x)\cdots T_k(x)\cdots), x\in A,$$

其中 $T_j(x) = i$，若 $F^j(x)\in H_i$，$(i = 0,1, j\in Z)$ 从而

$$T_j(F(x)) = T_{j+1}(x) = \sigma(T_j(x)) \qquad (\sigma \text{ 向左移})$$

$$T_j(F^{-1}(x)) = T_{j-1}(x) = \sigma^{-1}(T_j(x)) \qquad (\sigma^{-1} \text{ 向右移})$$

另一方面，在 Σ 上定义距离

$$d(s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |s_k - t_k| / 2^{|k|}$$

其中 $s=(\cdots s_{-k}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_k\cdots)$，$t=(\cdots t_{-k}\cdots t_{-1}t_0t_1\cdots t_k\cdots)\in\Sigma$，则$\Sigma$成为度量空间，同§2.2.2 中一样 $T:A\to\Sigma$是同胚．从而有$F(x)=T^{-1}\sigma T(x)$，$F^{-1}(x)=T^{-1}\sigma^{-1}T(x)$，即 F 与σ 拓扑等价，从而同§2.2.2 一样，双边动力系统 $F^k|_\Lambda(k\in Z)$完全可以看成是双边符号动力系统 $\sigma^k:\Sigma\to\Sigma(k\in Z)$．

容易看到 σ 的不动点为$(\cdots000\cdots)\overset{\text{def}}{=}(0)'$ 和$(\cdots111\cdots)\overset{\text{def}}{=}(1)'$．而$(01)'$，$(001)'$，$(110)'$，$(0001)'$，$(1110)'$，$(1100)'$ 和$(1010)'$ 分别是周期 2,3,3,4,4,4,4 轨道（这里$()'$ 表示对括号中的进行周期延拓而得的符号列）．进一步地，我们还可以看到，所有以下列点为初值的双向系统 σ^k，$k\in Z$ 的轨道是同宿轨道：

$$(\cdots00s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n00\cdots),(\cdots11s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n11\cdots)$$

而所有以下列点为初值的双向动力系统 σ^k，$k\in z$ 的轨道是异宿轨道

$$(\cdots00s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n11\cdots),(\cdots11s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n00\cdots)$$

这里 $n\in N$，$s_k\in\{0,1\}(k=-n,\cdots,n)$．

我们还可以看到 Σ 关于 σ 是拓扑可迁的，因为令

$$s=(\overbrace{001}^{\text{所有的 }s_0}\underbrace{000100010001110101011111}_{\text{所有的 }s_{-1}s_0s_1}\cdots\underbrace{\overbrace{0\cdots0}^{2n+1}\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n\overbrace{\cdots1\cdots1\cdots}^{2n+1}}_{\text{所有的 }s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n})$$

同§2.2.2 中完全一样地有单向轨道 $\sigma^k(s)$，$k\geqslant0$ 在Σ中稠密．

当然，Σ的所有周期点组成的集合在Σ中稠密．

最后，我们还将看到Σ是混沌集，即 σ 在Σ上关于初值有着敏感的依赖性．

事实上，$\forall$ 取 $s=(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_n\cdots)\in\Sigma$，以及$\forall\,\delta>0$，$\Sigma$中以 s 为中心以δ 为半径的开球为

$$B(s,\delta)=\{t\in \sum \mid d(s,t)<\delta\}$$

现取 n 充分大使得 $1/2^n<\delta$,并且 $t\in\Sigma$,

$$t=(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0s_1\cdots s_{n-1}t_ns_{n+1}\cdots)$$

即 t 与 s 仅在第 n 个符号处不相同,所以

$$d(s,t)=|s_n-t_n|/2^n=\frac{1}{2^n}<\delta$$

得 $t\in B(s,\delta)$. 但 $d(\sigma^n(t),\sigma^n(s))=|s_n-t_n|=1$,所以说$\Sigma$是 σ 的混沌不变集.

综上所述,我们有

定理 2.16 符号动力系统 $\sigma^{-k}:\Sigma\to\Sigma$具有下列性质:

(i) Σ中含有可列多个周期轨道,对于每一 $k\geqslant1$,周期 k 轨道的个数大约为$\dfrac{2^k}{k}$;

(ii) Σ中所有周期点所组成的集合在Σ中稠密;

(iii) Σ中含有不可列个非周期轨道;

(iv) Σ是 σ 的混沌不变集;

(v) Σ关于 σ 是拓扑可迁的.

由于 F 与σ 拓扑等价,则把定理2.16中的 σ 和 Σ 分别换成 F 和 A 时,结论依然成立.更确切地说,我们有

定理 2.17 Smale 马蹄映射 $F:A\to A$ 具有下列性质:

(i) A 中含有可列多个周期轨道,对于每一 $k\geqslant1$,周期 k 轨道的个数约为 $2^k/k$;

(ii) A 中所有周期点组成的集合在 A 中稠密;

(iii) A 中含有不可列个非周期轨道;

(iv) A 是动力系统σ^k, $k\geqslant0$ 的混沌不变集;

(v) A 关于动力系统σ^k, $k\geqslant0$ 是拓扑可迁的.

值得注意的是 Smale 马蹄映射 F 是一种人为的、非常特殊的映射,重要的是,F 在A 的邻近是结构稳定的,即 F 的C^r 小扰动后

的 $\tilde{F}$,必然有 F 与 $\tilde{F}$ 在 A 邻近拓扑等价,而 $\tilde{F}$ 也有一个混沌不变集 $\tilde{A}$. 我们也称 A 与 $\tilde{A}$ 拓扑等价.

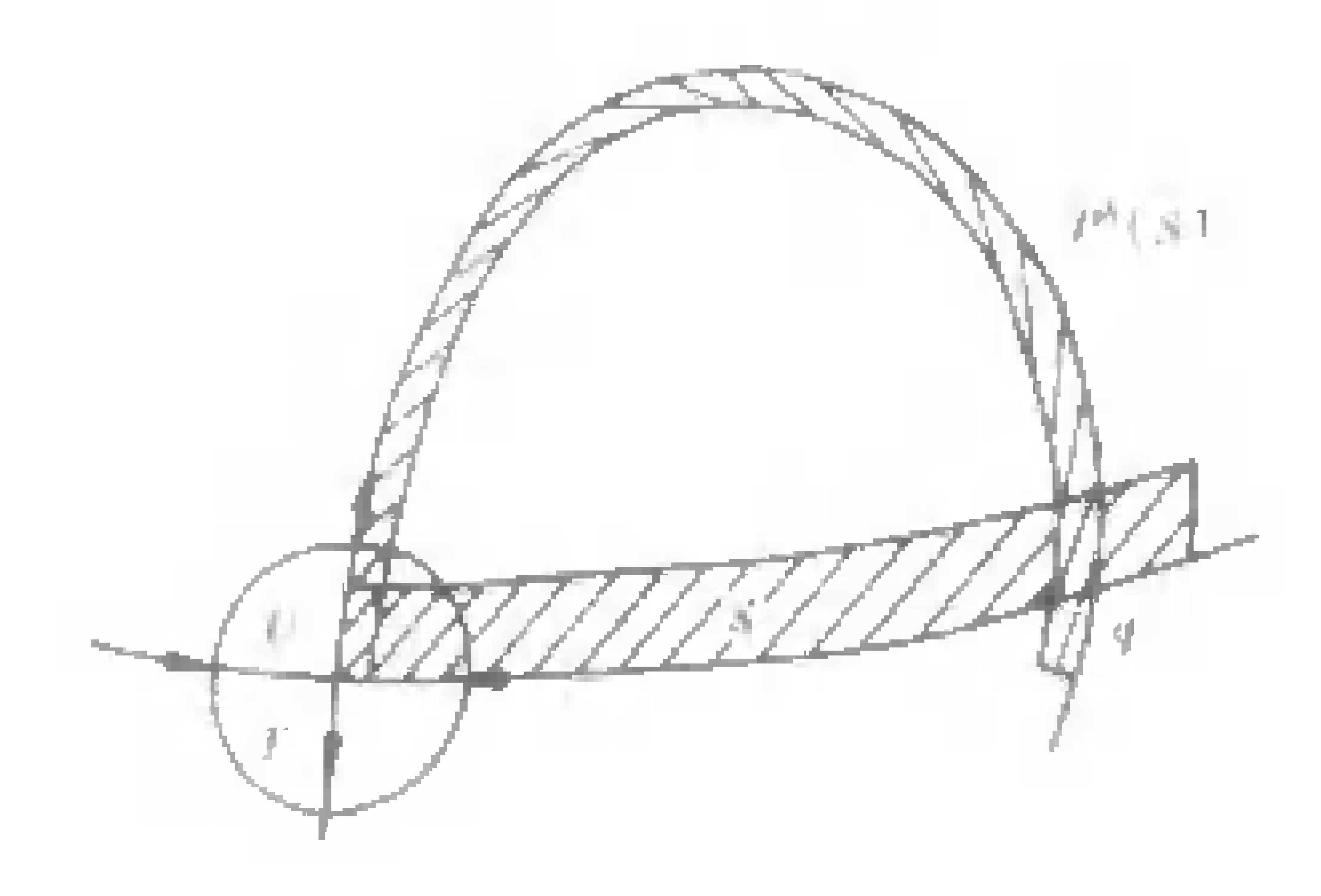


图 2.44　P^N 具有 Smale 马蹄

一般来说,对于映射 $P:R^2 \to R^2$ 如图 2.44,若 P 具有双曲的鞍点 p,且 p 点的稳定流形 $W^s(p)$ 和不稳定流形 $W^u(p)$ 在 q 点横截相交,则容易找到一带形区域 s 和 $N \geqslant 1$,使得 $P^N: s \to R^2$ 具有如图 2.44 所示的形式. 这里虽然与前面的 Smale 马蹄不尽相同,但本质上是一样的. 关键是使 $P^N(s)$ 成为与 s 相交成如图 2.44 的马蹄,由于以 q 为初值的两轨道 $P^k(q)$ 和 $P^{-k}(q)$ 恰好组成 P 的同宿轨道,且 $W^u(p)$ 和 $W^s(p)$ 在 q 点不相切,我们称点 q 为横截同宿点,见图 2.45. 下面是本节的主要定理:

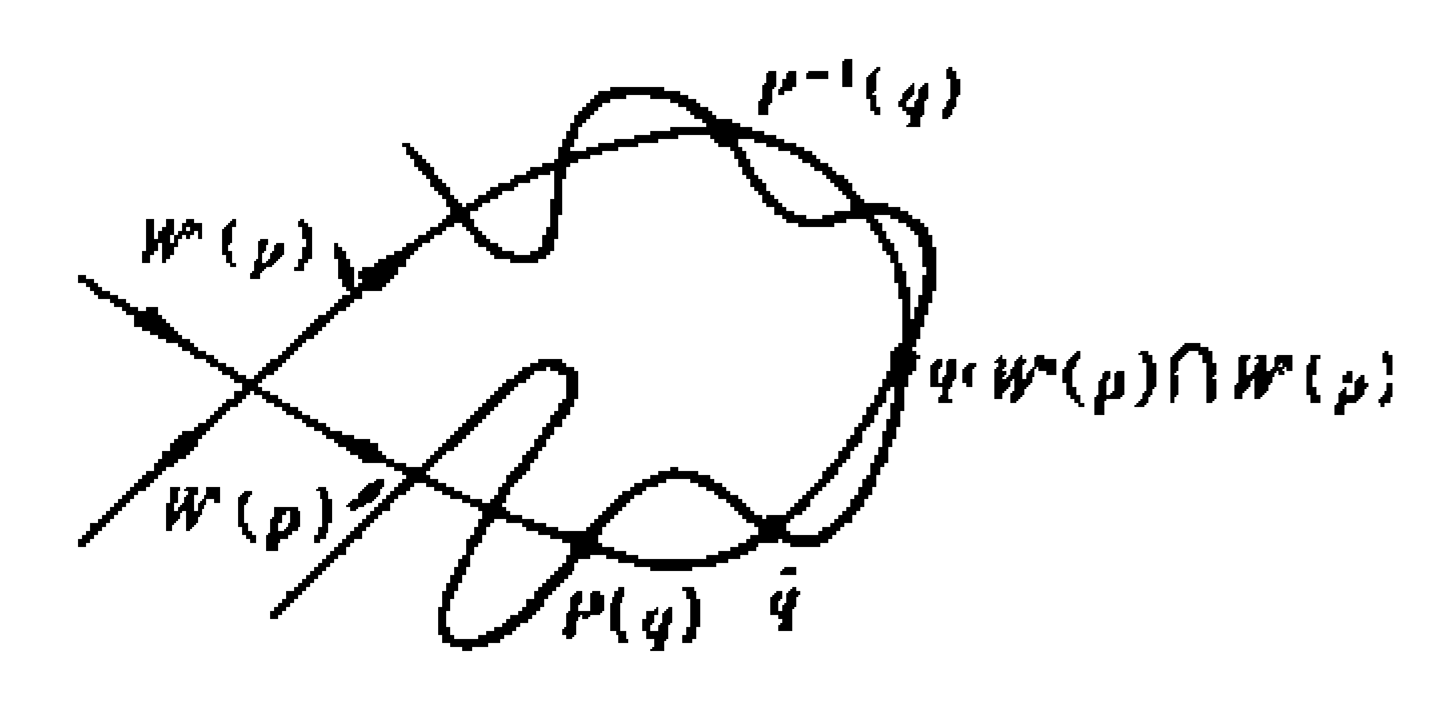


图 2.45　同宿轨道

定理 2.18(Smale - Birkhoff 同宿定理)　设 $P:R^2 \to R^2$ 是连续可微的同胚映射,具有鞍点 p 以及和 p 相应的横截同宿点 q,则

存在 $n>0$,使得 P 有一个混沌不变集 A,使得 $P^n:A\to A$ 与左移映射 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 拓扑等价.

由此定理可见定理2.17相应于 $P^n|_A$ 依然成立,事实上 P^n 在 A 的某个邻域上关于初值是有敏感的依赖性,这也就是说 $P:R^2\to R^2$ 生成 R^2 上的混沌的动力系统.值得注意的是,定理2.18相应于任意 k 维空间 R^k 上的映射时,结论仍然是成立的(见Smale[1980]).

§2.4 Henon 映射

在 §2.3 中 Smale 马蹄映射 $\boldsymbol{F}:s\to\boldsymbol{F}(s)$ 具有混沌不变集,但这个集合不一定是吸引的,在这里,我们希望给出映射 $\boldsymbol{F}$:把 s 映到 s 的内部,使得原来的混沌不变集变成为混沌吸引子.同样地,这种映射与 §2.2.1 中的逻辑斯谛映射是非常相像的.

天文学家 Henon 从研究球状星团中以及从 Lorenz 吸引子中得到启发,给出了下列的 Henon 映射(Henon[1976]):

$$\boldsymbol{F}:R^2\to R^2;\boldsymbol{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+1-ax^2\\bx\end{pmatrix},b=0.3,a=1.4 \tag{2.130}$$

这个映射的非线性部分来自于逻辑斯谛映射,而且若把 F 关于 x 轴的分量 $F_1(x,y)=y+1-ax^2$ 限制在 x 轴上,则得逻辑斯谛映射 $f_a(x)=1-ax^2$.另一方面,也可以把 F 看成是下列映射的叠加:

$$\mathrm{T}':\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2;\mathrm{T}'\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y+1-ax^2\end{bmatrix};$$

$$\mathrm{T}'':\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2;\mathrm{T}''\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}bx'\\y'\end{bmatrix};$$

$$\mathrm{T}''':\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2;\mathrm{T}'''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'' \\ x'' \end{pmatrix};$$

所以

$$\boldsymbol{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{T}'''\mathrm{T}''\mathrm{T}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其中 T′,T″,T‴ 的作用如图 2.46.

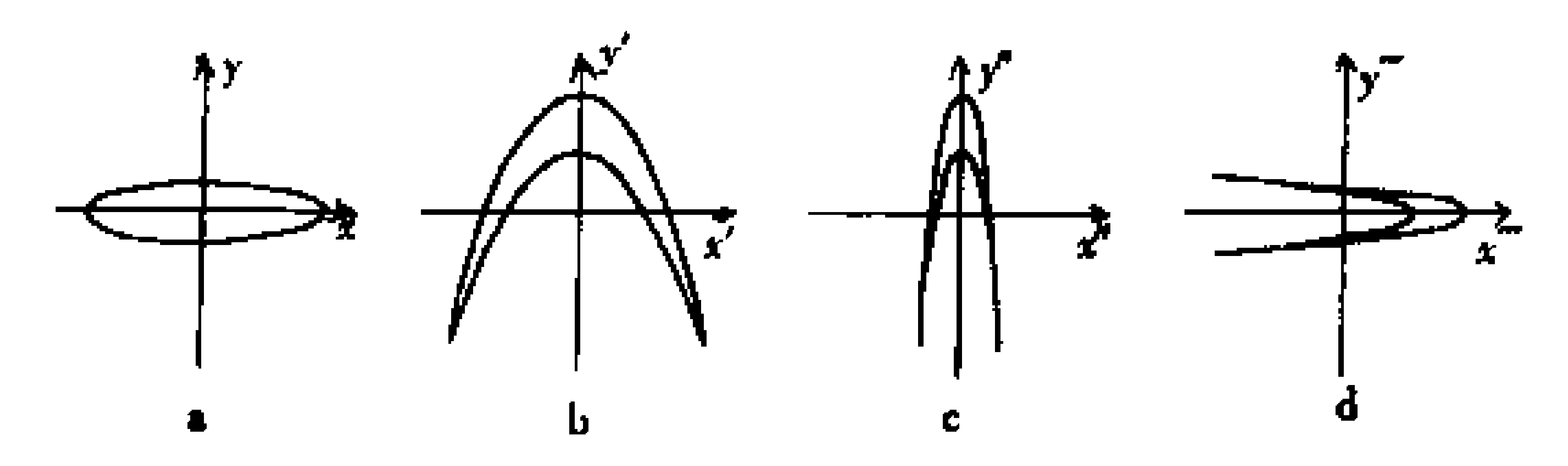


图 2.46　初始区域(a),经映射 T' 后变成区域(b),
经映射 T'' 后变成区域(c),经映射 T''' 后变成区域(d)

注意到 $\boldsymbol{F}$ 的 Jacobi 行列式为

$$\det\left(DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b = -0.3$$

$\boldsymbol{F}:R^2 \to R^2$ 是一一映射.但 $\boldsymbol{F}$ 是收缩面积的映射,例如图2.46中,设其中的椭圆为 s,则 d 中的$\boldsymbol{F}(s)$ 的面积是 s 的0.3倍.这也就是说 $\boldsymbol{F}^k$ 是耗散的动力系统.

在 Henon[1976] 中,Henon 分别取两个初始点

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63135448 \\ 0.18940634 \end{pmatrix}$$

利用计算机分别给出两轨道 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 的前 10000 个点

($n \leqslant 1000$),并把这些点去掉若干个初始点,在坐标轴表示出来则如图2.47和图2.48的几乎没有任何区别的两幅图.由此我们可

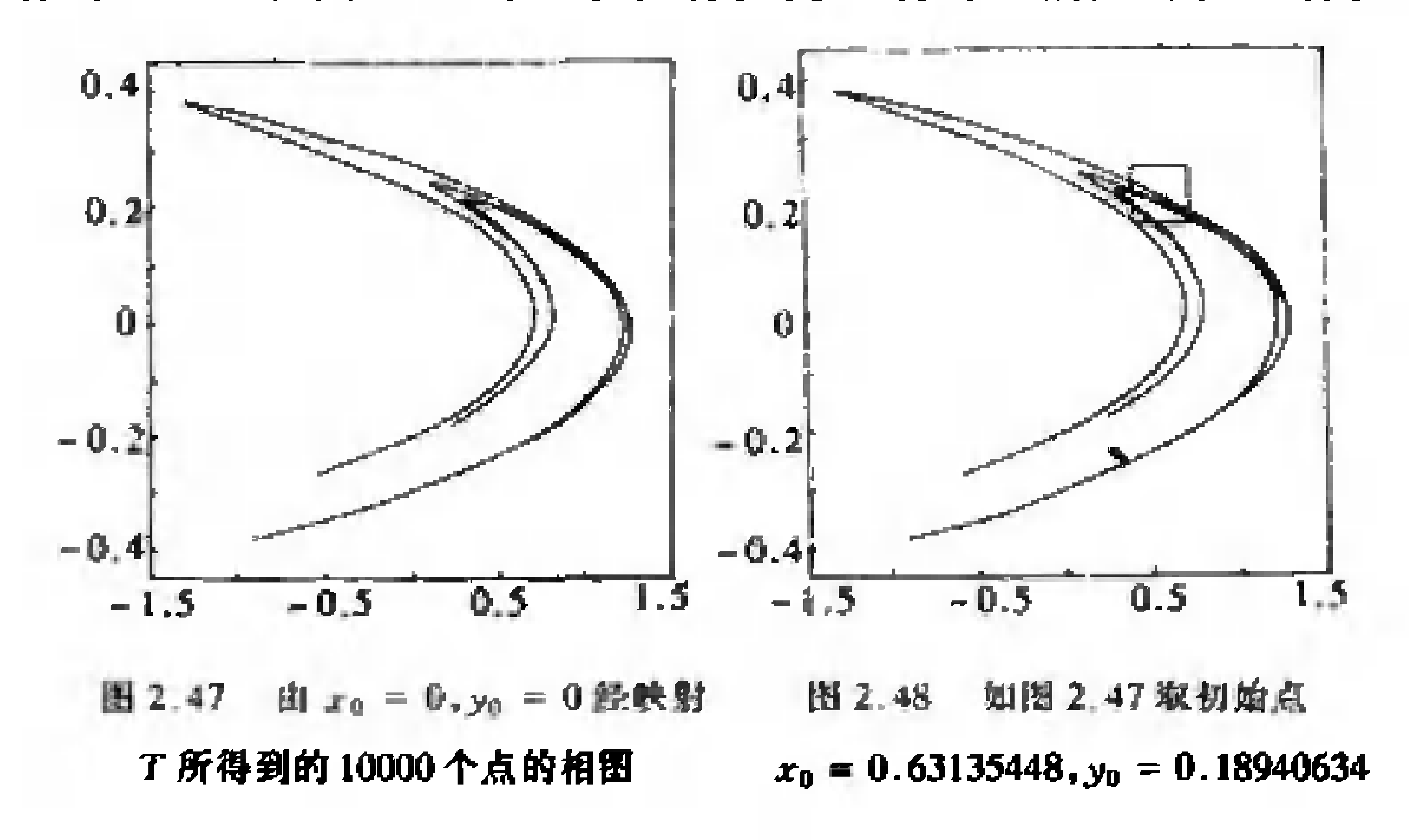


图2.47 由 $x_0=0, y_0=0$ 经映射 T 所得到的10000个点的相图

图2.48 如图2.47取初始点 $x_0=0.63135448, y_0=0.18940634$

以猜想到系统 F^k 应该有一个吸引集 A,它的形状同图2.48中轨道 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = F^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 非常接近(在图中已无法区分).事实上 A 是由 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 出发的轨道(去掉初始若干个点)的闭包,这也就是说 A 是拓扑可迁的.而且我们还可以发现存在着一个开集 $U \supset A$(如图2.49)使得任何以 U 中点为初值的轨道最终必被 A 所吸引,所以说 A 是吸引子(见 Eckmann-Ruelle[1985]).注意到 A 是由 U 收

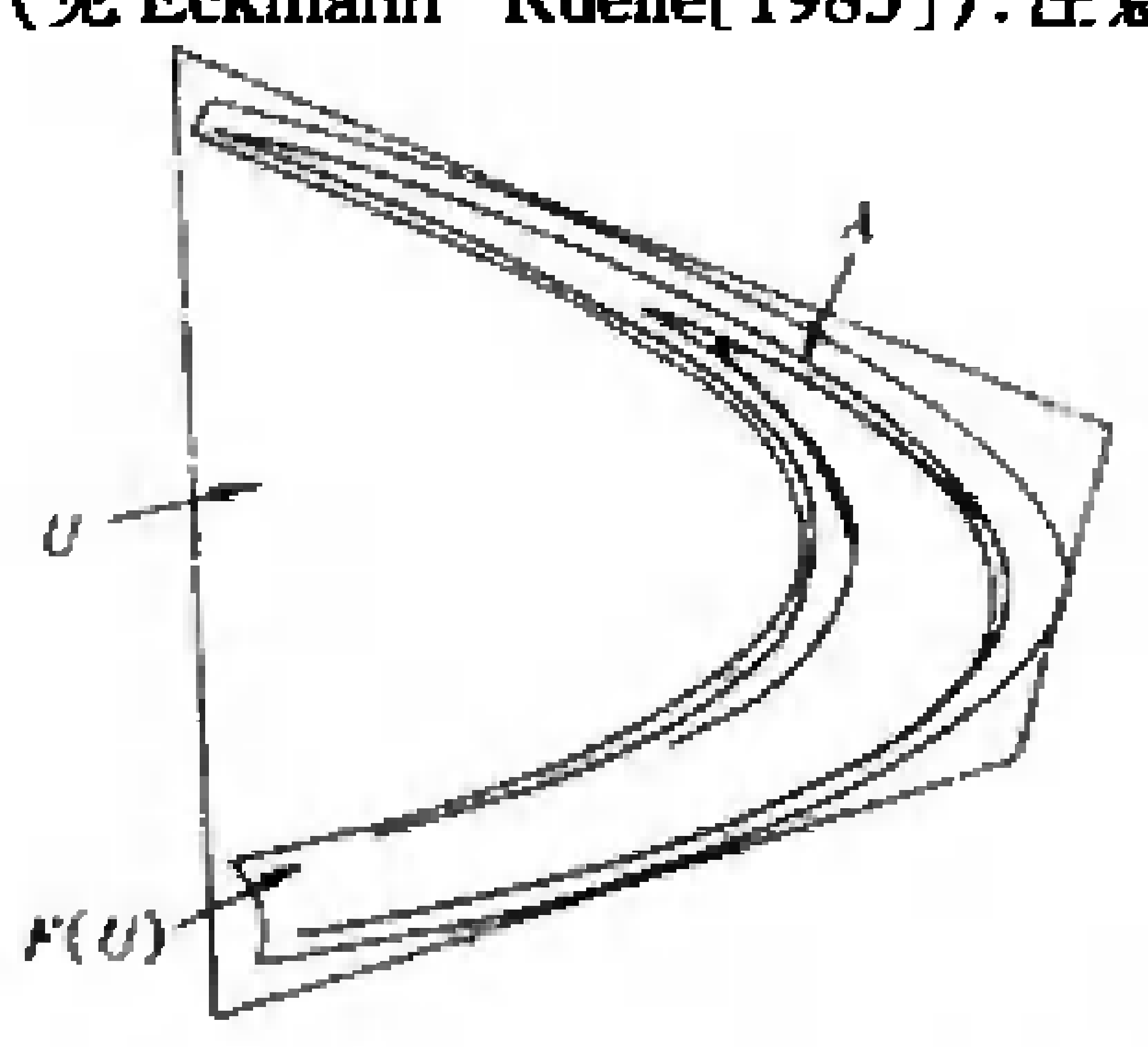


图2.49 U 中点为初值的轨道被 A 所吸引

缩而成，如 $F(U)$ 的面积是 U 的面积的 0.3 倍，所以 A 的"面积"必为零，即 $L^2(A)=0$. 由图 2.49 还可见 $A=\bigcap_{k=0} F^k(U)$. 进一步地，若把图2.48 中落在小框内的轨道 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $n \leqslant 10^5 \cdots$ 放大数倍则是图2.50. 同样地，把图 2.50 中位于小框内的轨道 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $n \leqslant 10^6$ 放大数倍则是图2.51. 由此可见，若与 x 轴平行的直线 $y=\text{const}$, 与 A 相交(不相切)，那么，所有这些交点所组成的集合必是 Cantor 集，从而吸引子 A 中所有位于图2.48 的小方框内的点组成的集是一簇 Cantor 线段，即为不可列条互不相交的线段. 而且它的 2 维 Lebesque 测度为零.

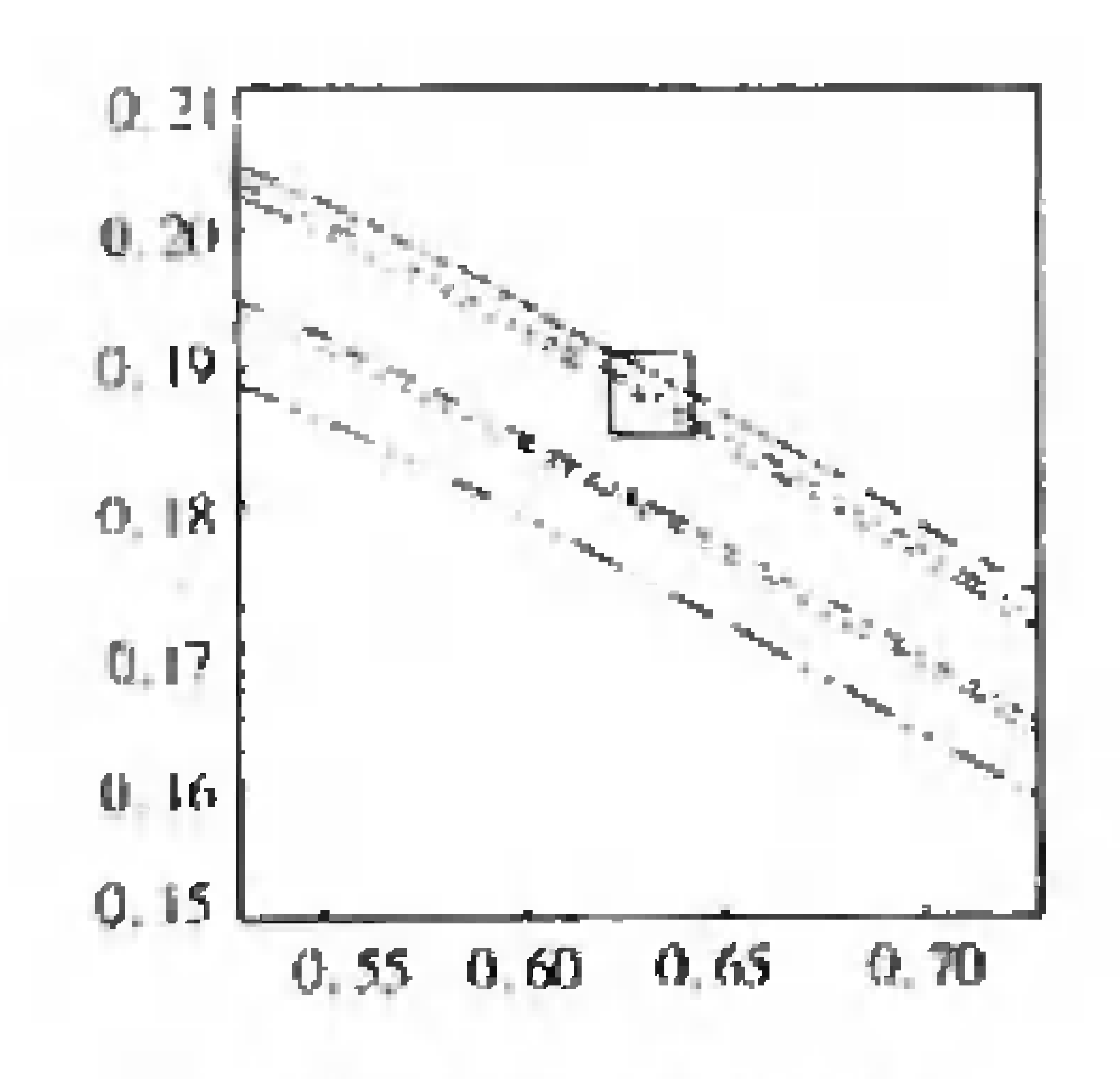


图 2.50　图 2.48 中落在小框内的轨道的放大图

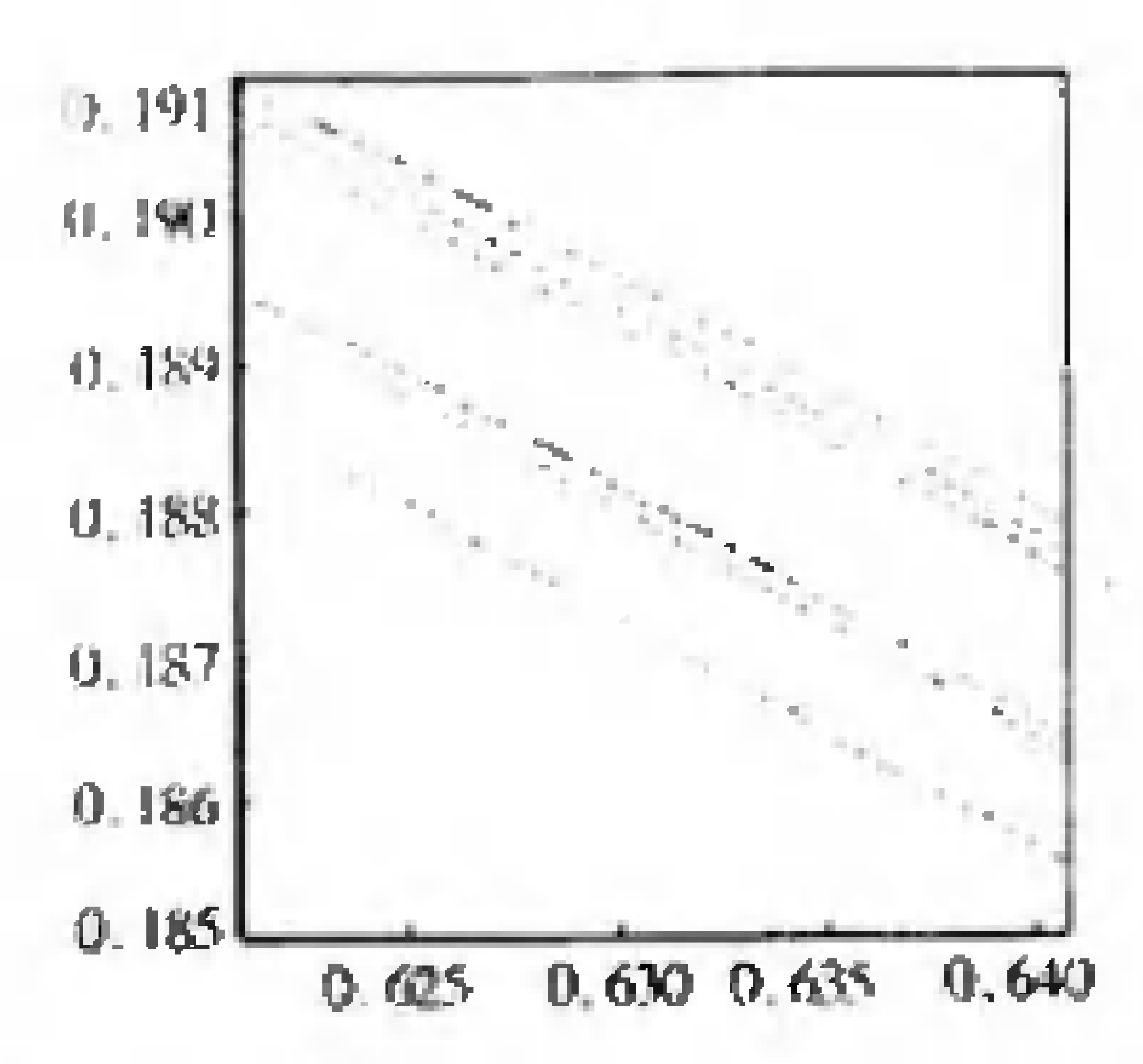


图 2.51　图 2.50 中落在小框内的轨道的放大图

事实上，集合 A 或称之为 Henon 吸引子是 F 的混沌集，因此，A 是动力系统 F^k 的奇怪吸引子. 现我们来构造一个吸引子，称之为 Lauwerier 吸引子，这是同 Henon 吸引子在本质上非常相像的集合. 但它的构造方法却类似于 Smale 马蹄的方法，通过这一集合来帮助我们更好地了解 Henon 吸引子的构造及其混沌性态.

定义映射 $G:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ 使得

$$G(x,y)=(\frac{1}{3}x(1-2y)+y,4y(1-y))$$

则 G 是$[0,1]\times[0,1]$上的映射,见图 2.52.粗糙地看,在 G 的作用下,$[0,1]\times[0,1]$在水平方向收缩,铅垂方向伸长,再把上边 5,6,7 弯到下边,使得 $G[0,1]\times[0,1]$ 在$[0,1]$中成一马蹄.因此 Lauwerier 吸引应该是

$$A^{*}=\bigcap_{k\geqslant 0}G^{k}([0,1]\times[0,1])$$

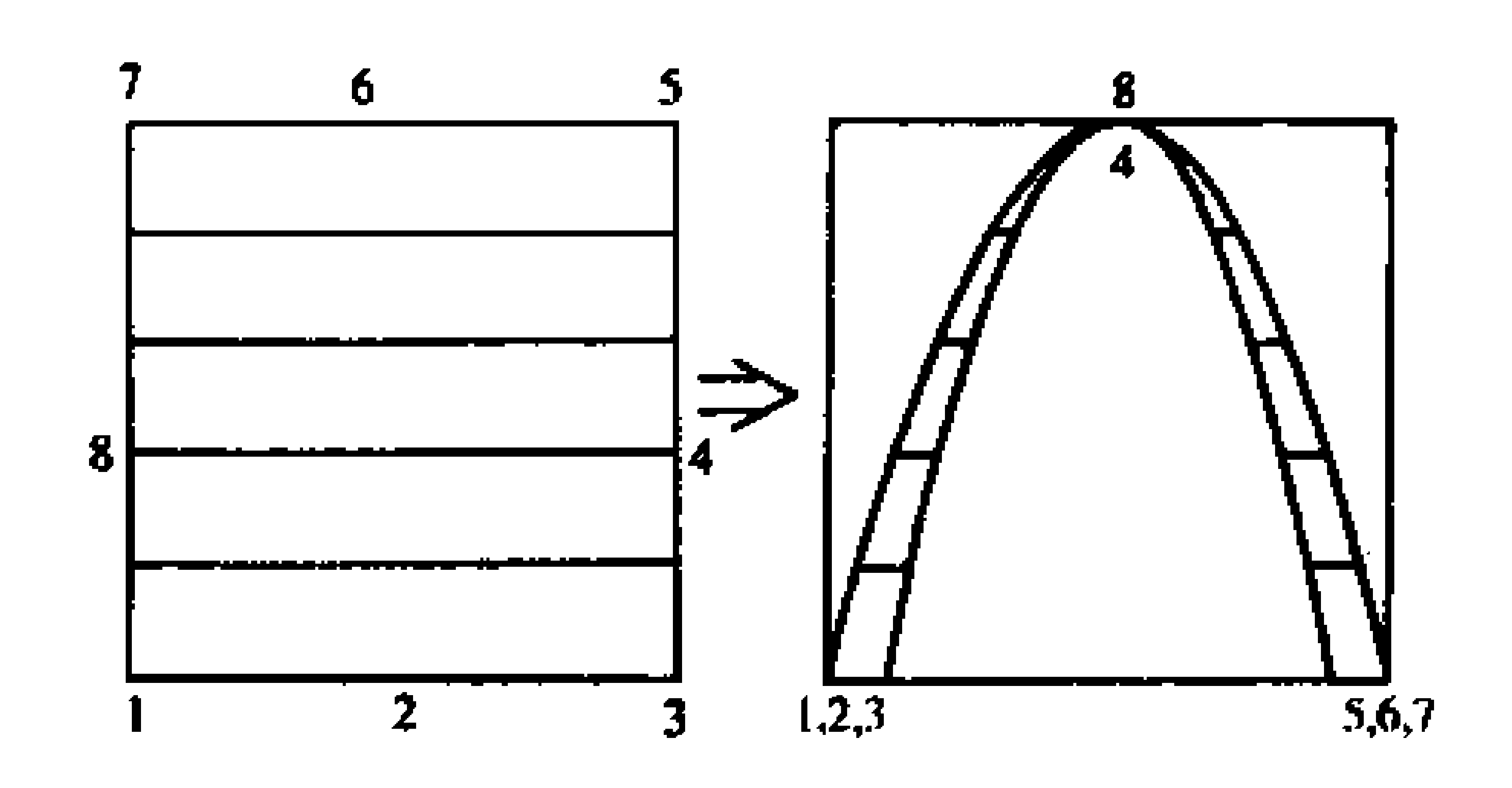


图 2.52 一个收缩的 Smale 马蹄映射

不难想像,A^{*} 的构造过程几乎是拉"兰州拉面"的过程,只不过这里每拉一次(即 G 每作用一次)后,面积就会缩小一次,因此 A^{*} 是由一串线圈组成.注意到$(x,y)=(0,0)$是 G 的鞍点,关于$(0,0)$的不稳定流形和以其上点为初值的轨道近似于图 2.53 和图 2.54.

在图2.52、图2.53和图2.54中都能看到,若 $x,y\in A^{*}$,$x\neq y$,则经 G^{K} 映射后的点$G^{K}(x)$ 和 $G^{K}(y)$将会相距甚远.这也就是说 A^{*} 是 G^{k} 的混沌集.

最后,值得一提的是,瑞典的数学家 L.Carleson 于 1988 年证明了一般的 Henon 映射,$(x,y)\to(y+1-ax^{2},bx)$在正 L^{2} 测度的参数集$\{(a,b)\}$上具有混沌吸引子.

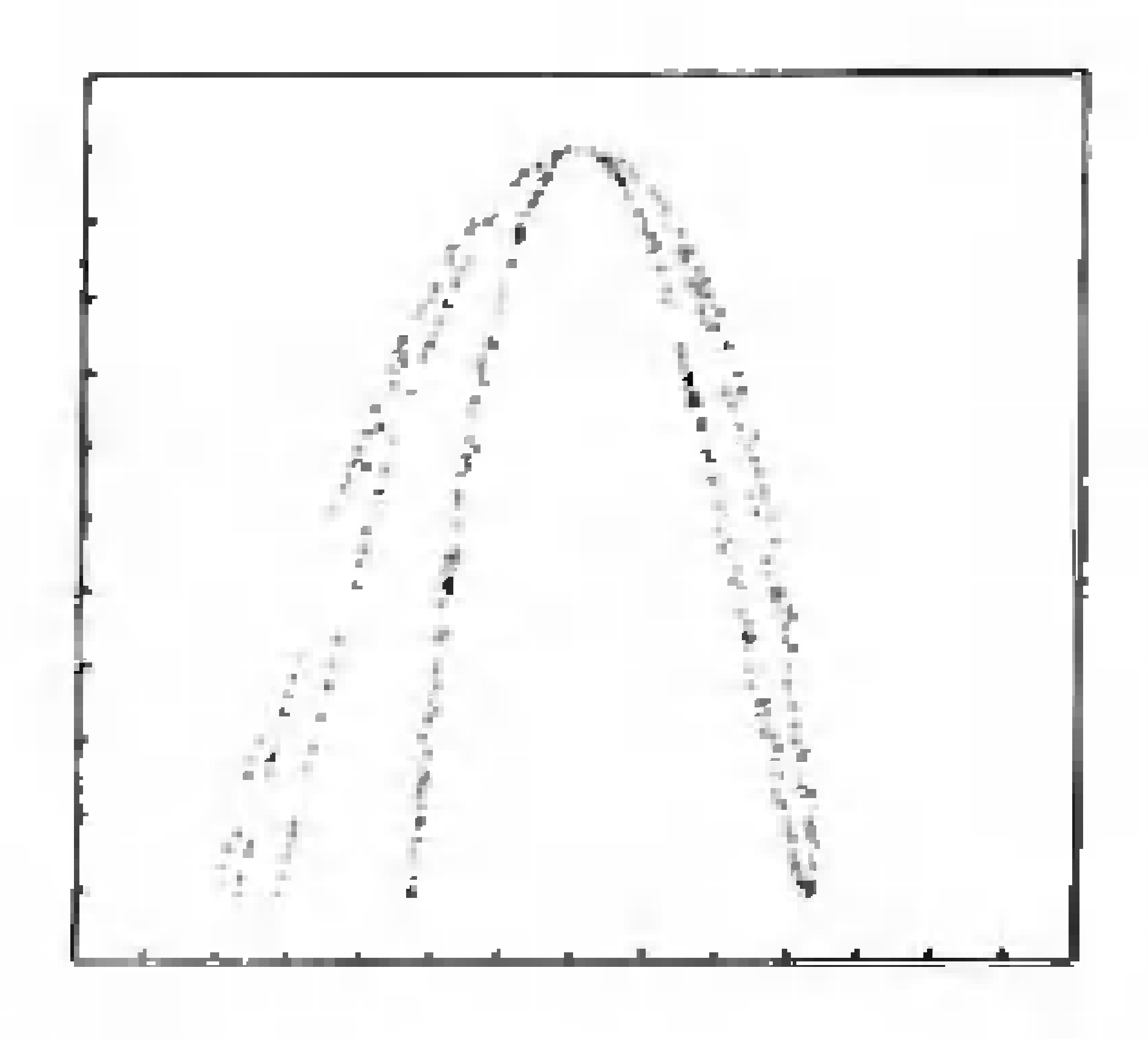


图 2.53 不稳定流形的一个轨道，x 轴从 -0.1 到 1.1，y 轴从 -0.1 到 1.1

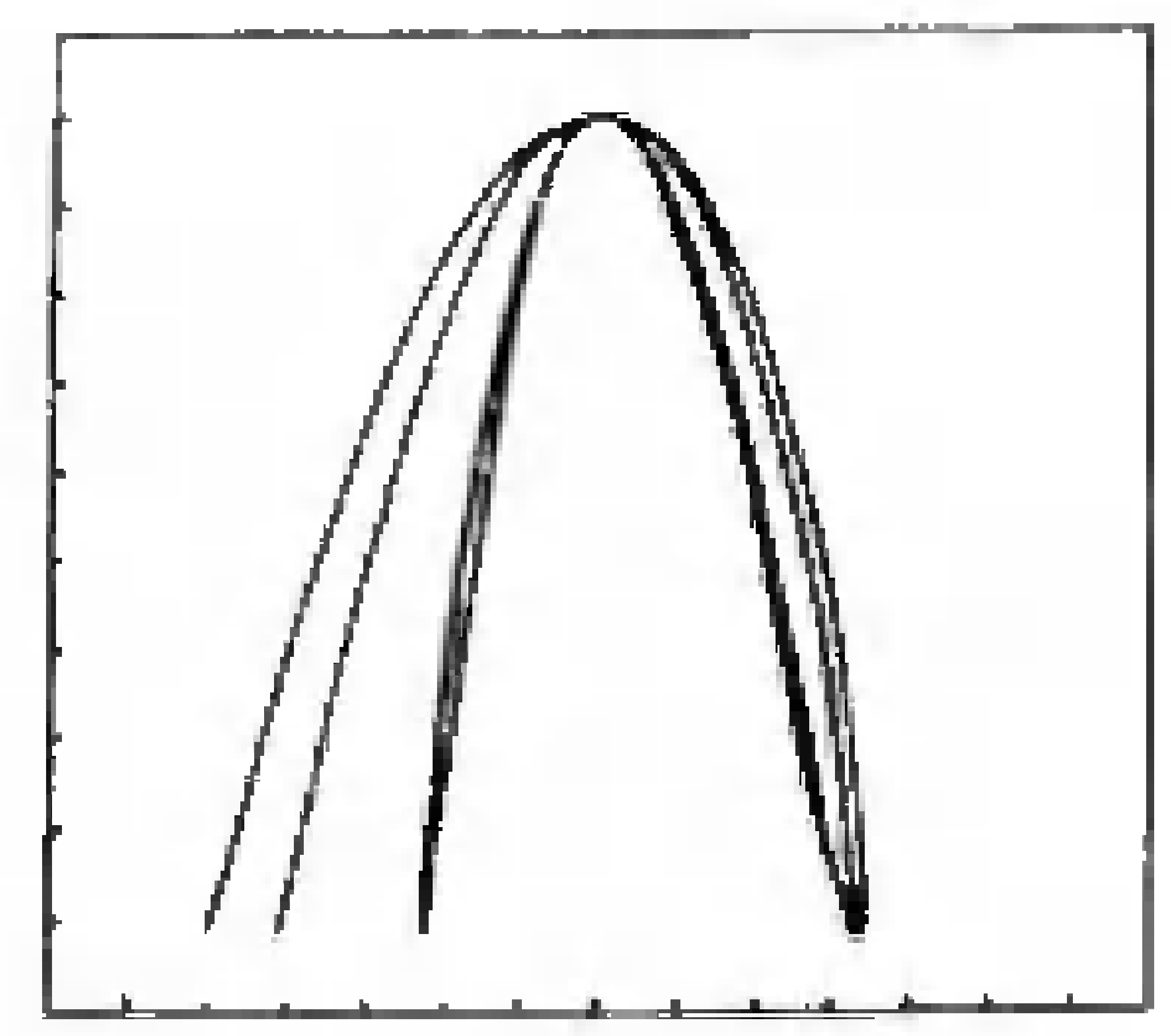


图 2.54 初值的几个不稳定环状流形，x 轴从 -0.1 到 1.1，y 轴从 -0.1 到 1.1

§2.5 Melnikov 方法

在 §2.3 中，我们着重介绍了 Smale 马蹄，这是一个非常容易把握的混沌不变集，所以，什么样的动力系统会产生 Smale 马蹄现象当然是至关重要的. Smale－Birkhoff 同缩定理（定理 2.18）告诉我们，若一个二维的离散动力系统具有横截同缩点，则此系统将产生 Smale 马蹄现象，但是什么样的系统具有横截同缩点，这依然是个令人困惑的问题. 所谓 Melnikov 方法也就是寻找横截同缩点的方法，它来自于 Melnikov[1963]，Arnold[1964]，或更早的工作. 这种思想源于 Poincaré[1890] 的有关三体问题的研究，所以实际上可称其为 Poincaré－Arnold－Melnikov 方法. 现在，在理论和应用中，关于 Melnikov 方法的研究都有了长足的进步，这主要归功于 Holmes 的贡献.

这里我们要介绍的是 Melnikov 方法的最基本部分：考虑 R^2 上的 Hamilton 系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in R^2,$$
$$f = (f_1, f_2): R^2 \to R^2 \qquad (2.131)$$

的时间周期的小扰动

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t + \tau), \boldsymbol{x} \in R^2 \tag{2.132}$$

这里我们称(2.131)为 Hamilton 系统是指存在函数 $H: R^2 \to R$(称之为 Hamilton 能量函数)使得

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2), \tag{2.133}$$

这使得(2.131)为保守系统.

由于(2.132)的向量场依赖 t,所以把(2.132)看成是下列三维的动力系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, s) \\ \dot{s} = 1 \end{cases} \qquad (\boldsymbol{x}, s) \in R^2 \times S \tag{2.134}$$

其中 S 是周长为 T 的圆. 记 $\boldsymbol{F}(s) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, s), 1)$,则 $\boldsymbol{F}$ 是 $R^2 \times S$ 上的切向量场. 从而(2.134)的任一轨道都在 $R^2 \times S$ 中,且与任一平面 $R^2 \times \{t_0\} \overset{\text{def}}{=} \Sigma_{t_0}$ 横截相交. 所以定义系统(2.134)的 Poincaré 映射 $\boldsymbol{P}_\varepsilon^{t_0}: \Sigma_{t_0} \to \Sigma_{t_0}$ 使得

$$\boldsymbol{P}_\varepsilon^{t_0}(\overline{\boldsymbol{x}}, t_0) = (\boldsymbol{x}_\varepsilon(t_0 + T, \overline{\boldsymbol{x}}), t_0)$$

即

$$\boldsymbol{P}_\varepsilon^{t_0}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}_\varepsilon(t_0 + T, \overline{\boldsymbol{x}}), \qquad (\overline{\boldsymbol{x}}, t_0) \in \sum_{t_0}$$

其中$(\boldsymbol{x}_\varepsilon(t_0 + s, \overline{\boldsymbol{x}}), t_0 + s)$是(2.134)的以$(\overline{\boldsymbol{x}}, t_0)$为初值的轨道.

设(2.131)有一鞍点 $\boldsymbol{p}_0$ 且过 $\boldsymbol{p}_0$ 点有一非横截的同宿轨道 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(t - t_0)$(见图 2.55). 注意到当 $\varepsilon = 0$ 时,$\boldsymbol{P}_0^{t_0}: \sum t_0 \to \sum t_0$ 则是(2.131)的 Poincaré 映射,或者说 $\boldsymbol{P}_0^{t_0}(\overline{x})$ 就是(2.131)的以 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 为初值的轨道,所以有 $\boldsymbol{P}_0^{t_0}(\boldsymbol{p}_0) = \boldsymbol{p}_0$ 且 $\boldsymbol{p}_0$ 是 $\boldsymbol{P}_0^{t_0}$ 的鞍点,即矩阵

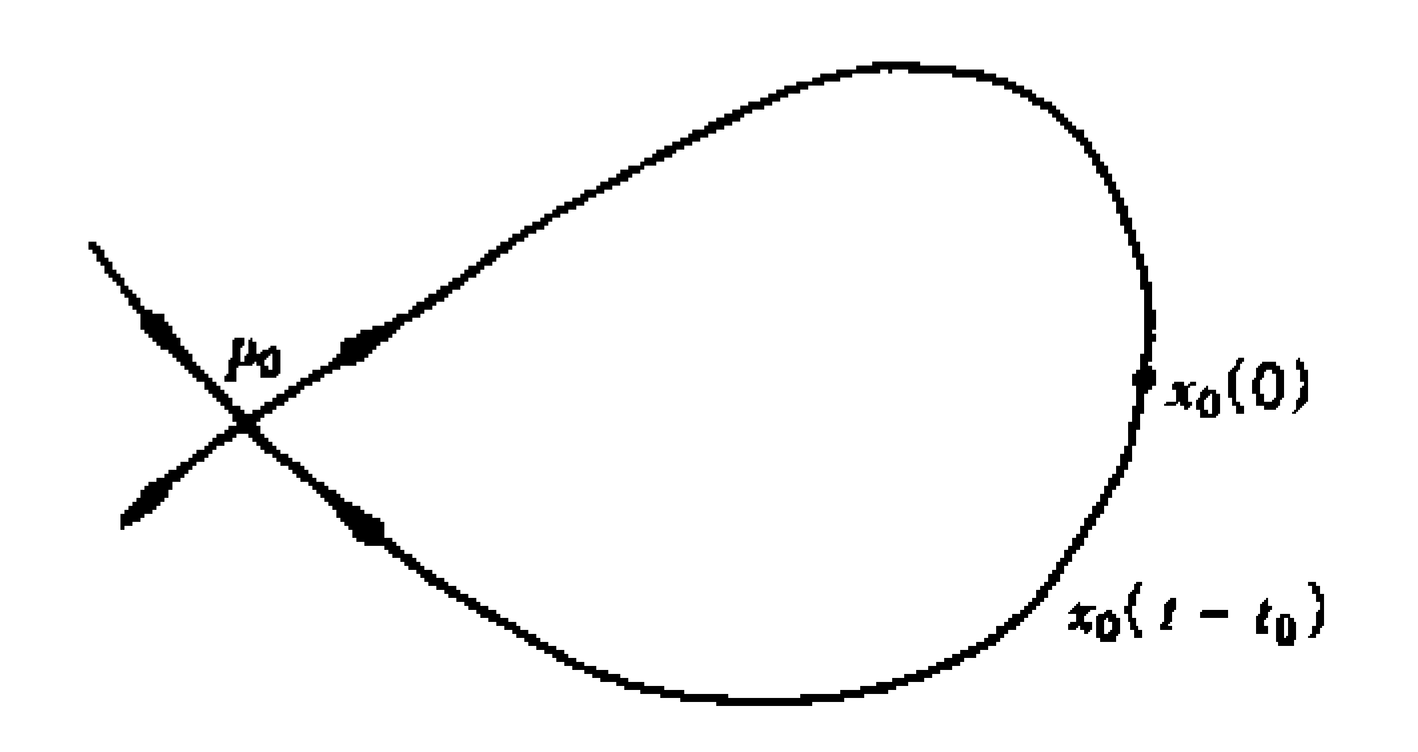


图 2.55　过 p_0 的同缩轨道

$DP_0^{t_0}(p_0)$ 的两个特征值分别为 $|\lambda_1|<1<|\lambda_2|$，这意味着映射 $T_\varepsilon^{t_0}(x)=x-P_\varepsilon^{t_0}(x)$ 适合 $T_0^{t_0}(p_0)=0$，且 $DT_0^{t_0}(p_0)=I-DP_0^{t_0}(p_0)$ 可逆. 由隐函数定理，当 ε 充分小时，存在 $P_\varepsilon^{t_0}\in R^2$ 使得 $T_\varepsilon^{t_0}(p_\varepsilon^{t_0})=p_\varepsilon^{t_0}$，即 $p_\varepsilon^{t_0}$ 是$P_\varepsilon^{t_0}$ 的不动点，而且同样有 $p_\varepsilon^{t_0}$ 是$P_\varepsilon^{t_0}$ 的鞍点，$p_\varepsilon^{t_0}$ 与 p_0 间有关系 $p_\varepsilon^{t_0}=p_0+o(\varepsilon)$，见图 2.56.

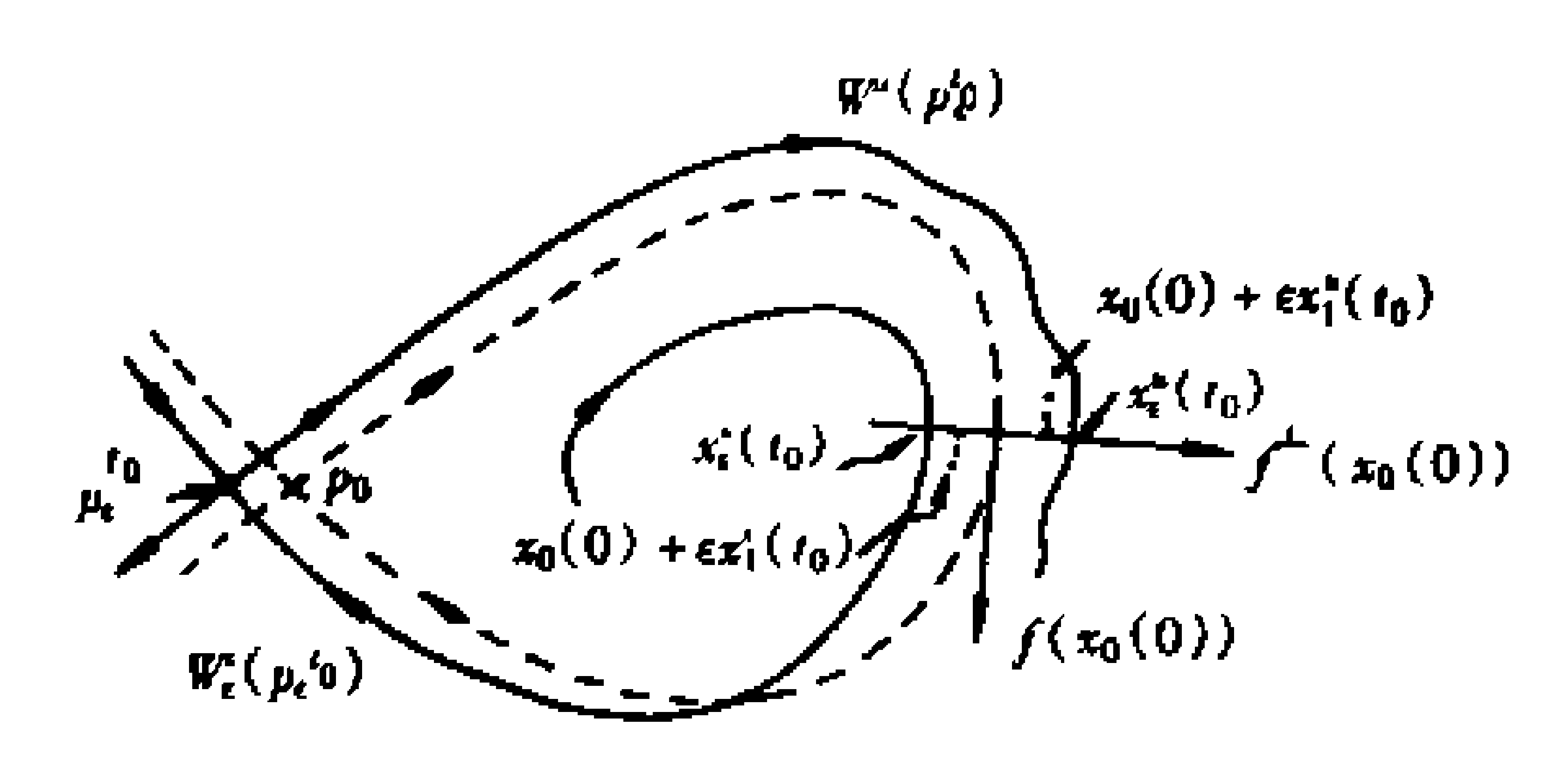


图 2.56　距离函数及其扰动流形

图 2.56 可以看成是映射 $P_\varepsilon^{t_0}:R^2\to R^2$ 所产生的动力系统的图形，也可以看成是 $P_\varepsilon^{t_0}:\Sigma_{t_0}\to\Sigma_{t_0}$ 所产生的动力的图形，或者更确切地说，这是(2.134)的轨道在$\Sigma_{t_0}=R^2\times\{t_0\}$这一截面上的图形.

在此以后为方便起见，我们将省掉所有的上标 t_0，注意到 p_0 是(2.131) 的平衡点，这也就意味着 $\gamma_0\triangleq(p_0,s)$ 是(2.134) 取 $\varepsilon=0$ 时即

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x) \\ \dot{s} = 1\end{cases} \qquad (x,s) \in R^2 \times S \tag{2.135}$$

的周期轨道.进一步地,$\gamma_\varepsilon = (p_\varepsilon, s) = (p_0 + o(\varepsilon), s)$ 是(2.134)的周期轨道,由于 p_ε 是 P_ε 的鞍点,所以周期轨道同样有稳定和不稳定流形 $W^s(\gamma_\varepsilon)$ 和 $W^u(\gamma_\varepsilon)$.设 x_ε^s 和 x_ε^u 是(2.134)的解,且分别位于 $W^s(\gamma_\varepsilon)$ 和 $W^u(\gamma_\varepsilon)$ 中,注意到(2.134)是(2.132)在形式上加了一维而得到的,为了避免使用过多的符号,我们同样把 x_ε^s 和 x_ε^u 看成是(2.132)的解,且分别位于 $W^s(p_\varepsilon)$ 和 $W^u(p_\varepsilon)$ 中,由 Taylor 展开得

$$\begin{cases}x^s(t,t_0) = x_0(t-t_0) + \varepsilon x_1^s(t,t_0) + o(\varepsilon^2), t \in [t_0,\infty) \\ x^u(t,t_0) = x_0(t-t_0) + \varepsilon x_1^u(t,t_0) + o(\varepsilon^2), t \in [t_0,\infty)\end{cases} \tag{2.136}$$

由于 $\dot{x}_0 = f(x_0)$,以及由 Taylor 展开

$$\begin{aligned}\dot{x}_\varepsilon^s &= f(x_\varepsilon^s) + \varepsilon g(x_\varepsilon^s, t) \\ &= f(x_0) + \varepsilon Df(x_0)x_1^s + \varepsilon g(x_0, t) + o(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{2.137}$$

因此

$$\dot{x}_\varepsilon^s - \dot{x}_0 = \varepsilon Df(x_0)x_1^s + \varepsilon g(x_0, t) + o(\varepsilon^2)) \tag{2.138}$$

由此得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^s(t,t_0) &= Df(x_0)x_1^s + g(x_0, t) \\ &= Df(x_0(t-t_0))x_1^s + g(x_0(t-t_0), t)\end{aligned} \tag{2.139}$$

同样地

$$\dot{x}_1^u(t,t_0) = Df(x_0(t-t_0)x_1^u + g(x_0(t-t_0), t) \tag{2.140}$$

记

$$f^{\perp}(x_0(0)) = (-f_2(x_0(0)), f_1(x_0(0)))$$

则轨道 $x_0(t-t_0)$ 在点 $x_0(0)$ 的单位法向为 $f^{\perp}(x_0(0))/|f(x_0(0))|$,所以如图 2.56 所示,$p_0$ 在基点 $t=t_0$ 处稳定流形 $W^s(p_0)$ 和不稳定流形 $W^u(p_0)$ 的距离为

$$d(t_0) = (x_\varepsilon^u(t_0,t_0) - x_\varepsilon^s(t_0,t_0)\cdot f^{\perp}(x_0(0))/|f(x_0(0))|$$

$$= \frac{\varepsilon(x_1^u(t_0,t_0) - x_1^s(t_0,t_0))\cdot f^{\perp}(x_0(0))}{|f(x_0(0))|} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{\varepsilon f(x_0(0)) \wedge (x_1^u(t_0,t_0) - x_1^s(t_0,t_0))}{|f(x_0(0))|} + O(\varepsilon^2)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \varepsilon\frac{\Delta^u(t_0,t_0) - \Delta^s(t_0,t_0)}{|f(x_0(0))|} + O(\varepsilon^2) \tag{2.141}$$

(这里 $b \wedge a = a\cdot b^{\perp} = b_2a_1 - a_2b_1 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ 是向量 $a=(a_1,a_2)$ 和 $b=(b_1,b_2)$ 的外积),定义函数

$$\Delta(t,t_0) = \Delta^u(t,t_0) - \Delta^s(t,t_0)$$

$$= f(x_0(t-t_0)) \wedge x_1^u(t,t_0) - f(x_0(t-t_0)) \wedge x_1^s(t,t_0) \tag{2.142}$$

$\Delta(t_0,t_0)=0$ 且当 t 从 $t<t_0$ 变到 $t>t_0$ 时,$\Delta(t,t)$ 变更符号,即 t_0 是 $\Delta(t,t)$ 的简单零点,则当 Σ 充分小时,$d(t_0)$ 在 t_0 处改变符号,这意味着 $W^s(P_\varepsilon)$ 与 $W^u(P_\varepsilon)$ 在 $x_0(0)$ 处横截相交,从而就达到了我们的目的.下面我们将简化函数 $\Delta(t,t_0)$

由 $\dot{x}=f(x)$ 是 Hamilton 系统,则矩阵 $Df(x_0(s))$ 的迹

$$\text{trace}(Df(x_0(s))) = \frac{\partial f_1(x_0(s))}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_0(s))}{\partial x_2}$$

$$= \frac{\partial^2 H(\boldsymbol{x}_0(s))}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 H(\boldsymbol{x}_0(s))}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

(2.143)

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^s(t,t_0) &= Df(\boldsymbol{x}_0(t-t_0))\dot{\boldsymbol{x}}_0(t,t_0) \wedge \boldsymbol{x}_1^s(t,t_0) \\
&\quad + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_1^s(t,t_0) \\
&= Df(\boldsymbol{x}_0(t-t_0))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{x}_1^s(t,t_0) \\
&\quad + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0),t) \\
&\quad + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge Df(\boldsymbol{x}_0(t-t_0))\boldsymbol{x}_1^s(t-t_0) \\
&= \mathrm{trace}(Df(\boldsymbol{x}_0(t-t_0))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{x}_1^s(t,t_0) \\
&\quad + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0),t) \\
&= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0),t) \qquad (2.144)
\end{aligned}$$

两边积分得

$$\Delta^s(t,t_0) - \Delta(t_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(\tau - t_0)) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0(\tau - t_0),\tau)\mathrm{d}\tau$$

由于

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t)) \to \boldsymbol{f}(p_0) = 0 \qquad (t \to +\infty),$$

即

$$\Delta^s(t,t_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{x}_1^s(t-t_0) \to 0 \qquad (t \to +\infty)$$

因此

$$-\Delta(t_0,t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0)) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0(t-t_0),t)\mathrm{d}t$$

同样地

$$\Delta^u(t,t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(x_0(t-t_0)) \wedge g(x_0(t-t_0),t)\mathrm{d}t \tag{2.145}$$

定义 Melnikov 函数

$$M(t_0) = \Delta(t_0,t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0(t-t_0)) \wedge g(x_0(t-t_0),t)\mathrm{d}t$$

则

$$d(t_0) = \varepsilon M(t_0)/|f(x_0(0))| + O(\varepsilon^2)$$

从而我们有下列定理.

定理 2.19 （Melnikov 定理） 设 f 和 g 都是连续可微的映射,若 $\exists\, t_0 \in S$ 是 Melnikov 函数 M 的简单零点,则存在 ε 充分小,使得 $W^s(p_\varepsilon)$ 和 $W^u(p_\varepsilon)$ 横截相交.若 $\forall\, t_0 \in s$ 都有 $M(t_0) \neq 0$,则 $W^s(p_\varepsilon) \cap W^u(p_\varepsilon) = \varnothing$.

作为应用,下面将利用上述定理来测定单摆经扰动后将会出现的混沌性态,考虑平面上的单摆(如图 2.57):一根长为 l 且没有质量的棒,一头自由地连接着支点,而另一头则连接着质量为 m 的小球,小球在摆动过程中受到三个力的作用:地心引力 $-mg$,空气阻力 $-cv$ 和外来的随时间变化的支点处的扭转力 $T(t)$,由 Newton 第二定律,小球的运动状态适合方程

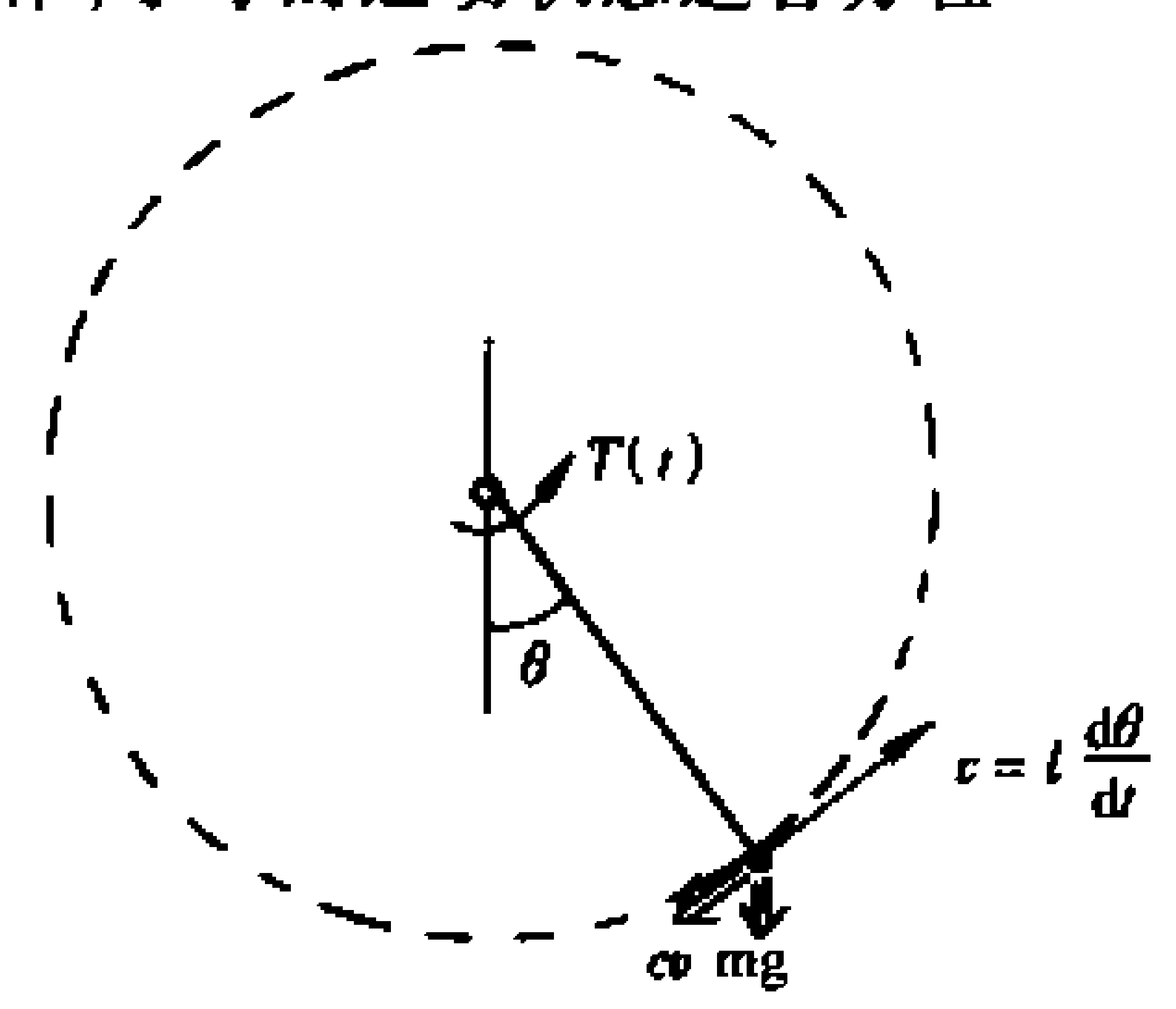


图 2.57　平面上的单摆运动

$$\delta l T(t) - cl\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}) \quad (2.146)$$

令

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}t', s(t') = \frac{l}{gm}T(t'\sqrt{\frac{l}{g}}), \gamma = \frac{c}{m}\sqrt{\frac{g}{l}}, \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t'}$$

简化(2.146)得

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = \delta s(t) - \gamma\dot{\theta} \quad (2.147)$$

当 $\delta = \gamma$ 时,这就是经典的单摆,现取 $s(t) = \cos\omega t$,且 δ 和 γ 是同阶小量,$\gamma = \varepsilon\bar{\gamma}$,和 $\delta = \varepsilon\bar{\delta}$,再取 $v = \dot{\theta}$,则得

$$\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v\\ -\sin\theta\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\ \bar{\delta}\cos\omega t - \bar{\gamma}v\end{pmatrix} \quad (2.148)$$

由于 $\dot{\theta} = v, \dot{v} = -\sin\theta$ 是一 Hamilton 系统,其 Hamilton 能量函数为

$$H(\theta, v) = v^2/2 + 1 - \cos\theta \quad (2.149)$$

而同(2.132)一样,(2.148)是一 Hamilton 系统,关于时间周期的扰动,注意到(2.148)中的向量场与 t 有关,我们还得为(2.148)添上一维,成为

$$\begin{cases}\dot{\theta} = v\\ \dot{v} = -\sin\theta + \varepsilon(\bar{\delta}\cos\omega t - \bar{\gamma}v)\\ \dot{t} = 1\end{cases} \quad (2.150)$$

$$(\theta, v, t) \in S_1 \times R \times S_2$$

这里第一个 S_1 是图 2.57 中圆周,第二个 S_2 是代表周长为 $T = 2\pi/\omega$ 的圆周,由于 $\Sigma_{t_0}\{(\theta, s, t) \in S_1 \times R \times S_2|_{t=t_0}\}$,(2.150)的

所有轨道横截相交，所以我们在Σ_{t_0}上定义 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{t_0}:\Sigma_{t_0}\to\Sigma_{t_0}$ 使得

$$P_\varepsilon^{t_0}(\theta_0,v_0)=(\theta_\varepsilon(T+t_0,\theta_0,v_0),v(T+t_0,\theta_0,v_0))$$

这里$(\theta_\varepsilon(t_0+t,\theta_0,v_0),v_\varepsilon(t_0+t,\theta_0,v_0),t+t_0)$是(2.150)中的以$(\theta_0,v_0,t_0)$为初值的解，进一步地，我们还注意到未扰动的单摆方程

$$\begin{cases}\dot\theta=v\\ \dot v=-\sin\theta\end{cases}\tag{2.151}$$

有两个平衡点(0,0)和$(\pi,0)$，前者是中心，后者是鞍点（见图2.58）. 在点 $p_0=(\pi,0)$ 处，(2.151)的向量场的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\cos\theta & 0\end{bmatrix}\Bigg|_{\theta=\pi}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\tag{2.152}$$

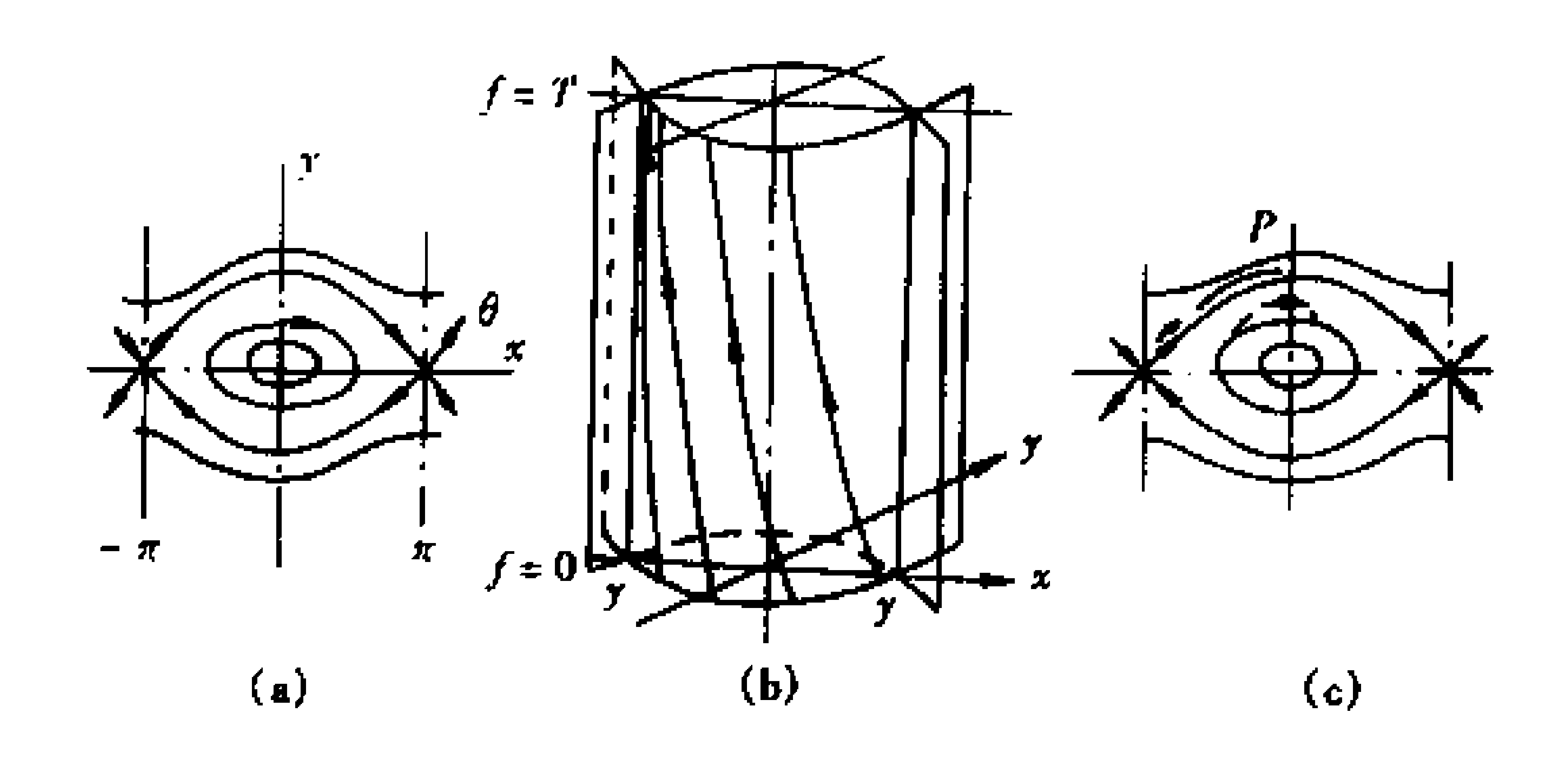


图 2.58

(a) 相平面；(b) 相空间中的流；(c) 未扰动的摆动的相图，$x=-\pi$ 和 $x=\pi$

下面求出(2.151)关于点 $p_0=(\pi,0)$ 的同宿轨道. 设$(v(t),\theta(t))$适合(2.151)且同宿于$(\pi,0)$，则易见（由 2.149）

$$H(\theta,v)=v^2/2+(1-\cos\theta)=2\tag{2.153}$$

由此得

$$v = -\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= -\sqrt{1-(\frac{v^2}{2}-1)^2} = -\frac{v}{2}\sqrt{4-v^2} \tag{2.154}$$

两边积分得

$$v(t-t_0) = 4/(e^{t-t_0}+e^{-t+t_0}) = 2\mathrm{sech}(t-t_0) \tag{2.155}$$

由于在(2.148)中

$$f(\theta,v) = (v,-\sin\theta),\quad g(\theta,v,t) = (0,\bar{\delta}\cos\omega t-\bar{\gamma}v) \tag{2.156}$$

因此,在同宿轨道处

$$f\wedge g = \det\begin{bmatrix} v & -\sin\theta \\ 0 & \bar{\delta}\cos\omega t-\bar{\gamma}v \end{bmatrix} = (\bar{\delta}\cos\omega t-\bar{\gamma}v)v \tag{2.157}$$

所以

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{\delta}\cos\omega t-\bar{\gamma}v(t-t_0))v(t-t_0)\mathrm{d}t$$
$$= 4\bar{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\tau}+e^{-\tau})^{-1}\cos\omega(t_0+\tau)\mathrm{d}\tau-4^2\bar{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\tau}+e^{-\tau})^2\mathrm{d}\tau$$
$$= 4\bar{\delta}\pi(e^{\frac{\pi\omega}{2}}+e^{\frac{-\pi\omega}{2}})^{-1}\cos\omega t_0-8\bar{\gamma}(\text{利用留数方法})$$

从而 $M(t_0)$ 有简单零点,若

$$\bar{\delta}\pi > 2\bar{\gamma}(e^{\pi\omega/2}+e^{-\pi\omega/2})$$

根据 Melnikov 定理,当 ε 充分小时,$P = P_\varepsilon^{t_0}$ 有点$(\pi,0)$的横截同宿点,由定理 2.18 和定理 2.16 得 P 有一个混沌不变集,这也是一个与 Smale 马蹄拓扑等价的集合,关于 Smale 马蹄现象的产生情况可见图 2.59. 图中鞍点为$(\pi,0)$和$(-\pi,0)$.

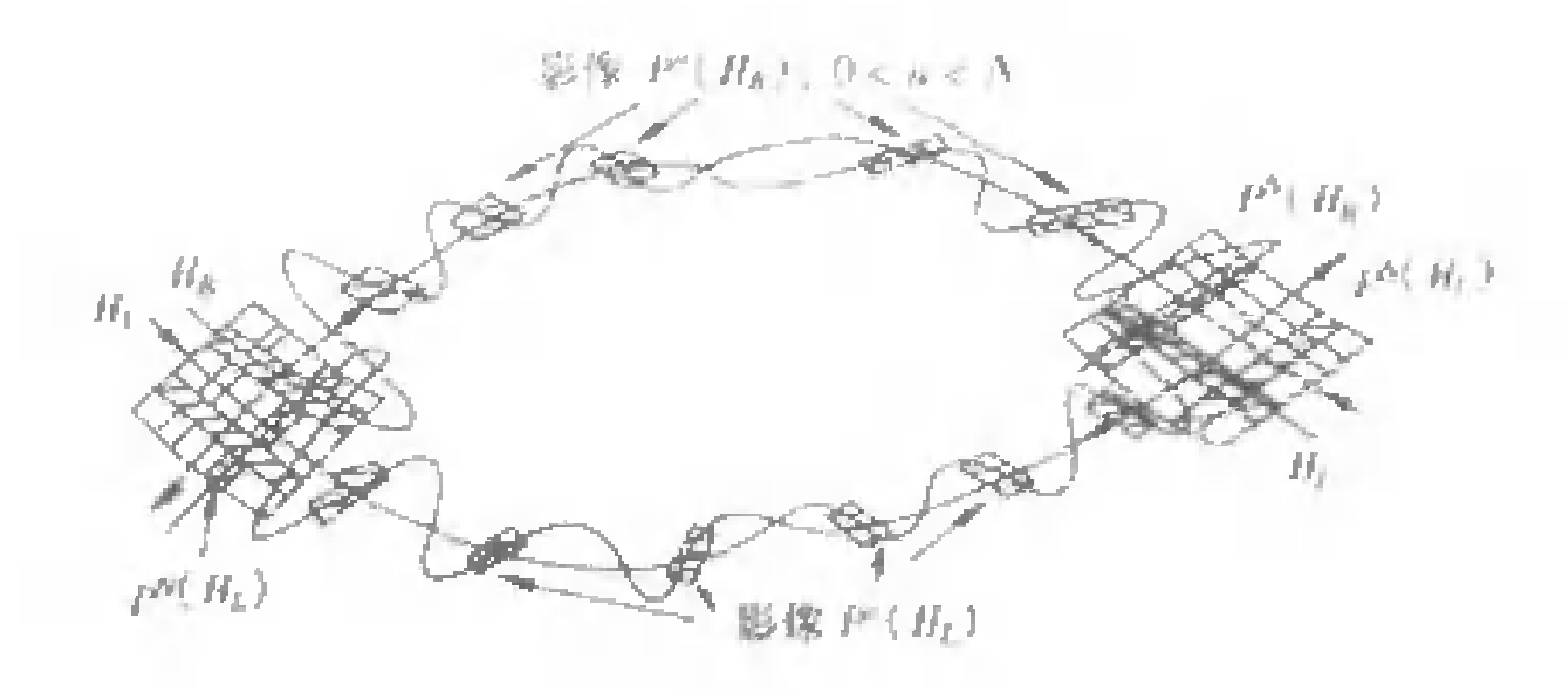


图 2.59　扰动摆动的 Poincaré 映射

当然这完全是同一点，所以这事实上是一个左右两鞍点重合的立体图，横条 H_R 和 H_L 分别沿着同宿轨道的方向在 Poincaré 映射的 N 次作用下成为与自身横截相交的竖条 $\boldsymbol{P}^N(H_R)$ 和 $\boldsymbol{P}^N(H_L)$，而类似于 Smale 马蹄的混沌不变集为

$$A_N = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{P}^N)^k (H_L \cup H_R) \tag{2.158}$$

这里需要知道 Poincaré 映射是可逆的，现证明如下：记 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,\theta_0,v_0) = (\theta(t,\theta_0,v_0), v(t,\theta_0,v_0))$ 分别是 (2.148) 的切向量场和以 (θ_0, v_0) 为初值的解，则

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$$

且

$$D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta & -\varepsilon\bar{\gamma} \end{bmatrix} \tag{2.159}$$

两边对 (θ_0, v_0) 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\boldsymbol{x}) = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)D\boldsymbol{x} \tag{2.160}$$

积分得

$$D\boldsymbol{x}(t,\theta_0,v_0) = \mathrm{e}^{\int_0^t D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{2.161}$$

从而

$$\det(D\boldsymbol{x}(t,\theta_0,v_0)) = \mathrm{e}^{\mathrm{trac}\int_0^t D\boldsymbol{F}(x,\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\epsilon\pi} \tag{2.162}$$

因此

$$\det(D\boldsymbol{P}(\theta_0,v_0)) = \mathrm{e}^{-\epsilon\pi} < 1 \tag{2.163}$$

由此得 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的,且是关于面积收缩的映射.

最后,值得注意的是 $\boldsymbol{P}$ 还有一个包含混沌不变集 A_N 的吸收集.令

$$B = \{(\theta,v) \in S_1 \times R \mid |v| \leqslant \frac{1+\delta}{\gamma}\},$$

设(θ,v)是(2.148)的以$(\theta_0,v_0) \in B$为初值的解,则

$$\begin{aligned} \dot{v}v &= -v\sin\theta + \gamma v\cos t - \gamma v^2 \leqslant (1+\gamma)|v| - \gamma v^2 \\ &\leqslant \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma} - \frac{\gamma v^2}{2} \end{aligned} \tag{2.164}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 + \gamma v^2 \leqslant \frac{(1+\delta)^2}{\gamma} \tag{2.165}$$

积分得

$$v^2(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\pi}(v_0^2 + (\mathrm{e}^{-\pi} - 1)\frac{(1+\delta^2)}{\gamma^2}) \leqslant (\frac{(1+\delta)^2}{\gamma}) \tag{2.166}$$

即

$$|v(t)| \leqslant (1+\delta)/\gamma \tag{2.167}$$

这意味着 $\boldsymbol{P}(B) \subset B$,且对任意 $L > (1+\delta)/\gamma$ 都有 $\boldsymbol{P}$ 是$\{(\theta,v) \mid |v| < L\}$到$\{(\theta,v) \mid |v| \leqslant L\}$的映射,从而

$$A_N = \bigcap_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^n(B) \tag{2.168}$$

是 $\boldsymbol{P}$ 的整体吸收集，当然 $A \supset A_N$. 由于 $\det(D\boldsymbol{P}) = e^{-\gamma T} < 1$，所以 A 是一个零测集，即 $L^2(A) = 0$，不过一般来说，A 不是拓扑可迁的（这一点的证明是困难的），即 A 不是吸引子，所以我们称 A 为混沌吸收集.

§2.6 Lorenz 系统

1963 年美国气象学家 Lorenz 通过对对流实验的研究，得到了第一个表现奇异吸引子的动力学系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \tag{2.169}$$

这是对作为无穷维动力系统的 Layleigh - Benard 热对流问题进行三维的截断或为三维 Galerkin 逼近而得到的. 由于 Lorenz 的该文(1963) 发表在气象科学的杂志上，以至 Lorenz 系统至少到了 1973 年以后才引起人们的注意，但是毫无疑问，(2.169) 是最著名的有限维动力系统的例子，这是因为(2.169) 具有一个非常生动形象的奇怪吸引子 ——Lorenz 吸引子. Lorenz 最早给出了这一奇怪吸引子的图像，比出现这一概念的 Ruelle - Takens[1971] 还早得多，现在人们已认识和把握了无数个各种类型的奇怪吸引子，但其中一大类都是围绕着 Lorenz 吸引子而出现的. 更重要的是，由于(2.169) 是来自于不可压缩流体的热对流问题，因此 Lorenz 吸引子所描述的恰好是黏性流体的湍流（虽然并不严格），从而对于人们认识湍流的发生机制改变传统的 Landau - Hopf 思想具有重要的意义，如今，在数学物理的理论和实验中，什么样的物理现象会产生 Lorenz 混沌流吸引子已成为了一个热门的话题.

§2.6.1 Lorenz 系统的局部分岔

在考查平衡点的局部分岔之前,现先给出(2.169)的吸收集.

注意到在 Layleigh – Benard 问题中,流体从层流变化到湍流,从稳定到不稳定的关键因素是 Rayleigh 数 R 的增长变化. 而(2.169)中 $\rho = (R/R_c)$, 其中 R_c 是临界 Layleigh 数, 所以在(2.169)的参量 σ,ρ 和 β 中,类似地,我们也是固定 $\sigma = 10, \beta = 8/3$,而仅视 ρ 为变化的参量.

首先,注意到这个系统具有整体的吸引集. 作变量替换 $x \to x, y \to y, z \to z + \rho + \sigma$,则(2.169)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -\sigma x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy - \beta(\rho + \sigma) \end{cases} \tag{2.170}$$

由此得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2 + z^2)/2 = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= -\sigma x^2 + \sigma xy - \sigma xy - y^2 - xzy - \beta z^2 + xyz - \beta(\rho + \sigma)z \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 - \beta(\sigma + \rho)z \\ &\leqslant -\sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 + (\beta - 1)z^2 + \frac{\beta^2(\rho + \sigma)^2}{4(\beta - 1)} \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - z^2 + \frac{\beta^2(\rho + \sigma)^2}{4(\beta - 1)} \\ &\leqslant -\frac{\sigma}{\sigma + 1}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\beta^2(\rho + \sigma)^2}{4(\beta - 1)} \end{aligned} \tag{2.171}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2\sigma}{\sigma + 1}(x^2 + y^2 + z^2) \leqslant \frac{\beta^2(\rho + \sigma)^2}{2(\beta - 1)} \tag{2.172}$$

积分得

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leqslant (x^2(0) + y^2(0) + z^2(0))e^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}t} + \frac{\beta^2(\rho+\sigma)^2(1+\sigma)}{4\sigma(\beta-1)}(1 - e^{-\frac{2\sigma}{1+\sigma}t}) \tag{2.173}$$

令

$$L_\rho = \beta(\rho+\sigma)\sqrt{(\sigma+1)/4\sigma(\beta-1)}$$

且

$$U_\rho = \{(x,y,z) \in R^3 \mid |(x,y,z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant L\} \tag{2.174}$$

则，当 $(x(0),y(0),z(0)) \in \bigcup$ 时，

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leqslant L_\rho^2 e^{-\frac{2\sigma}{1+\sigma}t} + L_\sigma^2(1 - e^{1-\frac{2\sigma}{\sigma+1}t}) = L_\rho^2 \tag{2.175}$$

且，对于 $\forall (x(0),y(0),z(0)) \in R^3$，

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}[x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)] \leqslant L_\rho^2 \tag{2.176}$$

因此，令 $\boldsymbol{\varphi}^t(x(0),y(0),z(0)) = (x(t),y(t),z(t))$，得(2.169)的整体吸引集

$$A_\rho = \bigcap_{t\geqslant 0}\boldsymbol{\varphi}^t(U_\rho) \tag{2.177}$$

我们称 A_ρ 为 Lorenz 吸引集，进一步地，A_ρ 的 Lebesque 测度为零，$L^3(A_\rho) = 0$，因为在(2.170)两边对初值求微分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\boldsymbol{\varphi}^t) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} D\boldsymbol{\varphi}^t \overset{\text{def}}{=} DF(\boldsymbol{\varphi}^t)D\boldsymbol{\varphi}^t \tag{2.178}$$

从而

$$\det(D\boldsymbol{\varphi}^t) = \det(e^{\int_0^t DF(\boldsymbol{\varphi}^\tau)d\tau})$$

$$= e^{\mathrm{trace}\int_0^t DF(\boldsymbol{\varphi}^t)d\tau} = e^{-(\sigma+1+\beta)t} \tag{2.179}$$

这也就是说 U_ρ 与 $\boldsymbol{\varphi}^t(U_\rho)$ 的体积之比为

$$\frac{L^3(U_\rho)}{L^3(\boldsymbol{\varphi}^t(U_\rho))} = \frac{\mathrm{Vol}(U_\rho)}{\mathrm{Vol}(\boldsymbol{\varphi}^t(U_\rho))} \approx e^{(\sigma+1+\beta)t} \tag{2.180}$$

所以

$$L^3(A_\rho) = 0 \tag{2.181}$$

下面,为了弄清 A_ρ 的几何图形,先了解(2.169) 在平衡点邻近的局部分岔,令 $\boldsymbol{u} = (x,y,z)$,记

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{pmatrix}, D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \tag{2.182}$$

设 $\boldsymbol{u}$ 是(2.169) 的平衡点,则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$,即

$$x = y, \quad x(\rho - 1 - z) = 0, \quad x^2 = \beta z \tag{2.183}$$

从而有:当 $\rho \leqslant 1$ 时,(2.169) 有惟一的平衡点,$\boldsymbol{p} = (0,0,0)$;当 $\rho > 1$ 时,(2.169) 有三个平衡点

$$\boldsymbol{p} = (0,0,0) \text{ 和 } \boldsymbol{q}^{\pm}$$

$$= (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho - 1) \tag{2.184}$$

为了了解(2.169) 在这些点邻近的性态,我们考查特征行列式

$$\det(D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 - \lambda & -x \\ x & x & -\beta - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\beta+\lambda)[(\sigma+\lambda)(1+\lambda)-\sigma(\rho-z)]-x[x(\sigma+\lambda)+\sigma x]$$

$$= -(\beta+\lambda)(\lambda^2+(1+\sigma)\lambda+(1-\rho)\sigma), \text{当 } u=\rho \text{ 时} \tag{2.185}$$

所以 p 点的三个特征值 $\lambda_k = \lambda_k(p)$ 分别为

$$\lambda_1 = -\beta, \quad \lambda_2 = \frac{-(1+\sigma)-\sqrt{(1+\sigma)^2-4(1-\rho)\sigma}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-(1+\sigma)+\sqrt{(1+\sigma)^2-4(1-\rho)\sigma}}{2}$$

由于当 $\rho<1$ 时 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3<0$，$p$ 是稳定的汇，所以当 $\rho<1$ 时 $A_\rho=\{p\}$. 当 $\rho>1$ 时. $\lambda_1,\lambda_2<0$，但 $\lambda_3>0$，从而 p 成为鞍点，故这意味着(2.169)在 $\rho=1$ 出现分岔. 注意到(2.169)在 $\rho=1$ 点还分岔出另外两个平衡点 $q^\pm$，我们有

$$-\det(Df(q^\pm)-\lambda I) = (\beta+\lambda)(\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+x^2\lambda+2\sigma x^2)$$

$$= \lambda^3+(\beta+\sigma+1)\lambda^2+\beta(\sigma+\rho)\lambda+2\sigma\beta(\rho-1) \tag{2.186}$$

设 $q^\pm$ 的三个特征值为 $\lambda_k=\lambda_k(q^\pm)$，则

$$\lambda_1(q^\pm)\cdot\lambda_2(q^\pm)\cdot\lambda_3(q^\pm) = -2\sigma\beta(\rho-1)<0 \tag{2.187}$$

这里 λ_k 是按如下的次序安排的，当 ρ 从 $\rho\leqslant 1$ 变化到 $\rho>1$ 时 $\lambda_k(p)$ 分别连续地变化到 $\lambda_k(p),\lambda_k(q^\pm)$，$k=1,2,3$. 由于当 $\rho\leqslant 1$ 时恒有 $\lambda_1(p)<0,\lambda_2(p)<0$，由连续性必有 $\mathrm{Re}\lambda_1(q^\pm)<0$，$\mathrm{Re}\lambda_2(q^\pm)<0$(这里 $\lambda_1(q^\pm),\lambda_2(q^\pm)$ 可能成为复数)，由(2.188)式得 $\lambda_3<0$，因此，q^+ 都是稳定的汇，它们可能是结点或是焦点.

因此，当 ρ 穿过 1 时，(2.169)在 $\rho=1$ 点出现分岔，其稳定的结点分岔出一双曲鞍点和二个稳定的汇，这也就是 §2.1.8 的 Pitchfork 分岔. 由此可见，在 ρ 从小于 1 变到大于 1 时，吸引集 A_ρ

从单点集$\{p\}$变成为连接 p 和$q^{\pm}$ 的两异缩轨道之并(见图2.65).

接下来我们继续观察当 $\rho>1$ 时,无论怎样变化都有 $\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)<0$, $\lambda_3(p)>0$, 因此 p 点结构始终是稳定的, 对于任何 $\rho>1$, 由(2.188)$\lambda_k(q^{\pm})$, $k=1,2,3$, 绝不会经过复平面中的原点, 但是, 随着 ρ 的增长, 可能有 $\lambda_1(q^{\pm})$ 和 $\lambda_2(q^{\pm})$ 到达虚轴.

若 $\det(Df(q^{\pm})-\lambda I)=0$ 有一对纯虚根 λ_1,λ_2,则必有

$$\lambda_1+\lambda_2=0, \quad \lambda_3=-(\sigma+\beta+1) \tag{2.188}$$

从而,由

$$\begin{aligned}&\det(Df(q^{\pm})-\lambda I)\\&=\lambda^3+(\beta+\sigma+1)\lambda^2+\beta(\sigma+\rho)(\lambda+\beta+\sigma+1)\\&\quad+2\sigma\beta(\rho-1)-\beta(\sigma+\rho)(\beta+\sigma+1)\\&=(\lambda+\beta+\sigma+1)(\lambda^2+\beta(\sigma+\rho))\\&\quad+\beta(\rho(\sigma-\beta-1)-\sigma(\beta+\sigma+3))=0\end{aligned} \tag{2.189}$$

得

$$\beta[\rho(\sigma-\beta-1)-\sigma(\beta+\sigma+3)]=0 \tag{2.190}$$

所以当

$$\begin{aligned}\rho=\rho_h&=\frac{\sigma(\beta+\sigma+3)}{\sigma-\beta-1}\\&=\frac{10(8/3+10+3)}{10-8/3-1}=\frac{470}{19}\approx 24.74\end{aligned} \tag{2.191}$$

时,$q^{\pm}$ 的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_1&=i\sqrt{\beta(\sigma+\rho_h)},\\\lambda_2&=-i\sqrt{\beta(\sigma+\rho_k)},\\\lambda_3&=-(\sigma+\beta+1)\end{aligned} \tag{2.192}$$

所以，当 ρ 满足 $\rho < \rho_h$，$\rho = \rho_h$ 和 $\rho > \rho_h$ 时，$\lambda_k(q^{\pm})$，$k = 1,2$ 分别为

$$\text{Re}\lambda_k(q^{\pm}) < 0, \text{Re}\lambda_k(q^{\pm}) = 0 \text{ 和 } \text{Re}\lambda_k(q^{\pm}) > 0$$

由于在 ρ 的变化过程中，$\lambda_3 < 0$ 始终没有变，所以由中心流形定理可见，(2.169) 的分岔现象只出现在 $\lambda_1(q^{\pm})$ 和 $\lambda_2(q^{\pm})$ 的特征向量所张成的中心流形中. 在此中心流形中，$q^{\pm}$ 由稳定的焦点，变成为不稳定的源，因此(2.169) 在 $\rho = \rho_h$ 点邻近出现的 Hopf 分岔，即在 $q^{\pm}$ 邻近分岔出周期轨道. 计算表明，这些周期轨道是随着 ρ 从 $\rho < \rho_h$ 时逐渐消失的，即 Hopf 分岔的喇叭口是朝向 $\rho < \rho_h$ 一方，所以(2.169) 在平衡点 $q^{\pm}$ 处当 $\rho = \rho_h$ 时产生次临界的 Hopf 分岔，当 $\rho > \rho_h$ 时吸收集 A_ρ 已是非常复杂，这就是下一节所关心的内容.

§2.6.2 Lorenz 奇怪吸引子

广义地说，集合 $A \subset R^3$ 称为 Lorenz 奇怪吸引子，若 A 是 Lorenz 动力系统(2.169) 的混沌吸引子. ρ 为多少时，系统(2.169) 才具有上述的吸引子将在下一节给出，这里所关心的是狭义的 Lorenz 奇怪吸引子，即 Lorenz[1963] 所研究的 $\rho = 28$ 时的 A_ρ(见 2.177).

由 §2.6.1 节知，鞍点 p 的不稳定流形是一曲线，当然从 p 的邻近出发的轨道总是与 $W^u(p)$ 越来越靠近，因此，我们非常容易地利用计算机找到 $W^u(p)$，图 2.60 所示的是 $\rho = 28$ 时，$W^u(p)$ 自右边出发的前 40 圈左右的图形. 实际上，当 $\rho = 28$ 时，$W^u(p)$ 是没有端点的，它在 A_ρ 中不断地绕圈子，且任一以 $W^u(p)$ 中点为初值的轨道都在 A_ρ 中稠密. 下面我们借助于其他映射来考查 A_ρ.

为以后方便起见，先对 $\rho > 1$，建立(2.169) 的 Poincaré 映射，在平面 $z = \rho - 1$ 中，取一闭集 $\Sigma = \Sigma_\rho$

$$\{q^+, q^-\} \subset \sum \subset \{(x, y, z) \mid z$$

$$= \rho - 1, |xy| < \beta(\rho - 1)\} \cup \{q^+, q^-\} \quad (2.193)$$

Σ 的中线 D 位于 p 的稳定流形 $W^s(p)$ 上，而且任何以 $\Sigma \setminus D$ 中点为初值的轨道必然返回到 Σ 中，由(2.169)，当轨道处于 Σ 内部时有

$$\dot{z} = -\beta z + xy = -\beta(z-1) + xy < 0, \quad (2.194)$$

因此轨道与 Σ 横截相交，而且都是自上而下地穿过 Σ，从而存在着 Poincaré 映射 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_\rho: \Sigma \to \Sigma$，当 $\rho = 28$ 时 Σ 的图形见图 2.60～2.61，当 $\rho \neq 28$ 时 Σ 的图形也类似地确定，不过需注意的是，本节和下一节的图形都是为理解方便而作的，没有精确性可言.

下面我们仅考查 $\rho = 28$ 的情形，如图 2.62 所示，记 D 为 v 轴，而记与 D 垂直且平分 Σ 的为 u 轴，Σ_+ 和 Σ_- 分别是 Σ 中 $u > 0$ 和 $u < 0$ 的部分，则 $\boldsymbol{P}$ 在 Σ 上不连续，当点从 Σ_- 中趋于 D 时其在 $\boldsymbol{P}$ 作用下的像则趋于一固定点 $\boldsymbol{b}^+$，当点从 D 的右边趋于 D 时，其在 $\boldsymbol{P}$ 作用下的像则趋于另一固定点 $\boldsymbol{b}^{-1}$，即 $\boldsymbol{P}(D_-) = \boldsymbol{b}^+$，$\boldsymbol{P}(D_+) = \boldsymbol{b}^-$，当然，$\boldsymbol{P}$ 在 D 上是没有定义的，与 D 相交轨道必然被 $\boldsymbol{P}$ 所吸引，即最终到达 $\boldsymbol{P}$，在此以后，我们可以把 $\boldsymbol{P}$ 看成(u, v)的函数.

数值计算表明，$\boldsymbol{P}$ 的作用可以看成是图 2.62 的形式，它水平方向伸展，在铅垂方向收缩，而且还有函数 $f = f_\rho$ 和 $g = g_\rho$，使得 $\boldsymbol{P}(u, v) = (f(u), g(u, v))$，$f = f_\rho$ 是一不连续的函数，称其为 Lorenz 映射，图像为图 2.62.

由图 2.63 可见，$\boldsymbol{P}$ 与 Smale 马蹄映射是很相似的，类似于 Smale 马蹄，我们定义闭集 $A = A_\rho$:

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^k\left(\sum\right)$$

值得注意的是 A 不是真正的不变集，因为动力系统 $\boldsymbol{P}^k$ 在集合

$$D = \{\boldsymbol{x} \in A \mid \exists\, i \geqslant 0, 使得\ \boldsymbol{P}^i(\boldsymbol{x}) \in D\} \quad (2.195)$$

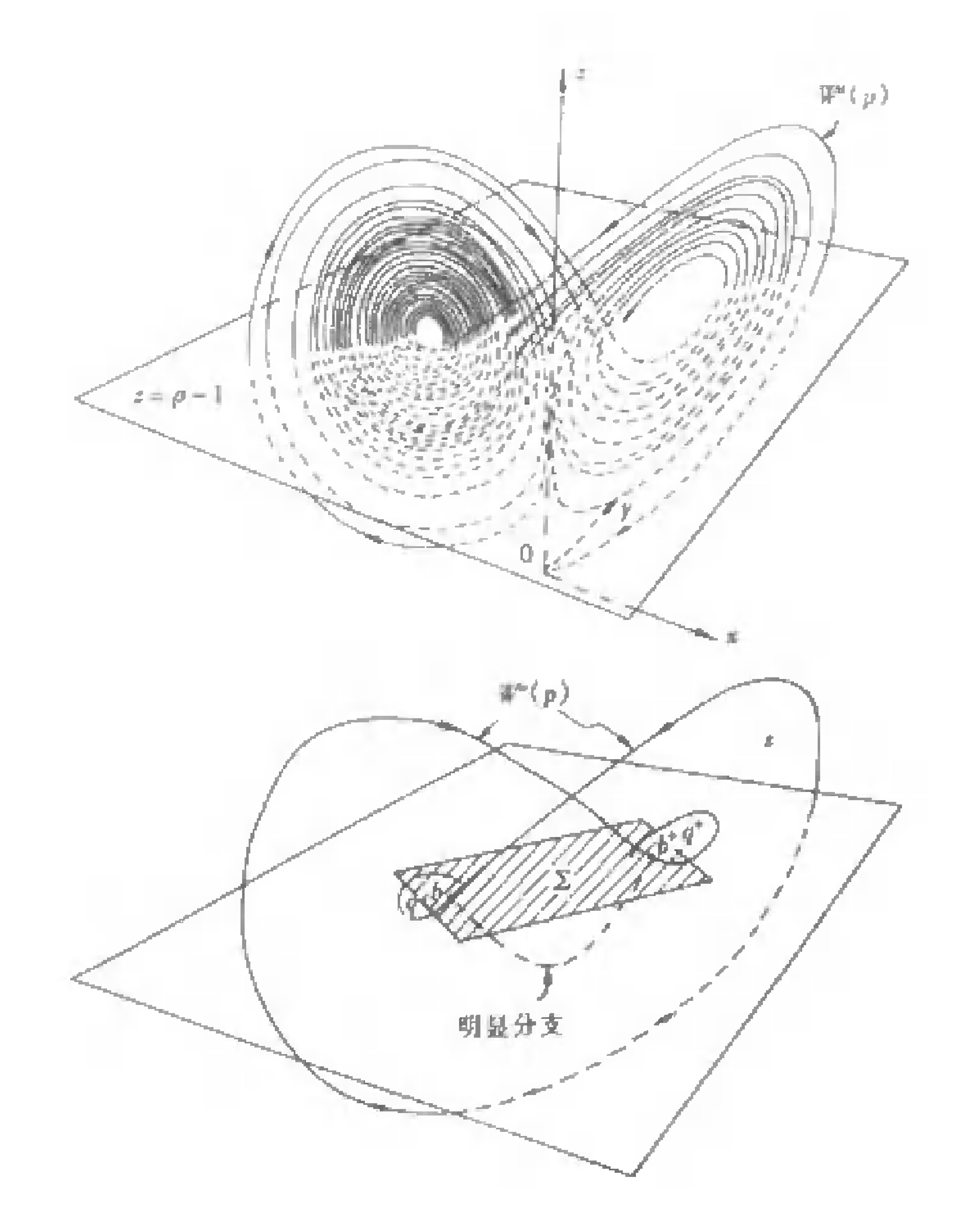


图 2.60　Lorenz 方程的无数个解,其中 $\sigma=10,\beta=\frac{8}{3},\rho=28$

上是没有定义的,但不难想象,$A_\rho=\bigcup_{t\geq0}\varphi^t(A_\rho)$,$\rho=28$ 或者说 A_ρ 是由过 A_ρ 的同纬线(suspension line) 所组成的.

类比于图 2.43,我们把图 2.62 中的Σ_- 和Σ_+看作是 V_0 和 V_1,而把 $P(\Sigma_-)$和 $P(\Sigma_+)$看作是 H_1 和 H_0,则可以把 $P^k:\Sigma\to\Sigma$看作是双边符号动力系统,且对于 $x\in\Sigma$有对应

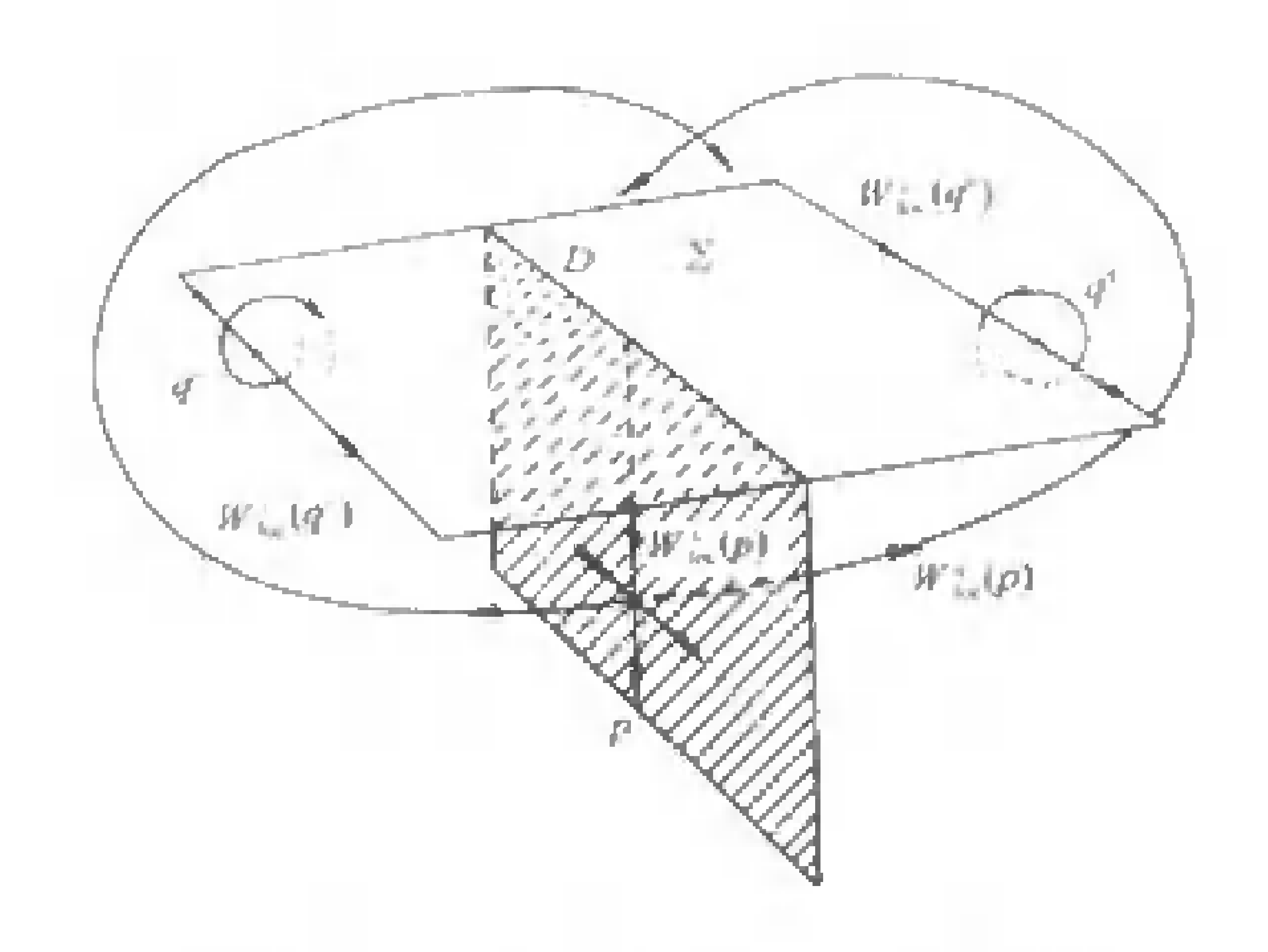


图 2.61　$\rho = 28$ 时 Lorenz 系统的横截面

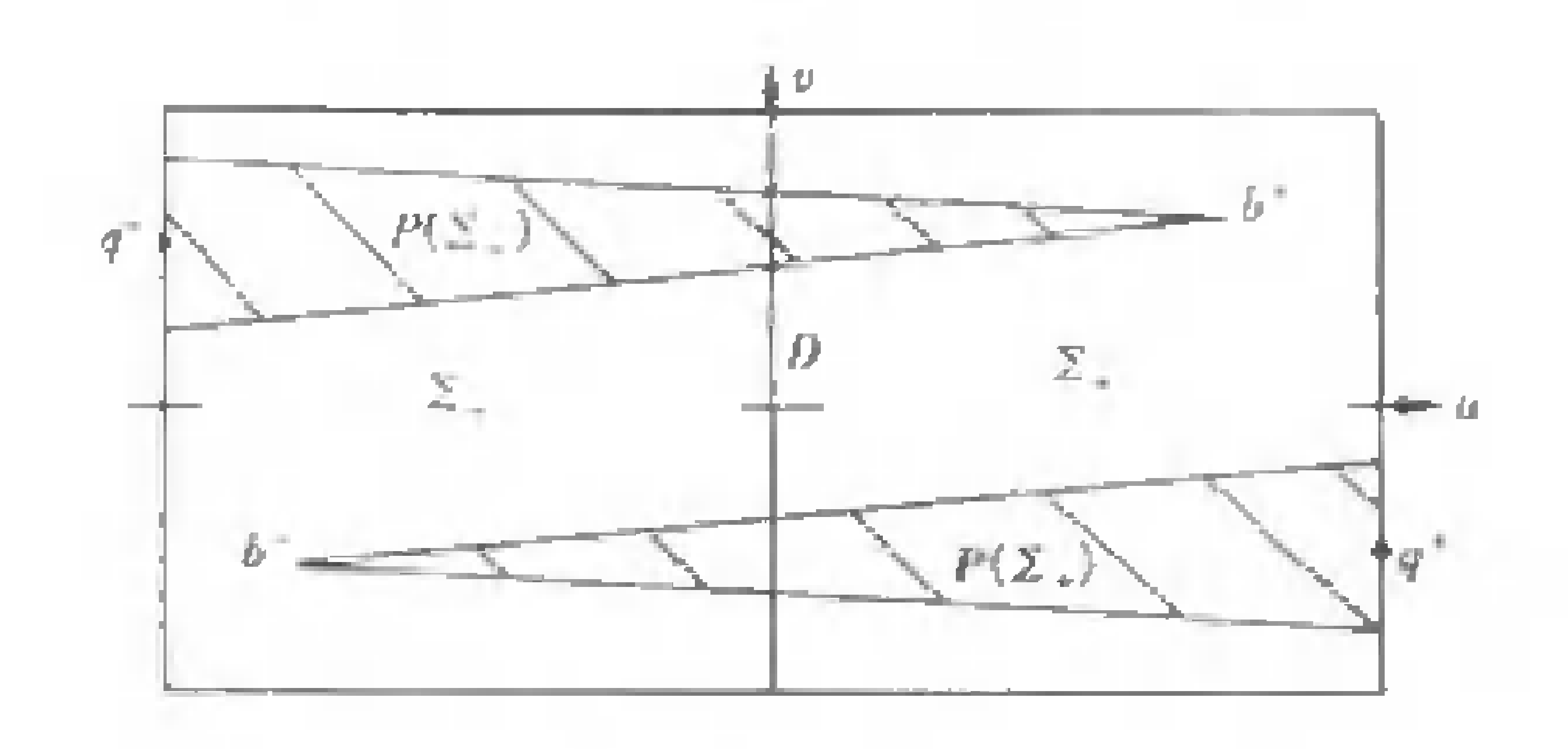


图 2.62　$\rho = 28$ 时 Poincaré 映射 P　P_ρ

$$x \to (\cdots a_{-n}(x)\cdots a_{-1}(x)a_0(x)a_1(x)\cdots a_n(x)\cdots) \tag{2.196}$$

其中 $a_k(x)=1$,若 $P^k(x)\in\sum_1$, $a_k(x)=0$,若 $P^k(x)=0$, $k\in z$. 由于 A 不是 P 的不变集,相对于 smale 马蹄的而言,以上的对应要复杂一些,因为当 $x\in D$ 时意味着有 k 使得 $P^k(x)\in D$,从而这种点将没有双边符号列与之对应. 不过 D 是一个疏朗的 Cantor 点集,相对于 A 来说是可以忽略的,在 A 的定义中还可见,A 在 $b^{\pm}$ 邻近分别由一束以 b^{+} 为交点的线段组成,这两束线段与垂线 $u=$

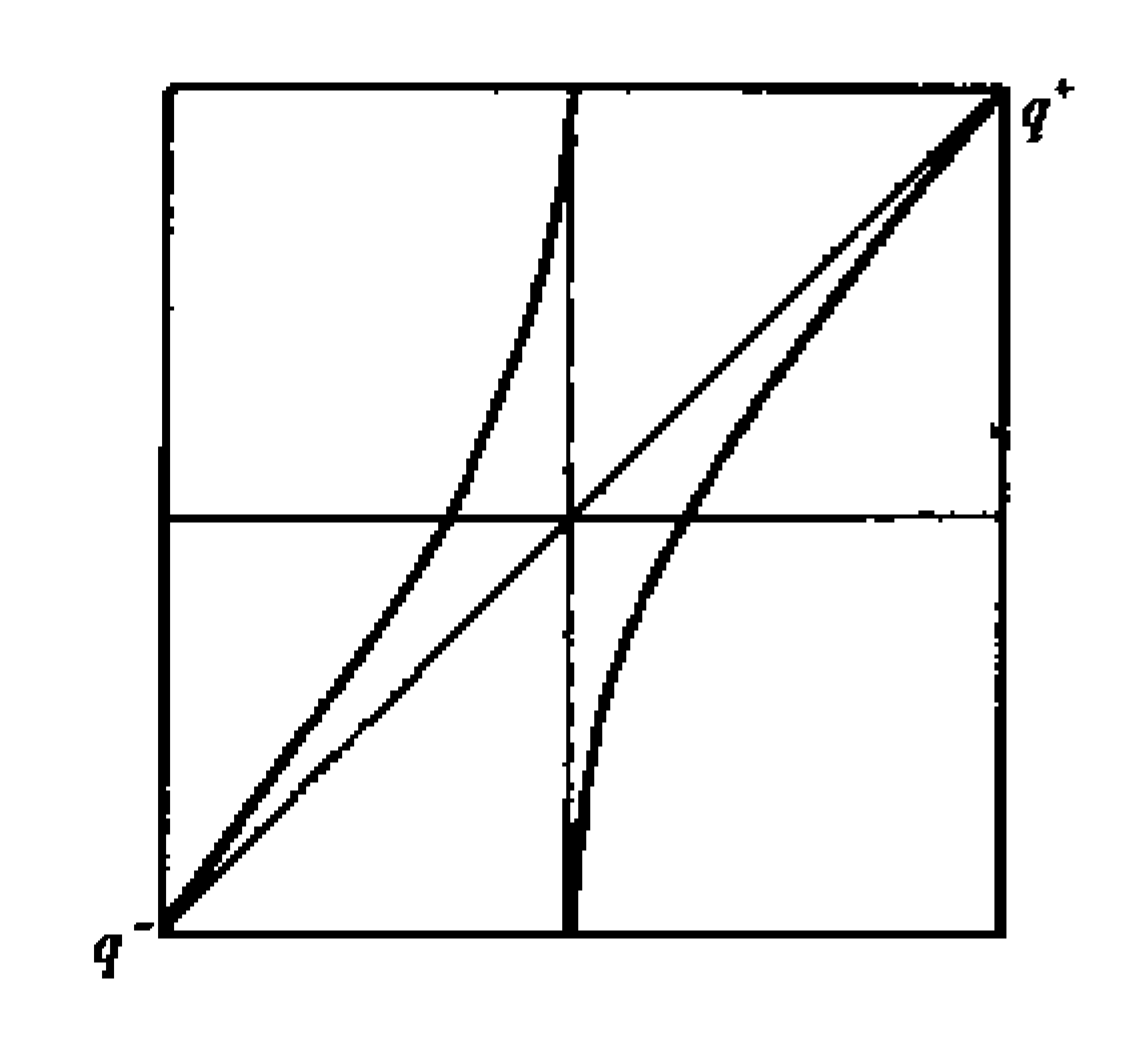


图 2.63　$\rho = 28$ 时 $f = f_\rho$

const 都相交成 Cantor 集，因此这两束线段可以称之为 Cantor 线，从而 $A = A_\rho$ 在 $W^u_{Loc}(\boldsymbol{P})$ 邻近就是 Cantor 面或称其为 Cantor 书，其中书页之间是稀疏相间的.

关于 $\boldsymbol{P}: \Sigma \to \Sigma$ 混沌性质，我们注意到下列情况. 设

$$\boldsymbol{W} = \{\cdots s_{-k} \cdots s_{-1} s_0 s_1 \cdots s_k \cdots) \mid s_k, s_{-k} \in \{0,1\}\} \quad (2.197)$$

设 T 是由(2.196)所定义的映射，即 $T: A \to \boldsymbol{W}$，但实际上 T 在 D 上没有定义，不过可以把

$$T: A \setminus D \to \boldsymbol{W} \quad (2.198)$$

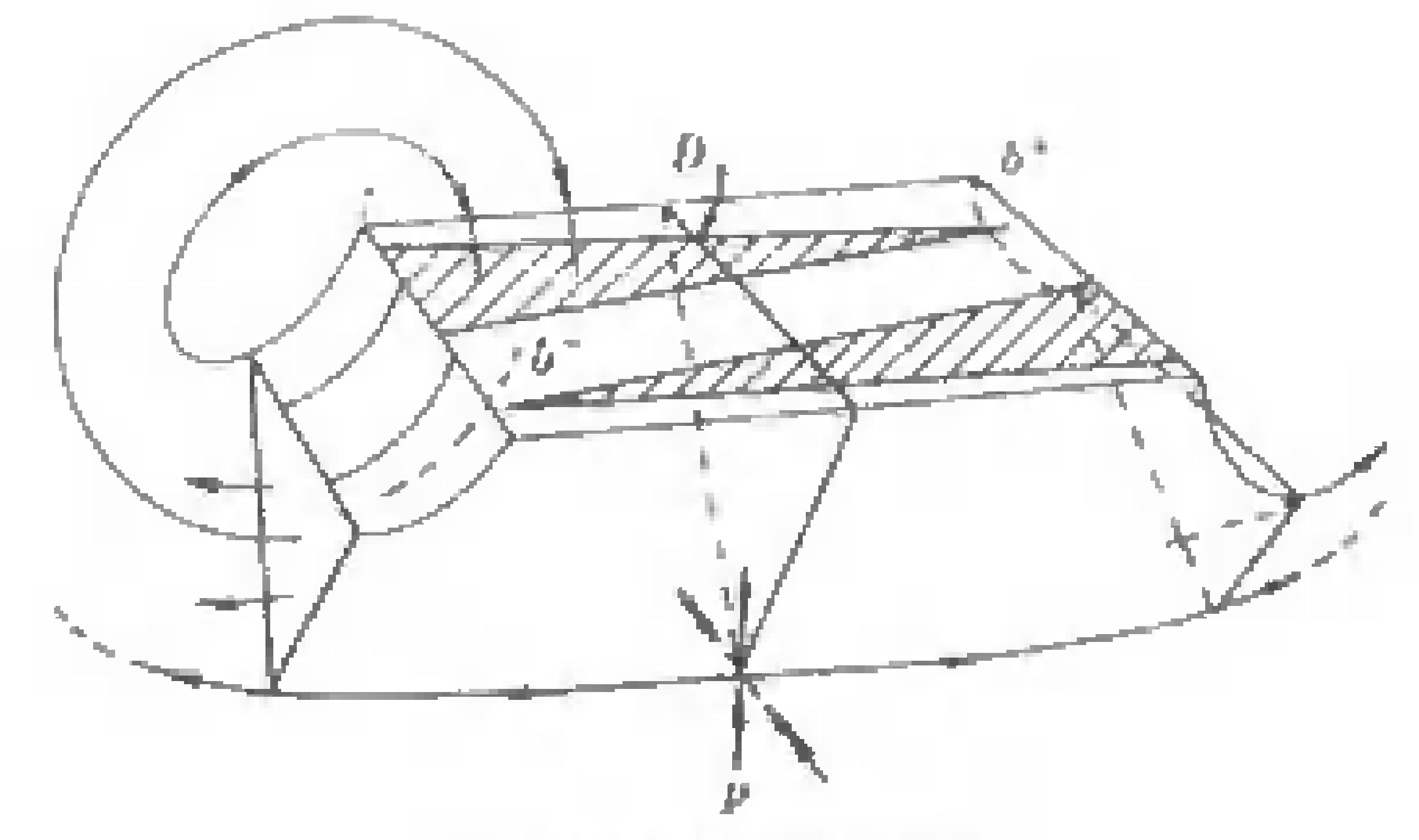
看成是同胚映射，从而 $\boldsymbol{P}^k, A \setminus D \to A \setminus D$ 是混沌的动力系统. 因为 $\sigma^k: \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$ 是混沌的，其中 σ 是左移映射，再者，由于 D 是 Cantor 点集和 A 是 Cantor 线集，所以 D 相对于 A 来说是低维的集合，从而

$$A = \bigcup_{t \geq 0} \boldsymbol{\varphi}^t(A) \qquad (\boldsymbol{\varphi}^t \text{ 是 Lorenz 动力系统})$$

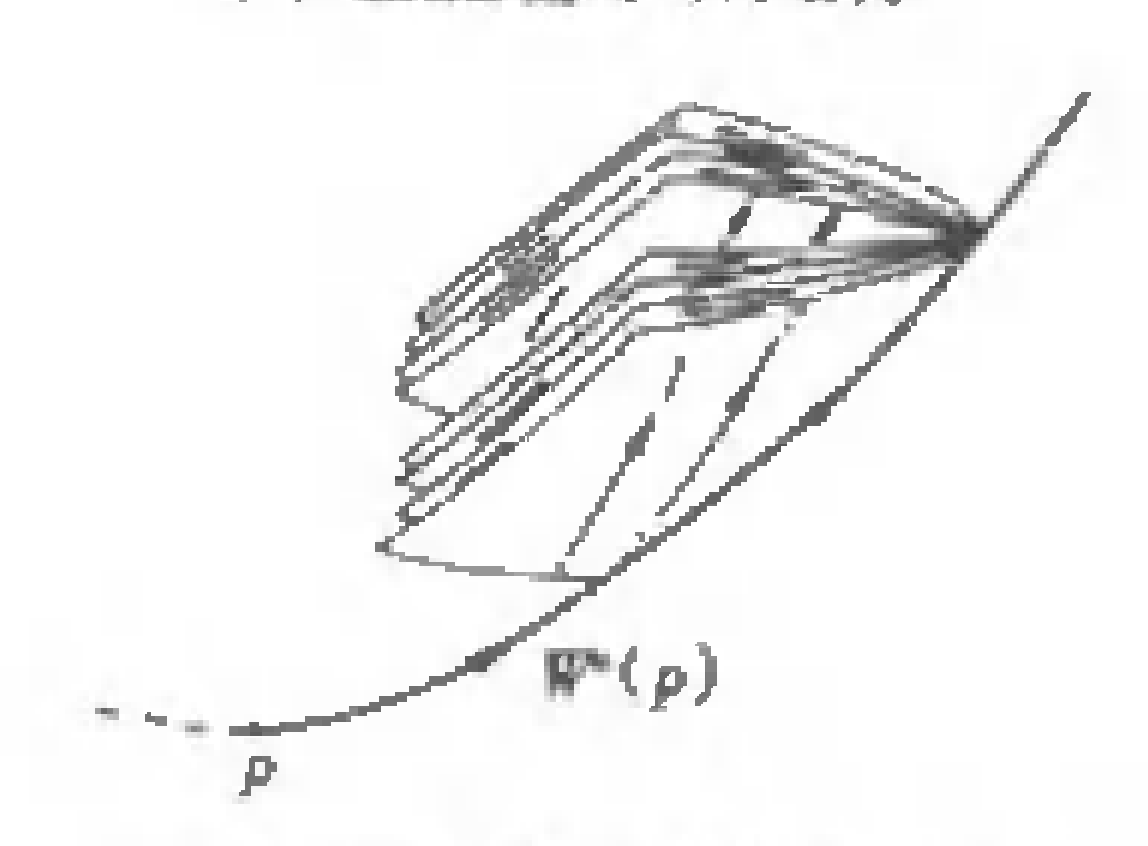
必然是 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 的混沌集，而 A 又是吸引集，所以 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 是混沌的动力系统.

进一步地，从图 2.64 还不难想象

$$\overline{\boldsymbol{W}^u(\boldsymbol{p})} = A \quad (2.199)$$



(a) Lorenz 流的几何结构



(b) Lorenz 吸引子的局部几何结构

图 2.64

即不稳定流形 $W^u(p)$ 的闭包是吸引集 A 本身，同样不难想象 $\forall x \in W^u(p)$，有轨道 $\varphi^t(x)$ 在 A 中稠密，即 A 是拓扑可迁的，从而 A 是吸引子且出现混沌，即为奇怪吸引子.

下一节将考查当 ρ 增长时，吸引集 A_ρ 和系统 φ^t 的变化状况.

§2.6.3　Lorenz 系统的整体分岔

在 §2.6.1 中，我们仅考查了 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad \sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \qquad \sigma = 10, \beta = 8/3 \qquad (2.200)$$

在平衡点邻近的拓扑结构的变化，从而找到了两个分岔值 $\rho = 1$ 和 $\rho = \rho_h \approx 24.74$. 若从(2.200) 的整体结构看，我们还可找到其他分岔值.

由于在 $\rho = 1$ 处的 Pitchfork 分岔以及吸引集 A_ρ 的变化情况已非常清楚，我们考虑(2.169) 和 A_ρ 当 $\rho > 1$ 的情形.

由 §2.6.2 可见，我们已在 $\Sigma = \Sigma_\rho$ 上定义 Poincaré 映射 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_\rho$，而且同 §2.6.2 一样，$\boldsymbol{P}_\rho$ 在水平轴 —— u 轴上的投影就是一维的 Lorenz 映射 $f_\rho(u)$（近似地看）. 在本节中，我们将利用 $\boldsymbol{P}_\rho$ 和 f_ρ 的基本结构的变化来认识 A_ρ 的变化情况，从图 2.65 不难看出，ρ 在区间(1,10] 中，A_ρ 的拓扑结构不会有任何变化，A_ρ 依然是由连结 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}^{\pm}$ 的两条异缩轨道 $W^u(\boldsymbol{p})$ 所组成的.

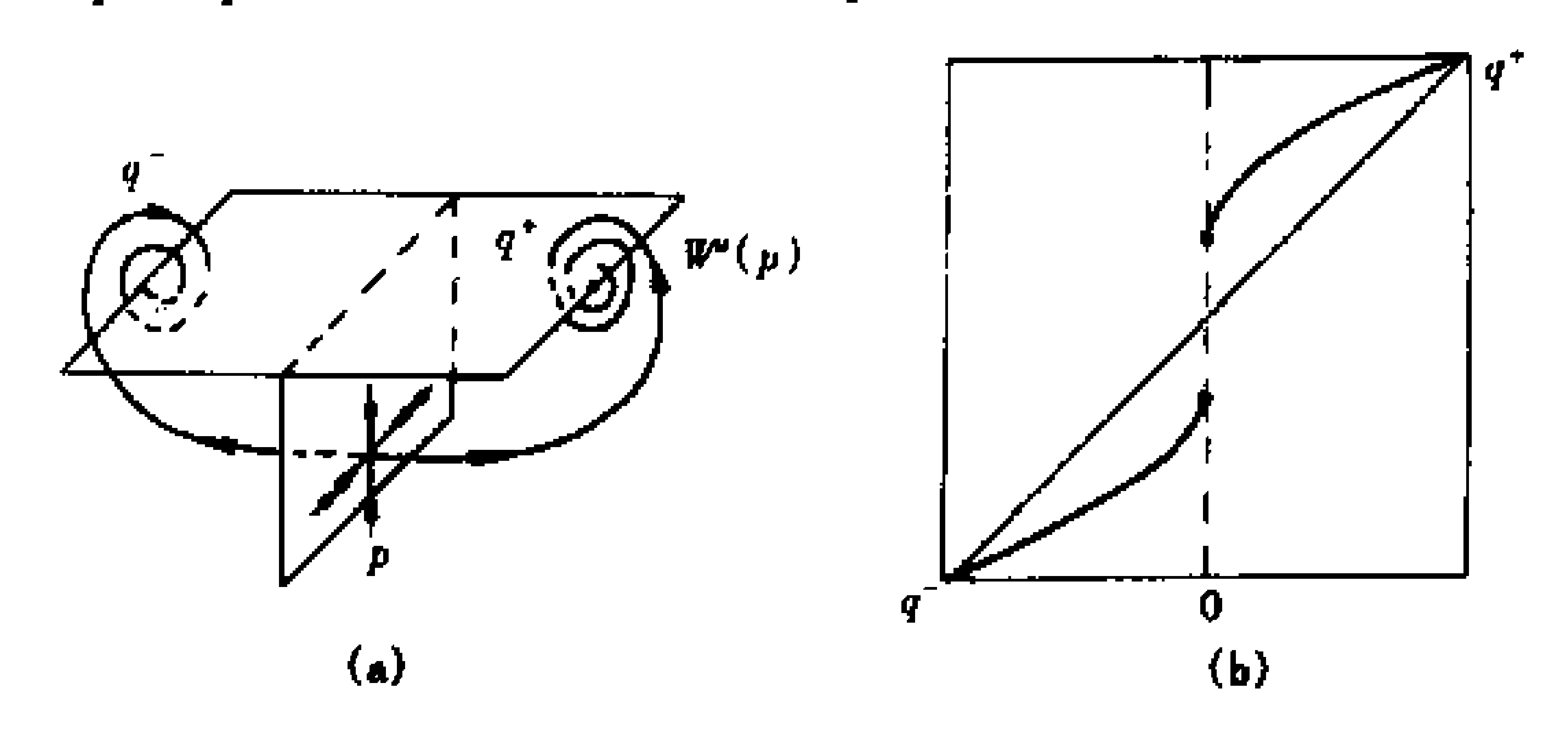


图 2.65 $\rho = 10, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$ 时的 Lorenz 系统. (a) 流，(b) 映射 f_ρ

从图 2.66 中还可见当 $\rho \approx 10$ 时，$\boldsymbol{P}_\rho$ 的不变集

$$A_\rho = \bigcap_{k \geq 0}^{\infty} \boldsymbol{P}_\rho^k(\sum) = \{\boldsymbol{q}^+\} \cup \{\boldsymbol{q}^-\} \qquad (2.201)$$

随着 ρ 的增长图 2.66 中的 $\boldsymbol{P}(\Sigma_\pm)$不断地接近中线，而且必然存在一时刻 ρ_t 当 $\rho = \rho_t$ 时 $\boldsymbol{P}(\Sigma_+)$的顶点恰好碰到 D，也就是说，图 2.65 中的异缩轨道分别成为两个同缩轨道，由数值计算可得，$\rho_t \approx 13.926$，在图 2.67 和图 2.68 中：我们给出 $W^u(\boldsymbol{p})$，f_ρ，$\boldsymbol{P}_\rho$ 的图.

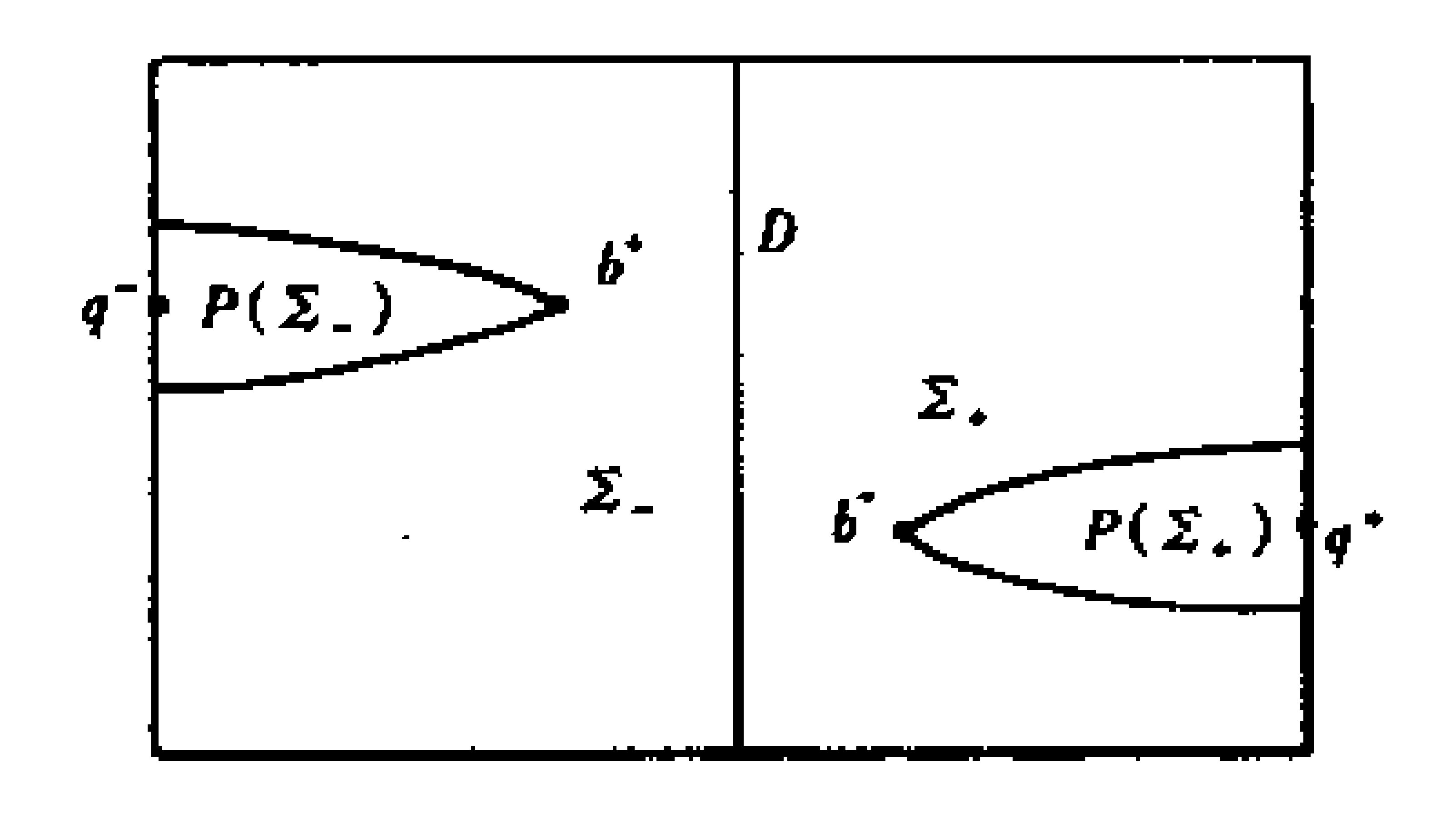


图 2.66　当 $\rho \approx 10$ 时的 $P = P_\rho$

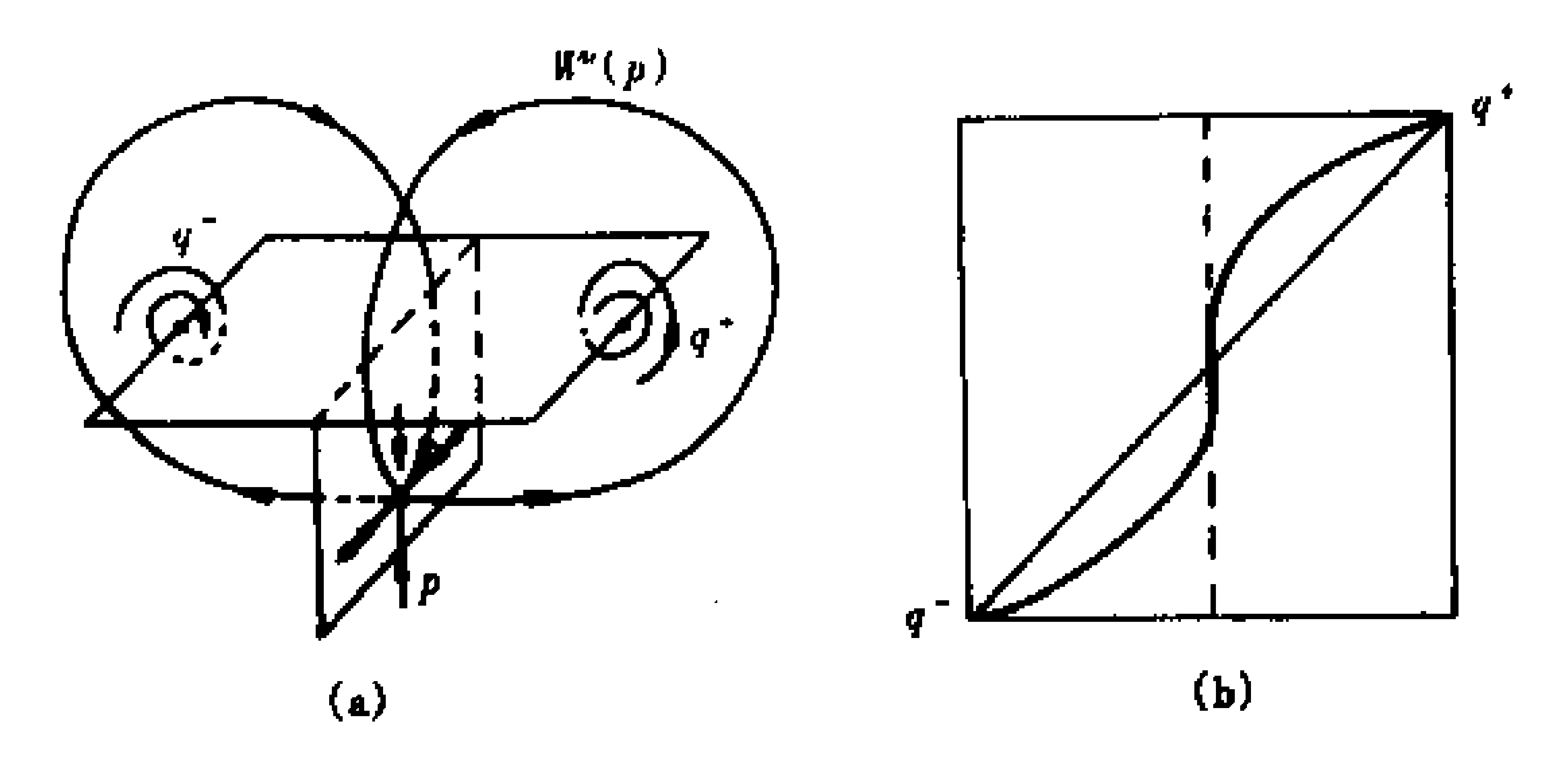


图 2.67　$\rho = \rho_t \approx 13.926$ 时的 Lorenz 系统,(a) 流,(b) 映射 f_ρ

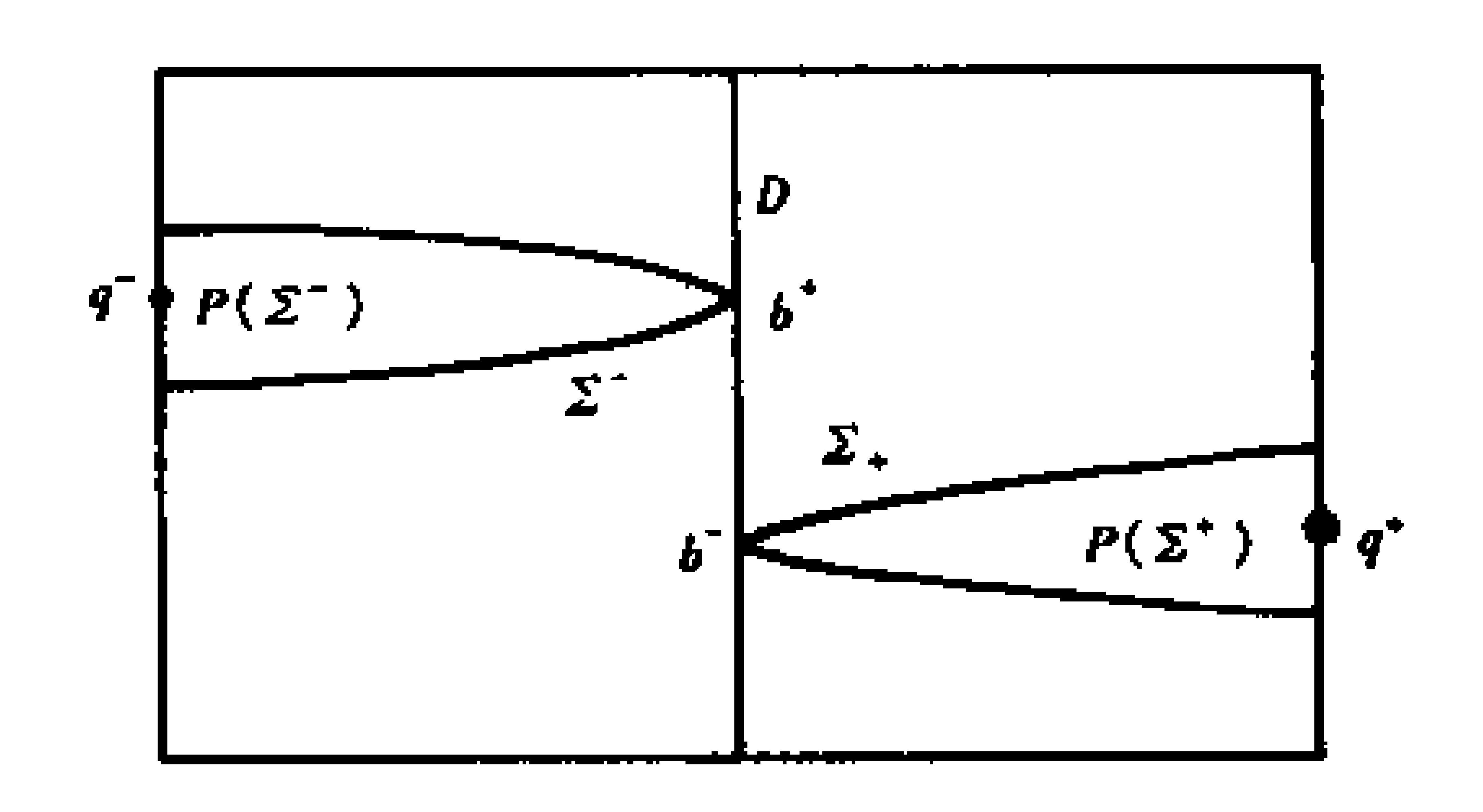


图 2.68　$\rho = \rho_t \approx 13.926$ 时的 $P = P_\rho$

从图 2.67 还可以看到，当 $\rho=\rho_t$ 时，P_ρ 的不变集 $A_\rho=\bigcap_{k\geqslant 0}^{\infty} P_\rho^k(\Sigma)$ 是两条连接 q^- 与 b^+ 和 q^+ 与 b^- 的直线段之并，从而 $A_\rho(\rho=\rho_t)$ 是两片分别以 $W_u(p)$ 的两条同缩轨道为边界的叶子，这两片叶子仅在 p 点相交，还有，这时的 f_ρ 的图像已连成一条曲线，不过 f_ρ 在零点没有定义，f_ρ 在此点的切线是一铅垂线.

下面我们继续观察当 ρ 越过 ρ_t 时 $W^u(p)$，f_ρ 和 P_ρ 的图形.

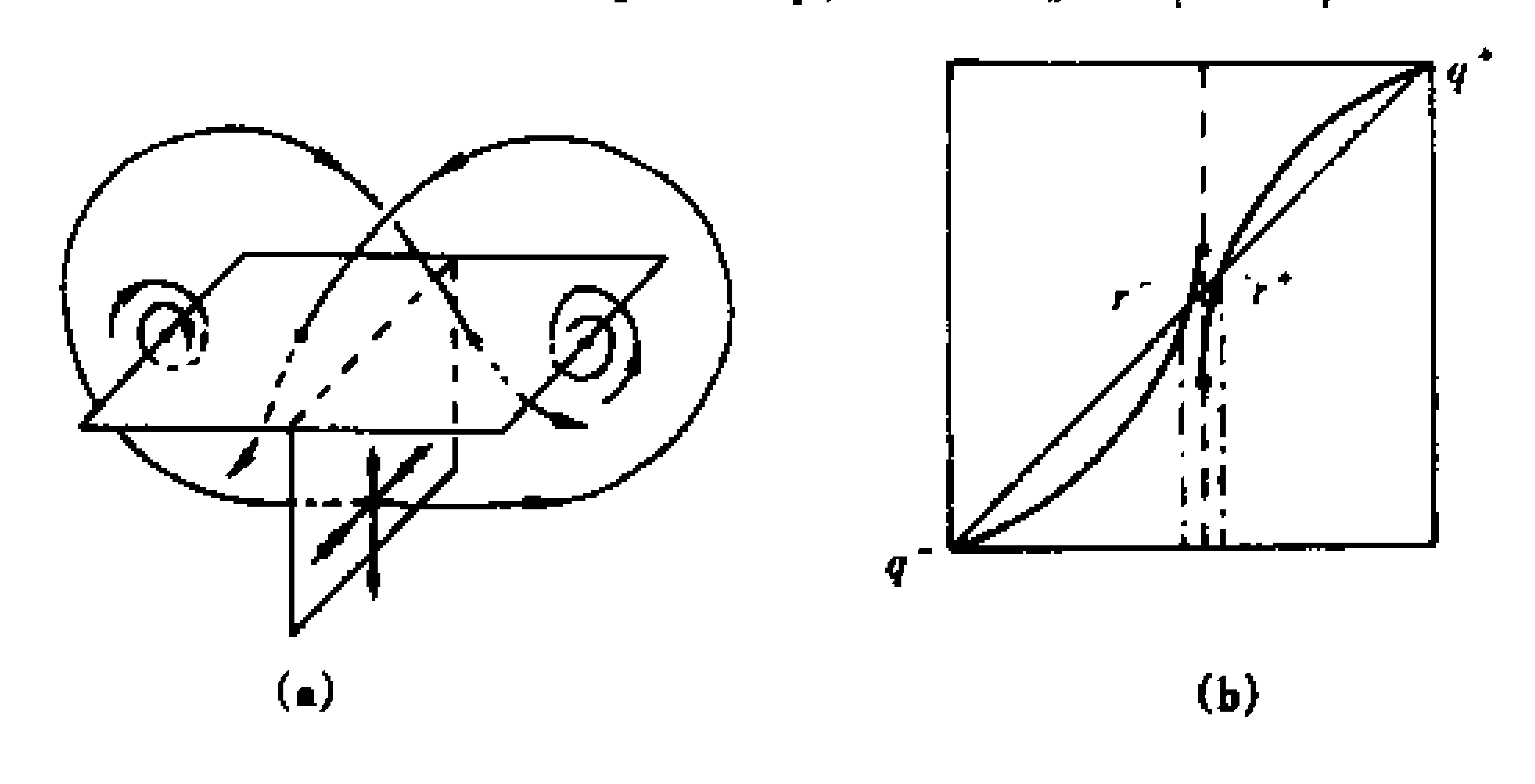


图 2.69　$\rho>\rho_t$ 时的 Lorenz 系统，(a) 流，(b) 映射 f_ρ

从图 2.69 可见，图 2.67 中所示的围绕着 q^+ 的同缩轨道已成为连接 p 和 q^- 的异缩轨道. 同样地，另一同缩轨道已成为连接 q^+ 和 p 的异缩轨道，从而原来的同缩轨道都已裂开，此时的 A_ρ 已不再是两片简单的叶子，而已经无法用简单的语言来描述了，实际上 A_ρ 已是分形集，它含有一个混沌集为其子集. 非常显然，当 ρ 越过 ρ_t 时，A_ρ 的拓扑结构已发生了显著的变化，通常我们把这种由同缩轨道的破裂而产生的分岔称为同缩分岔或为同缩爆发 (homoclinic - explosion).

为了对 A_ρ，$\rho>\rho_t$ 有更好的了解，我们借助于图 2.69 和图 2.70. 从图 2.69 中可见，f_ρ 出现两个新的不动点 $r^\pm$，实际上，r^+ 和 r^- 对应的分别是围绕着 q^+ 和 q^- 的周期轨道，因为对于 $\rho>\rho_t$，且 ρ 与 ρ_t 相距不太远时，两平衡点 $q^\pm$ 都是稳定的焦点，这也就是

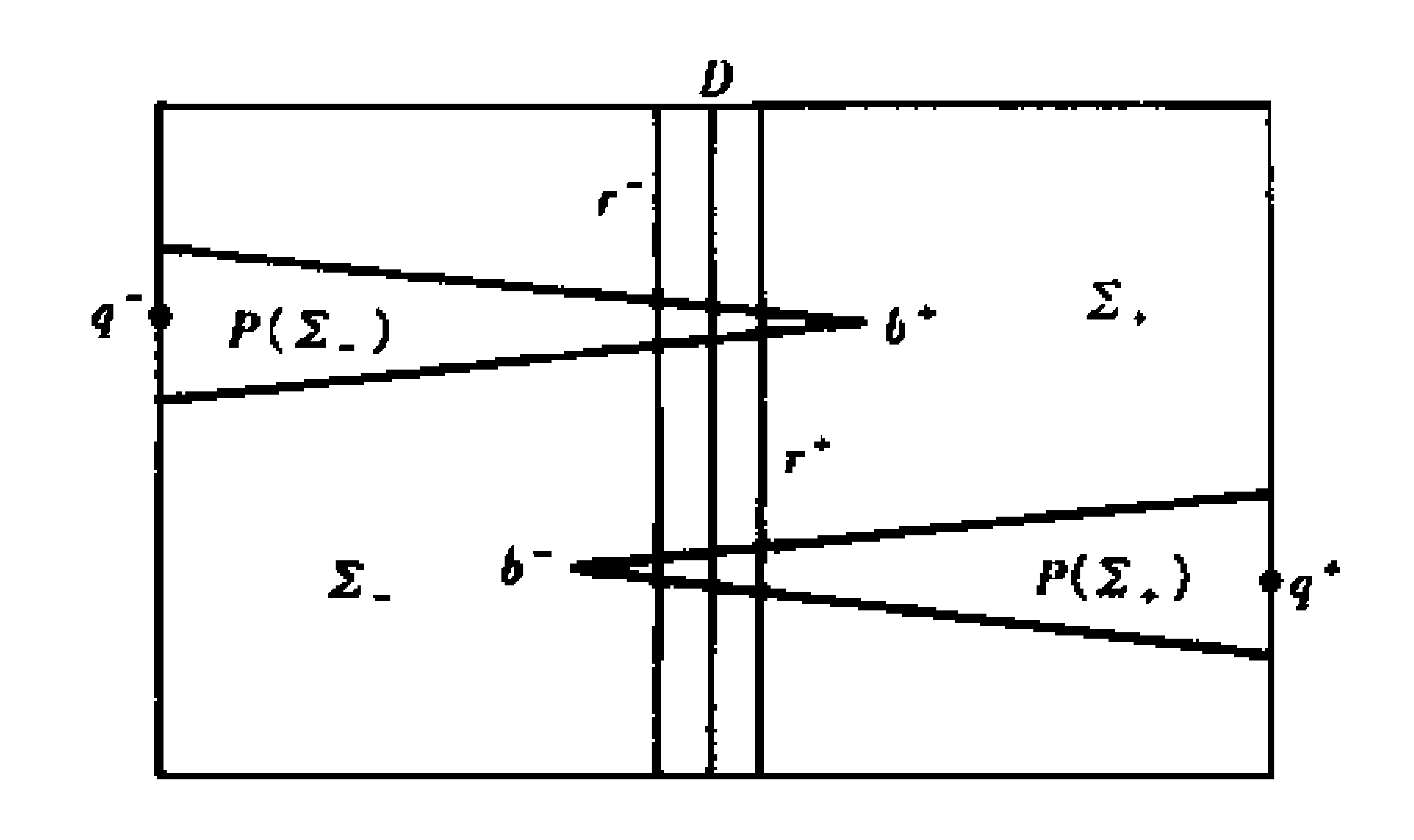


图 2.70　$\rho > \rho_t$ 时的 $P = \rho_t$

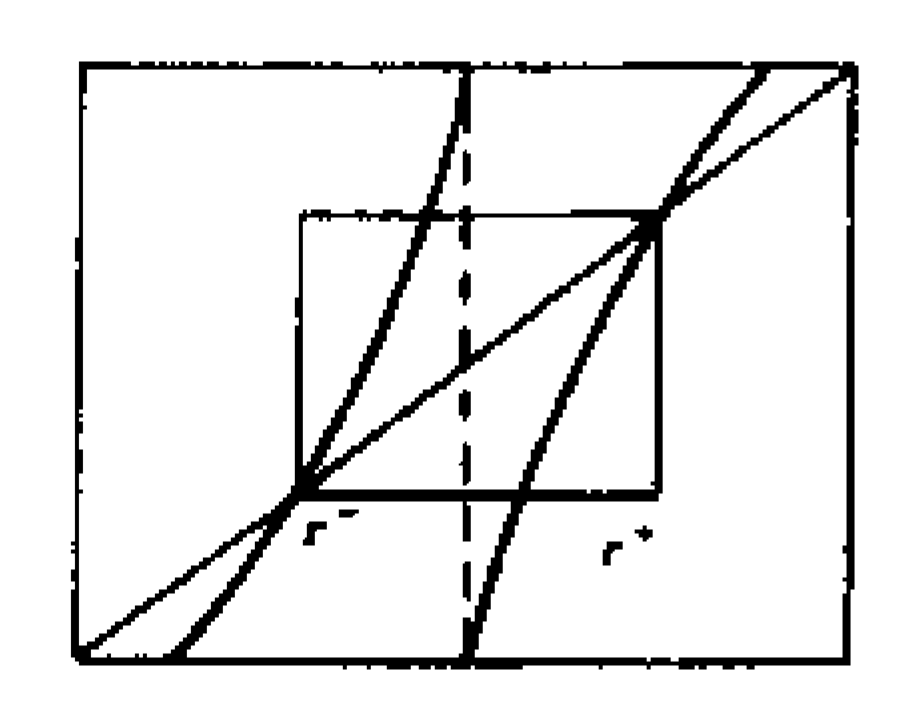
说，任何在 $q^\pm$ 邻近的轨道都必然被 $q^\pm$ 所吸收，而在 A_ρ 外围有 $W^u(p)$ 的两异缩轨道. 设被 $q^\pm$ 所吸引的分别为 γ_+ 和 γ_-，则任何以 $\gamma_\pm$ 的邻近点为初值的轨道必然与 $\gamma_\pm$ 越来越接近最后被 $q^\pm$ 所吸引或被 p 所吸引，这也就是说以离 $q^\pm$ 略微远一些的点为初值的轨道会离 $q^\pm$ 越来越远最终到达 $q^\mp$（与在 $q^\pm$ 邻近的完全相反），为了使这两种现象能同时存在，在 $\gamma_\mp$ 和 $q^\pm$ 间必然存在着排斥的周期轨道，这就是对应于 f_ρ 的不动点 $r^\pm$ 的周期轨道.

下面我们来观察 $\rho(> \rho_t)$ 在 ρ_t 邻近 A_ρ 的混沌现象.

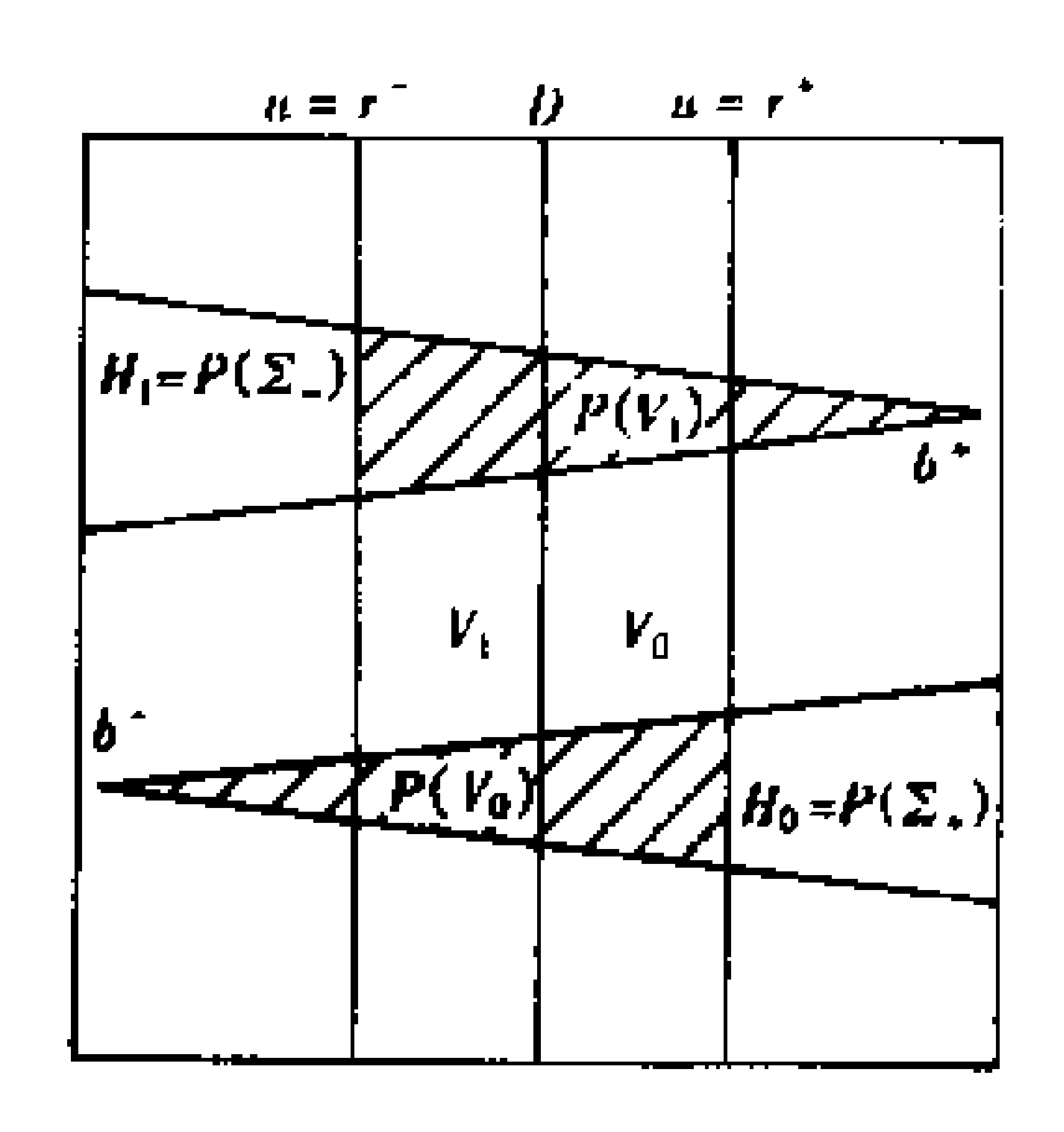
首先，我们把图 2.69(b) 和图 2.70 放大成图 2.71. 从图 2.71 可见，f_ρ 在不动点 $r^\pm$ 处的导数 $f'_\rho(r^\pm) > 1$，这意味着 $r^\pm$ 是源，即排斥的不动点，这同样说明 A_ρ 中相应于 $r^\pm$ 的周期轨道是排斥的. 由图 2.71 还可见，类似于 §2.2.2 中研究逻辑斯谛映射的所用的方法. 我们容易得到 f_ρ 在 $[r^-, r^+]$ 中有混沌不变集. 这是 Cantor 集，f_ρ 限制在此 Cantor 集上拓扑等价于单边符号动力系统.

另一方面，我们也可以从图 2.71(b) 中看出，Poincaré 映射 P 存在着一混沌不变集，这一集合实际上是 Smale 马蹄，让我们进一步地核实这一点.

在图 2.71b 中，V_1 和 V_0 分别代表介于直线 $u = r^-$ 和 D 以及直线 $u = r^+$ 和 D 间的竖条，图中的阴影部分分别是它们的像，



(a) 在$[r^-, r^+]$区域内的映射 f_ρ



(b) 在直线 $u = r^{\pm}$ 邻近放大后的 P

图 2.71

而 $\boldsymbol{P}(\Sigma_-)$和 $\boldsymbol{P}(\Sigma_+)$可以看成 Smale 马蹄图(见图 2.43)中的横条 H_1 和 H_0,注意分别以 $\boldsymbol{q}^-$ 与 $\boldsymbol{r}^-$ 为心的两条周期轨道是排斥的,即任何以这两条周期轨道邻近点为初值的轨道必与它们相距越来越远. 在直线 $u=r^-$ 左边的点为初值轨道必被 $\boldsymbol{q}^-$ 所吸收,同样地,关于 r^+ 的周期轨道也有如 r^- 一样的性质,这在图 2.71(b)中都可以看出.

同§2.6.2 类似,可以借助于 Smale 马蹄和双边符号动力系统来了解集合 $B=B_\rho$:

$$B = \bigcap_{k=\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}^k(V); \quad V = V_0 \cup D \cup V_1 \qquad (2.202)$$

这几乎是 $\boldsymbol{P}$ 的不变集,只不过 $\boldsymbol{P}$ 在 D 上没有定义,对照一下图 2.43、图 2.62 和图 2.71(b),可见 B 不再是如图 2.62 中所得到 Cantor 线集 A,而是同 Smale 马蹄相差无几的 Cantor 点集,因此,利用双边符号动力系统可得 B 是混沌集,但 B 不是$\boldsymbol{P}$ 的吸引集. 实际上,以 B 中点为初值的轨道将无止境地绕着$\boldsymbol{q}^{\pm}$ 运动或者被 $\boldsymbol{p}$ 所吸引,但是以 B 的邻近点为初值的轨道则往往会被另外两个吸引的平衡点所吸引. 因为从图 2.71(b) 中可见,若 $\boldsymbol{x} \in V/B$,必然会

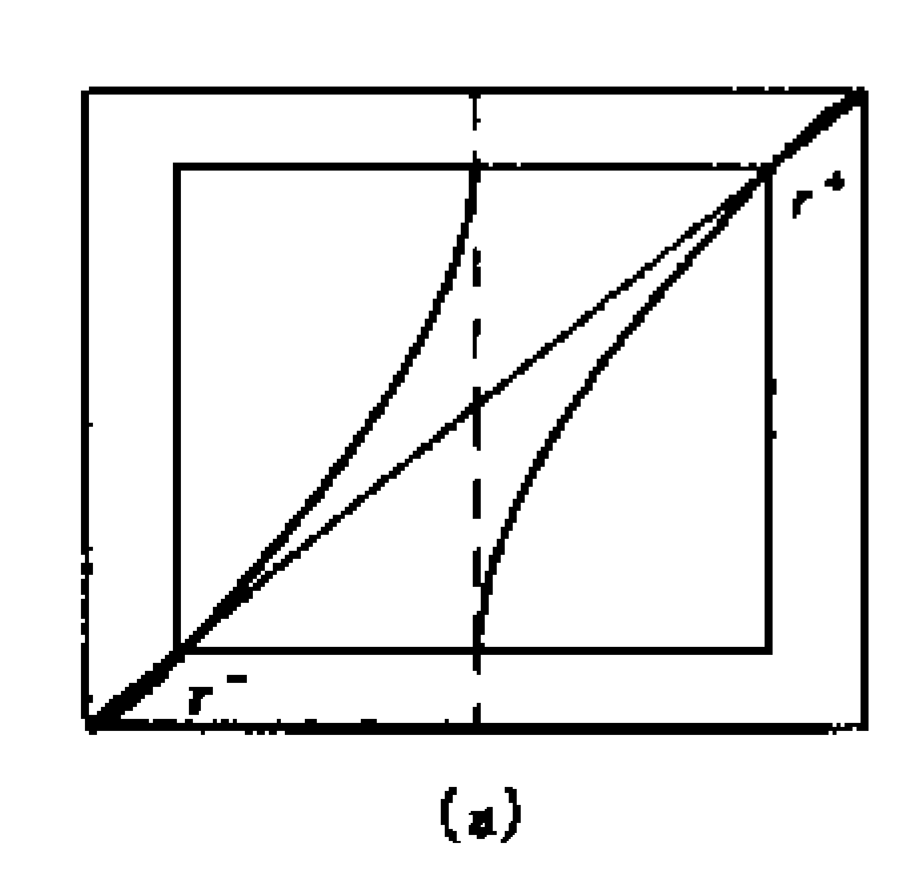
存在着某个 k，使得 $P^k(x) \in \Sigma \setminus (V_0 \cup V_1)$. 注意到相应于 $r^{\pm}$ 的周期轨道都是排斥的，若 $p^k(x)$ 落到 Σ 中的直线 $u = r^+$ 的左边，则 $\varphi^t(P^k(x)) \to \{q^+, q^-\}(t \to \infty)$. 同样，当 $P^k(x)$ 落到 Σ 中的直线 $u = r^-$ 的右边时，有 $\varphi^t(P^k(x)) \to \{q^+, q^-\}(t \to \infty)$；若 $P^k(x) \in D$，则 $\varphi^t(P^k(x)) \to P$. 这意味着 Lorenz 动力系统仅在一个零测集

$$\mathscr{B}_\rho = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(B_\rho) \tag{2.203}$$

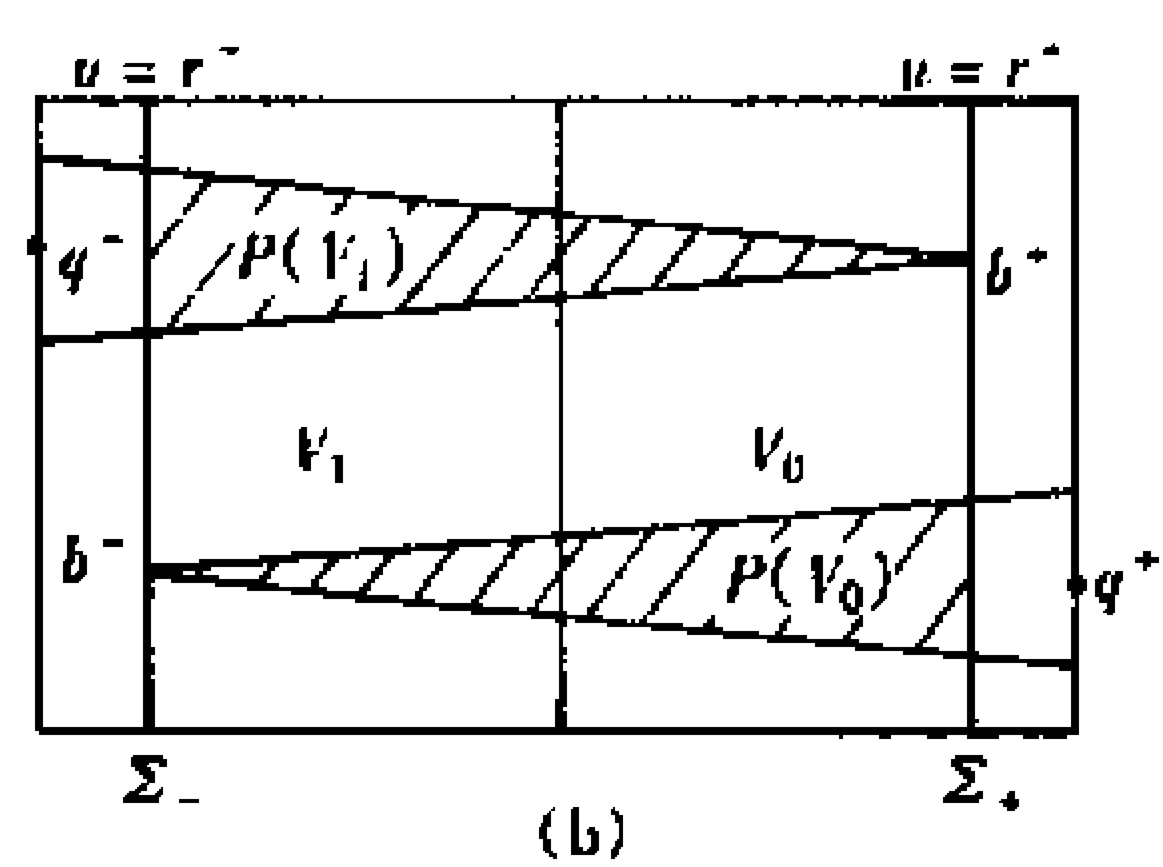
上是混沌的，从而 $\varphi^t = \varphi_\rho^t$，当 ρ 越过 $\rho_t \approx 13.926$ 时不是混沌的动力系统，只是有一个难以用实验方法找到的混沌不变集 $\mathscr{B}_\rho$.

下面让 $\rho > \rho_t \approx 13.926$ 继续增长，进一步地寻找使得 (2.200) 成为混沌的动力系统的分岔值.

当 $\rho > \rho_t$ 进一步增长时，我们发现，分别围绕着 $q^{\pm}$ 的相应于 $r^{\pm}$ 的周期轨道之直径在随着缩小，从图 2.69(b) 上看，r^- 和 r^+ 不断分离而分别靠近 q^- 和 q^+，与此同时，f_ρ 在 0 点右极限 $f_\rho(0_+)$ 与左极限 $f_\rho(0_-)$ 之间的距离也在拉大，但这种拉大的速度却要慢于 r^+ 与 r^- 分离的速度，这也就意味着会存在某一时刻 $\rho_a > \rho_t$，当 $\rho = \rho_a$ 时恰好有 $f_\rho(0_\pm) = r^{\mp}$ (见 2.72). 数值计算表明，这一时刻 $\rho_a \approx 24.06$ (见 Kaplan - York[1979]). 由图 2.72 可以看出，当 $\rho = \rho_a$ 时



(a)



(b)

图 2.72

(a) $\rho = \rho_a$ 时的 f_ρ (b) $\rho = \rho_a$ 时的 $P = P_\rho (V = V_0 \cup D \cup V_1)$

$$f_\rho:[r^-,r^+]\setminus\{0\}\to[r^-,r^+],$$

$$P_\rho: v_1\cup v_0\to V_1\cup D\cup V_0=V \qquad (2.204)$$

即 f_ρ 和 P_ρ 都几乎可以分别视为 $[r^-,r^+]$ 和 V 上的自映射，这里 V_1 介于直线 $u=r^-$ 和 D 间的区域，V_0 是与 V_1 对称的区域. 令

$$B=B_\rho\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}P_\rho^k(V) \qquad (\rho=\rho_a\approx 24.06) \quad (2.205)$$

这几乎是 P 的不变集，P 在 B 上的关于初值的敏感依赖性是显而易见的，因为同 Smale 马蹄一样，可由双边符号动力系统得其混沌性质，现在，B 已经成为两束以 $b^\pm$ 为顶点的 Cantor 线，而且 B 在 V 中是吸引的，即若 $x\in B$，则 $P^k(x)\to B\cup D$，因此

$$\varphi^s(V)\to\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B),\text{当 } s\to\infty \text{ 时} \qquad (2.206)$$

由于 $\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B)$ 是 φ^t 的混沌不变集，从而 $\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(V)$ 是 φ^t 的混沌集，当然 $L^3(\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(V))>0$，因此 φ^t 是混沌的动力系统，但是此时 φ^t 没有混沌的吸引集，因为从图 2.72(b) 可见，B 的两束 Cantor 线段的顶点 $b^\pm$ 正好处于直线 $u=r^\pm$ 上，因此任何在 $u=r^+$ 右边且靠近 b^+ 的点 $x\in\sum_+$ 必有 $P^k(x)\to\{q^+\}\cup\{q^-\}$，这意味着 $\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi^t(B)$ 不是 φ^t 的吸引集.

下面令 $\rho_a<\rho<\rho_h\approx 24.74(\rho_a\approx 24.06)$. P_ρ 的图如图2.73,

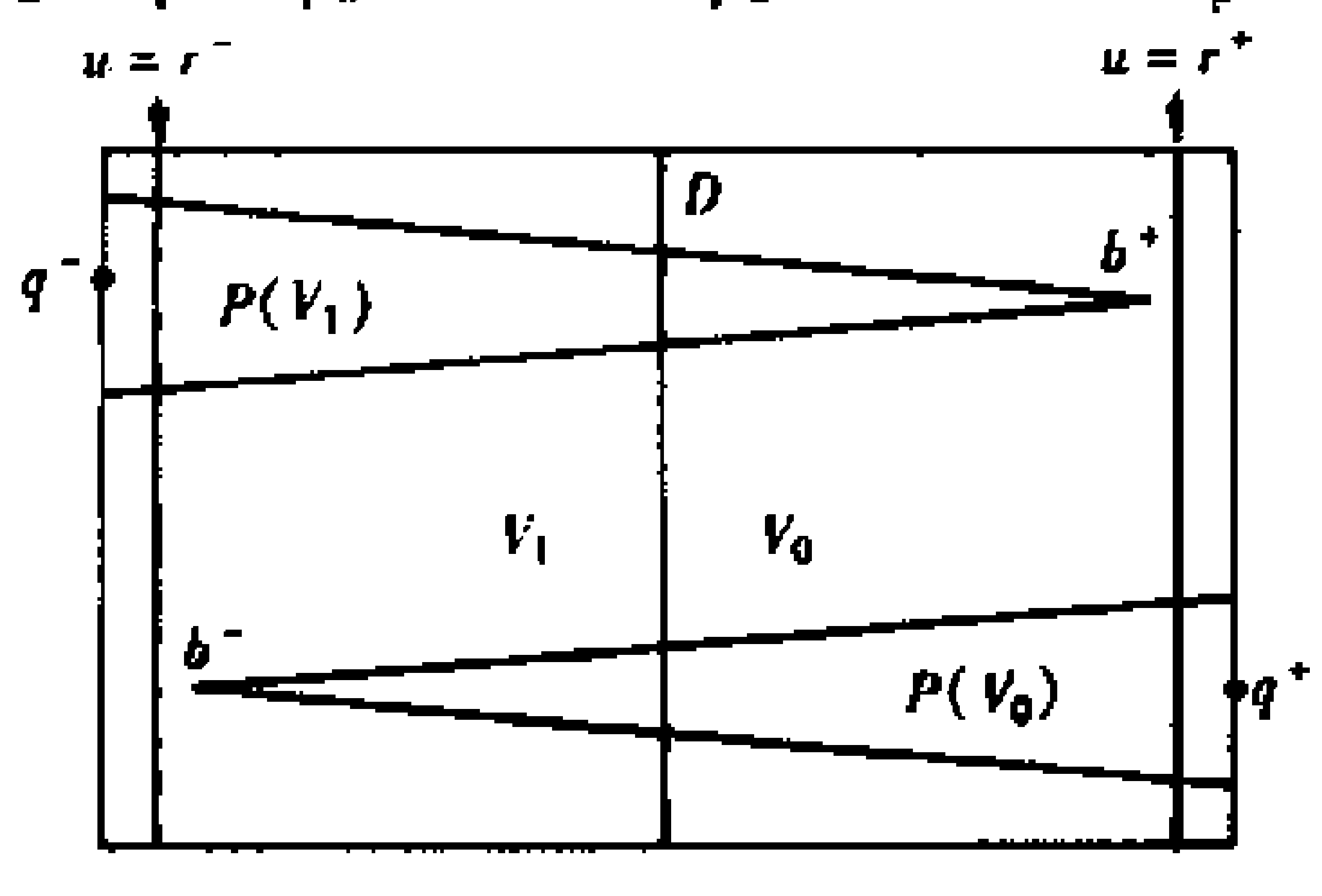


图 2.73

图中两束Cantor线段的顶点 $b^{\pm}$ 已分别离开直线 $u = r^{\pm}$ 而落在 V 内，因此在 V 内已存在一个集合 B，由以 $b^{\pm}$ 为顶点的Cantor线段组成，使得 $\bigcup_{t\geq 0}\varphi^t(B)$ 是其邻域 $\bigcup_{t\geq 0}\varphi^t(V)$ 的吸引集，而 $\bigcup_{t\geq 0}\varphi^t(B)$ 还是拓扑可迁的混沌集，所以 $\bigcup_{t\geq 0}\varphi^t(B)$ 是 φ^t 的奇怪吸引子. 当然 φ^t 是混沌的，不过这时 φ^t 还有其他两个平凡的吸引子 $\{q^+\}$ 和 $\{q^-\}$.

随着直线 $u = r^{\pm}$ 不断地靠近 $q^{\pm}$（当 $\rho \to \rho_h$ 时），相应 $r^{\pm}$ 排斥的周期轨道不断地缩小，直至与 $q^{\pm}$ 重合，从而三个吸引子最终变成为单个的奇怪吸引子 A_ρ，这就是次临界的Hopf分岔. 当 $\rho > \rho_h \approx 24.74$ 时，所有的平衡点，p, q^+, q^- 都已是鞍点. 由于整个 A_ρ 都是混沌集且又是吸引子，这也就是全空间 R^3 都是 φ^t 的混沌集.

综上所述，Lorenz系统 $\varphi^t = \varphi_\rho^t$ 从平凡的动力系统（所有轨道都被 p 所吸引）到混沌的动力系统需经历下面三个分岔值.

(i) $\rho = 1$ （Pitchfork分岔），

(ii) $\rho = \rho_t \approx 13.926$（同缩分岔） (2.207)

(iii) $\rho = \rho_a \approx 24.06$.

而Lorenz系统的吸引集 A_ρ 从单点集变成为吸引子则经历了四个分岔值，即在经历前面三个分岔值后还得再经历.

(iv) $\rho = \rho_h \approx 24.74$ （Hopf分岔） (2.208)

更确切地说，在 ρ 的增长过程中 φ_ρ^t 和 A_ρ 的变化如下，当 $\rho \leqslant 1$ 时，$A_\rho = \{p\}$ 是拓扑可迁的，即为吸引子.

当 $1 < \rho < \rho_t$ 时，A_ρ 是 p 的不稳定流形 $W^u(p)$，这是由两条（从 p 到 q^+ 和从 p 到 q^-）异缩轨道连接而成的，连接点是 p，异缩轨道不可能拓扑可迁，所以 A_ρ 既不是吸引子也不是混沌集.

当 $\rho = \rho_t$ 时，A_ρ 成为二维的集合，这是由 $q^{\pm}$ 为心的且以 $W^u(p)$ 的两个同缩轨道为边界的两片叶子组成，这两片叶子只交于平衡点 p，因此任何其一片叶子中的轨道都不可能到达另一片叶子，因此，A_ρ 不是吸引子，当然 A_ρ 也不是混沌集，且 φ^t 没有混

沌集.

当 $\rho_h < \rho < \rho_a$ 时，φ^t 具有一混沌不变集，不过 φ^t 不可能是非零测集的混沌集，因而 φ^t 依然不是混沌的动力系统，不过，此时的 A_ρ 已是分形集，按 Kaplan－York[1979]，我们称开区间(ρ_t,ρ_a)为预湍流区域(preturbulence).

当 $\rho=\rho_a$ 时，A_ρ 含有一子集B_ρ为φ^t 的混沌不变集，且 φ^t 在一个包含 B_ρ 的 Lebesque 测度(L^3) 大于零的集合上是混沌的，因此，此时 φ^t 已是混沌的动力系统.

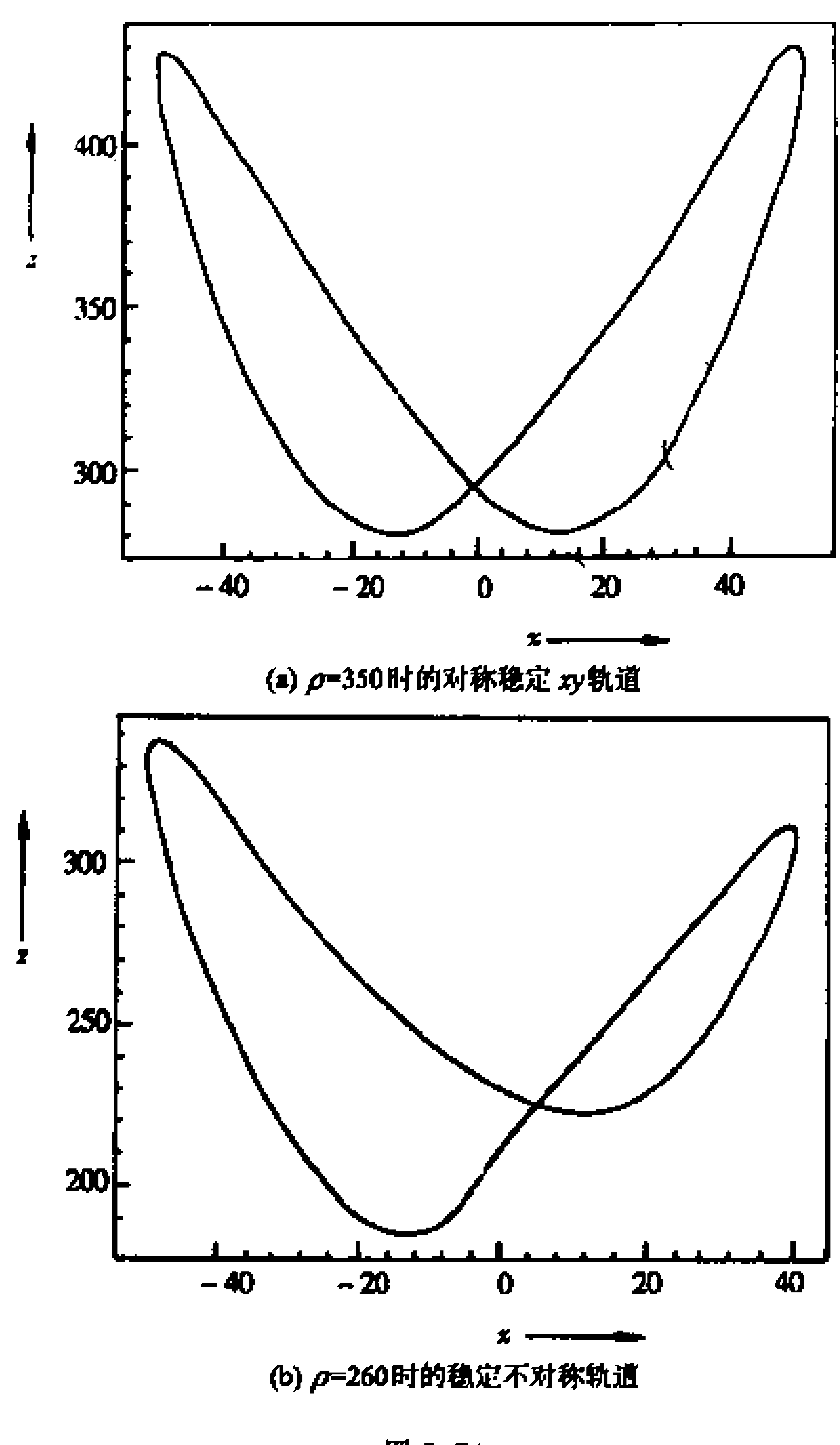
当 $\rho_a < \rho < \rho_h$ 时，上述的混沌不变集化为混沌吸引子，即为奇怪吸引子，但是 A_ρ 中还含有两个吸引子$\{q^+\}$和$\{q^-\}$，因此 φ^t 虽已是混沌的动力系统，但 φ^t 在$q^\pm$ 邻近是非混沌的.

当$\rho > \rho_h$ 时，$q^\pm$ 邻近的吸引盆消失，整个 A_ρ 都已是奇怪吸引子，即三个吸引子合成一个，这导致 φ^t 在空间R^3 上混沌.

由以上的讨论给出了奇怪吸引子产生的全过程，但是若 $\rho >\rho_h$ 继续增长，则 A_ρ 将又不再是吸引子. 由图 2.77 可见，奇怪吸引子只能维持到 $\rho=30.1$，当 $\rho > 30.1$ 时，A_ρ 的拓扑结构仍将不断地变化，而且还会如区间[0,2] 上的逻辑斯谛映射一样，其拓扑结构让人无法深入地把握. 当 $\rho > 30.1$ 时，A_ρ 中会出现各种周期轨道，特别是吸引的周期轨道，也会出现各种倍周期分岔，在这些倍周期分岔中还出现 Feigenbaum 普适常数.

我们采用 Sparrow[1982] 的记号，记 xy 为在左侧(q^- 侧) 绕一周再右侧(q^+ 侧) 绕一周的周期轨道(见图 2.74). 依次类推，x^2y^2 为在左侧绕二周再在右侧绕二周的周期轨道(见图 2.75)，x^2y^2xy 是在左侧绕两周右侧绕二周接着在左侧绕一周最后在右侧绕一周的周期轨道(见图 2.75). 这些图中的轨道都是在 xz 平面上的投影，且都是稳定的周期轨道，因为同逻辑斯谛映射一样，不稳定的周期轨道在计算机屏上是画不出来的，由于其排斥性，我们无法利用计算机找到它.

令人惊奇的是，当 $\rho > 313$ 后，Lorenz 系统(2.169) 有一稳定

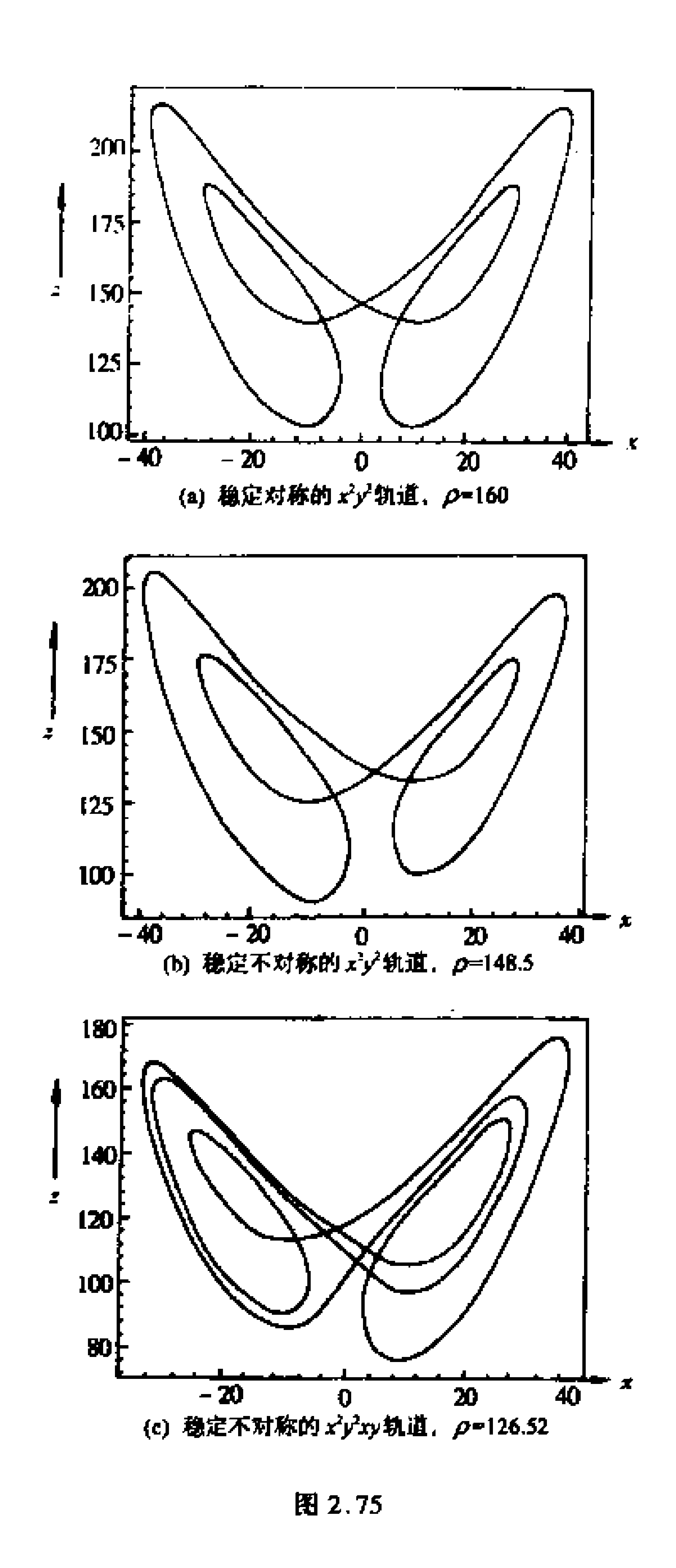


(a) ρ=350时的对称稳定 xy 轨道

(b) ρ=260时的稳定不对称轨道

图 2.74

的 xy 周期的轨道，也就是说，当 $\rho > 313$ 时 Lorenz 吸引集已是一结构简单的集合，它早已不是拓扑可迁也不是混沌的. 特别地，我们给出(2.169) 在 $\rho > 214$ 时的分岔图(图 2.76)，从中当 $\rho > 313$ 以后，(2.169) 只有一个稳定的周期轨道，而在[214,313] 间，(2.169) 经历了由周期轨道 xy 为基本周期轨道的倍周期分岔，通常，同逻辑



(a) 稳定对称的 x^2y^2 轨道，$\rho=160$

(b) 稳定不对称的 x^2y^2 轨道，$\rho=148.5$

(c) 稳定不对称的 x^2y^2xy 轨道，$\rho=126.52$

图 2.75

斯谛映射一样，我们也称[214,313]为一倍周期分岔窗口.

实际上，在区间[30,214]中类似的倍周期分岔窗口还很多，

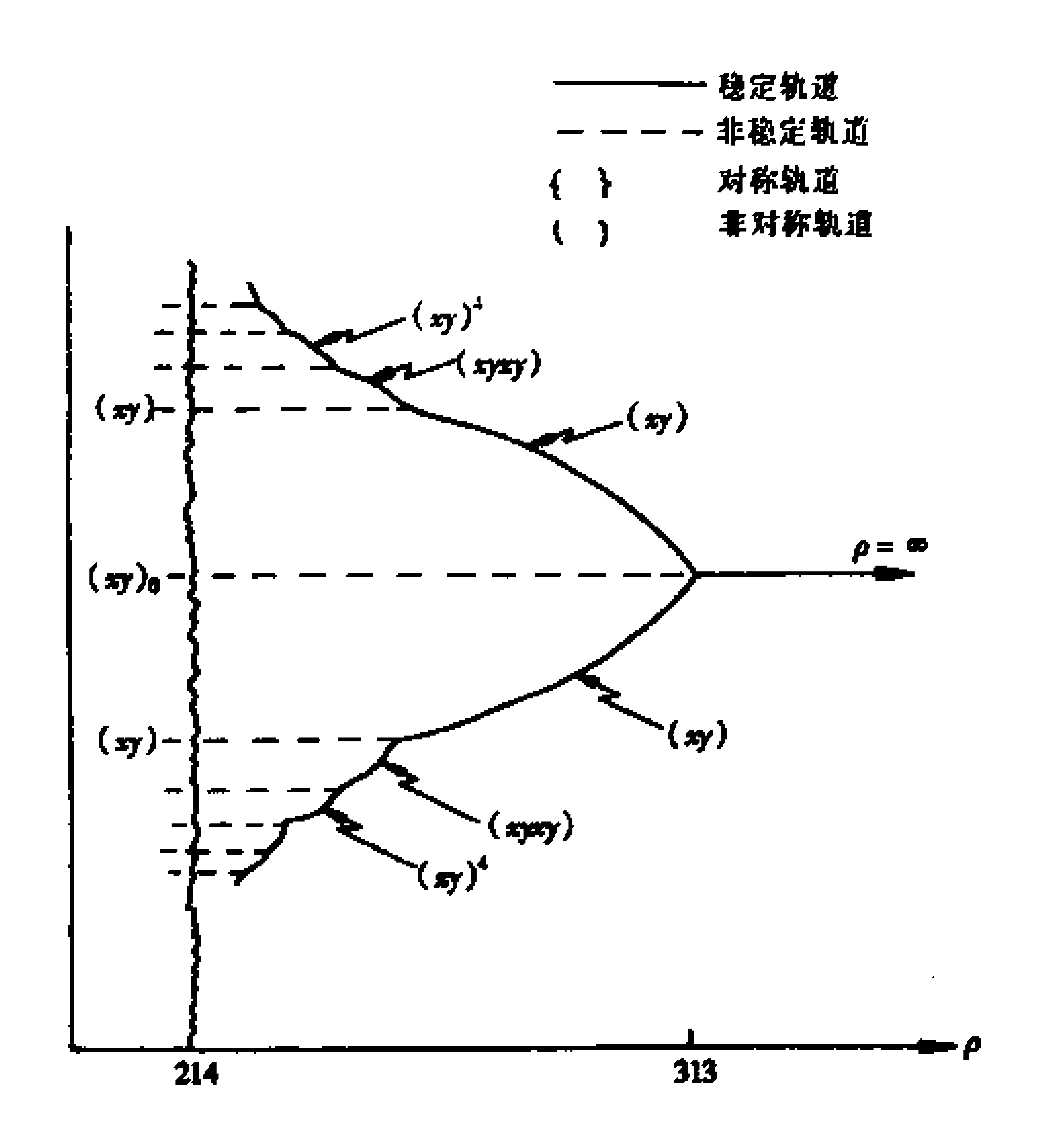


图 2.76

在下面的图 2.77 中，我们给出了 Lorenz 系统的整体的分岔图. 它虽然是非常简略的分岔图，但从中可以看到当 $\rho > 30.1$ 时 (2.169) 的吸引集 A_ρ 已不再是奇怪吸引子. 在参数区间[30.1, 313] 中，判定当数 ρ 为多少时才能使得(2.169) 是混沌的动力系统已是非常艰难的事了，这类似于逻辑斯谛映射 $x \to 1 - ux^2$ 当 $u \in (0,2)$ 时那样，关于这方面的进一步讨论可见 Spattow[1982].

当年 Lorenz[1963] 把天气预报模型看成是 Rayleigh - Benard 热对流问题，并用 Lorenz 方程来代替这个问题，从而用 Lorenz 奇怪吸引子来说明长期的天气预报将是不准确的. 但从图 2.77 可见当 ρ 充分大时($\rho > 313$)，Lorenz 系统居然有稳定的即吸引的周期

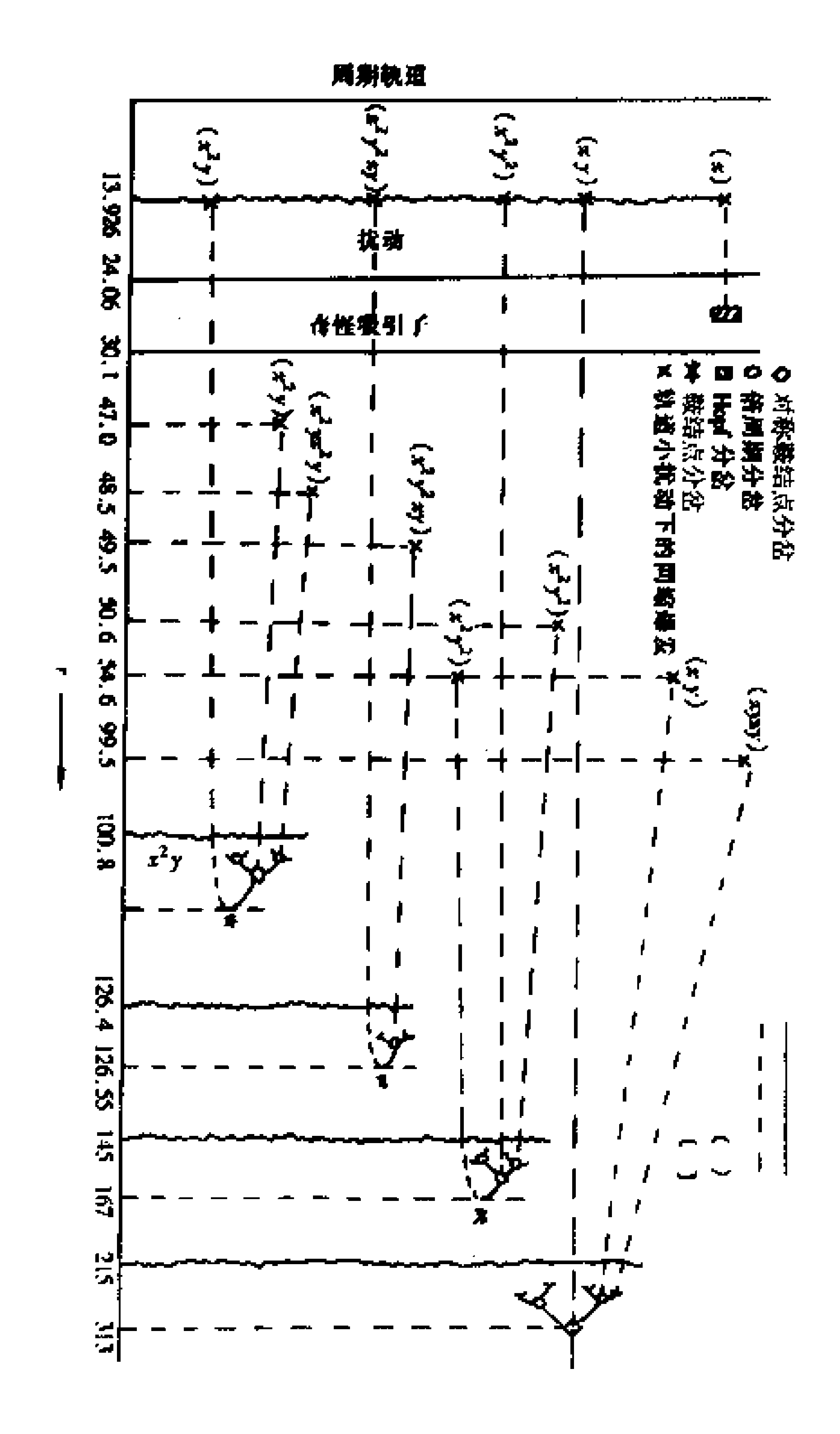


图 2.77　短周期轨道的分岔图

轨道，它代表着极有规则的流动，而根据我们一贯的认识，当 ρ 越大，即 Rayleigh 数越大时，湍流强度就越大. 因此，Lorenz 方程作为 Rayleigh - Benard 问题的近似描述在 ρ 很大时是颇有问题的. 因此由 Lorenz 方程所导出的混沌现象是否能描述湍流现象也同样是

有问题的，可是 Lorenz 系统的确揭示了一些新的现象，进而开拓了一个内容丰富的新领域，Lorenz 混沌是否与湍流有关固然重要．但 Lorenz 系统本身所内含的各种现象，反过来为流体力学等研究带来新的启示，这种启示将会指导人们去探索过去从未注意过的一些本质现象，这无疑同样是重要的．

§2.7 其他产生奇异吸引子的系统简述

众所周知，能够产生奇异吸引子的动力学系统很多，除了本章前面所述的几个最著名的动力学系统所表现的奇异吸引子以外，还有许多系统也表现了异彩纷呈的奇异吸引子．

§2.7.1 Duffing 方程

Duffing 方程是一个含有立方项的二阶微分方程．该方程在外部激励下发生振荡，从而可以表现出周期运动或混沌运动．杜芬方程的形式如下：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + x^3 = b\cos(t) \tag{2.209}$$

其中参数(a, b)为正数且 $a < 1, b < 25$．$b\cos(t)$ 是外部激励，该方程解中包含了丰富的2π周期解（谐波和高次谐波）和子谐波解．它们刻画了周期吸引子，其中一些周期吸引子如图 2.78 所示，图中各种解的参数值分别为(a)$a = 0.3, b = 2.0$；(b)$a = 0.2, b = 5.0$；(c)$a = 0.2, b = 16.5$；(d)$a = 0.2, b = 23.5$；(e) 和(f)$a = 0.10, b = 3.5$，但具有不同的初始条件．所有图形都是迭代 200 次以后的结果，因此图中没有瞬态轨迹．绘制图 2.78 时，需要将方程(2.209) 重写为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ay - x^3 + b\cos(t) \end{aligned} \tag{2.210}$$

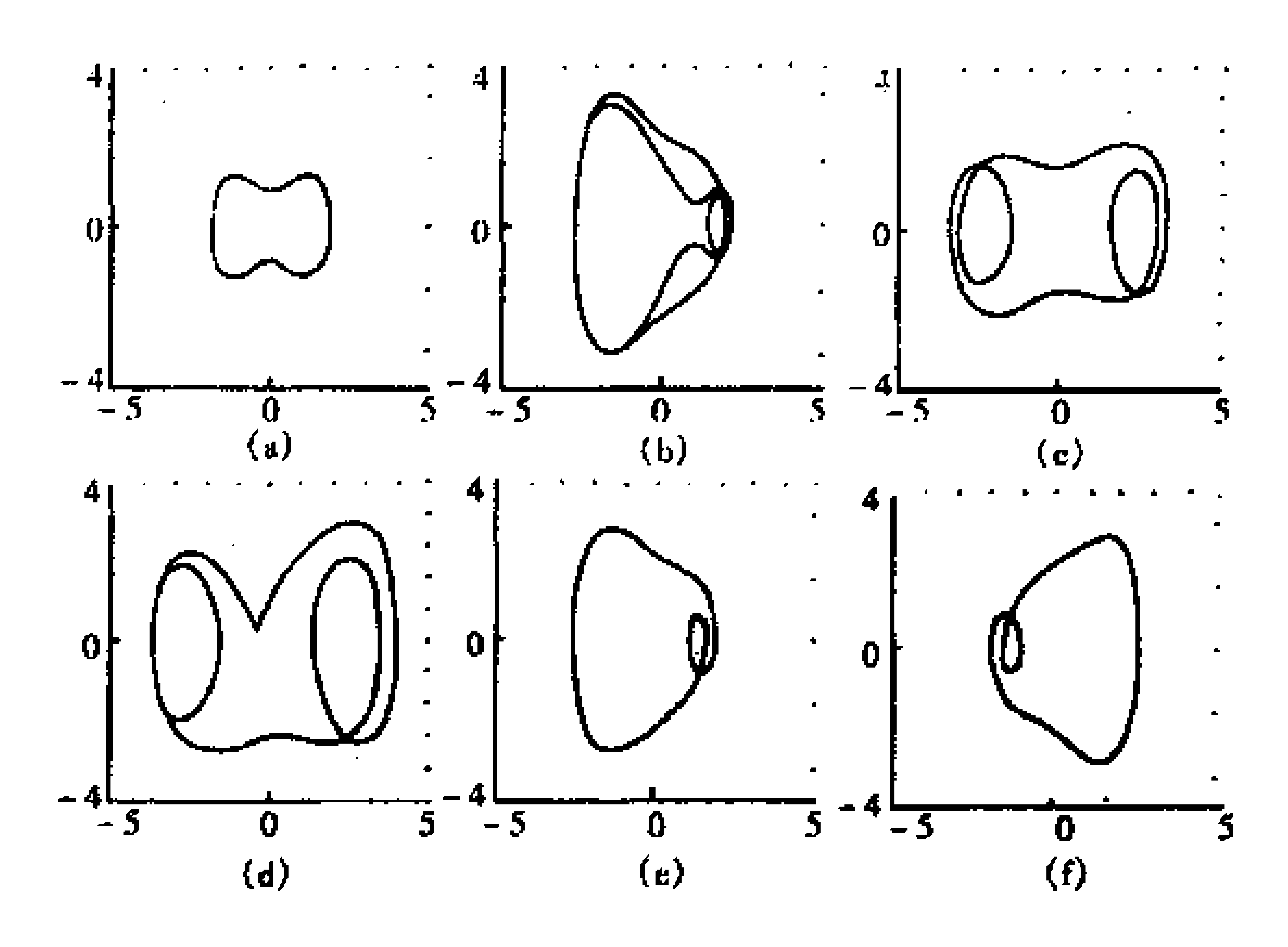


图 2.78 Duffing 方程的周期解

并且将轨迹投影到 xy 平面上.对于参数 a 和 b 的某些组合,还会产生多于一种可能的稳定解:两种不同的周期解产生于同一组参数 a 和 b,但起始于不同的初始状态.如图(e)和(f)所示,每个稳定解与一个不同的吸引子相联系,并且有自己的吸引域.

因为对于一对给定的参数 a 和 b,存在着不止一个吸引子,所以,初始条件或者 a,b 两个参数之一的微小变化,有可能使方程(2.210)的解在不同的吸引子之间转换.通过慢慢地增加 b 值,可以观察到轨迹从周期的转向混沌的,如图 2.79 所示.图中初始状态均取为 $x_0 = 0.3$,$y_0 = 0.5$,参数 a 均取为 $a = 0.3$,而各图形的 b 值不同:(a)$b = 30.75$;(b)$b = 31.0$;(c)$b = 31.5$;(d)$b = 32$;(e)$b = 33$;(f)$b = 34.0$.事实上,在 $0 < b < 250$ 的范围内,可以给出参数空间(a,b)的分岔图.而且,随着 b 值的增加,可以重复地观察到进入非 2π 周期解(倍周期,混沌)的相同分岔模型.当 a 值较小时,随着 b 值的增加,周期解可能分岔为对称解,然后经过一系列倍周期过程而进入混沌解.进一步增加 b,又可以得到周期

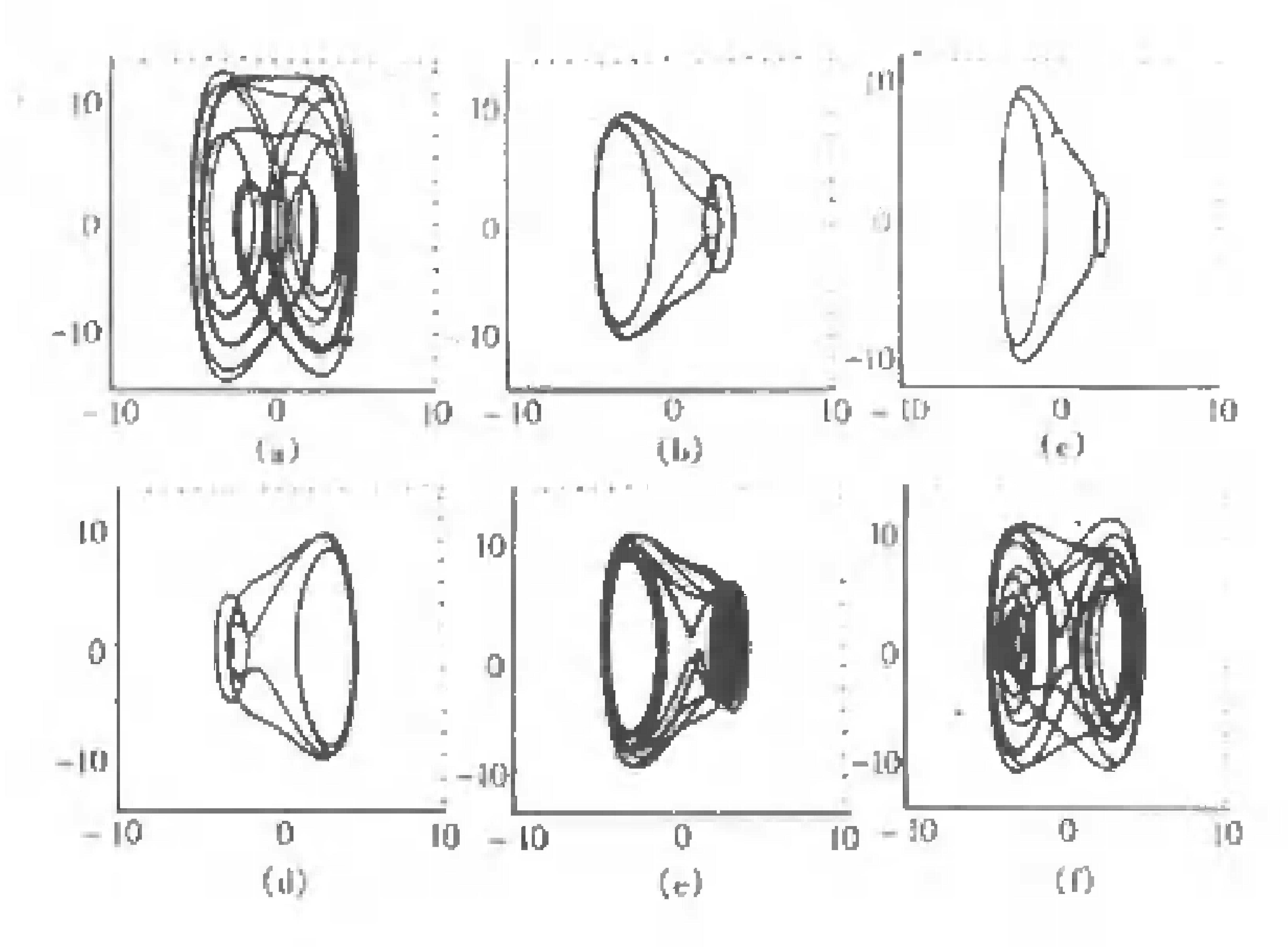


图 2.79　Duffing 方程的混沌解和周期解

解的响应，再经过倍周期而进入混沌，以后可以转为一个新的周期解，这个过程一直重复下去. 当 a 值比较大时，混沌解直接响应于某个周期解，然后分支为对称周期解，再经过一系列倍周期过程，返回混沌状态.

如果我们把方程(2.209) 再一次写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ay - x^3 + b\cos(t) \tag{2.211}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 1$$

就可以构成三维相空间(x, y, t) 或$(x, y, \cos t)$. 该系统也表现了非常有趣的从周期转向混沌的动力学过程. 图 2.80 是在三维空间下，方程(2.211) 的混沌轨迹，其中参数值为 $a = 7.5, b = 0.05$.

该系统描述了一个周期的非线性阻尼振荡器.

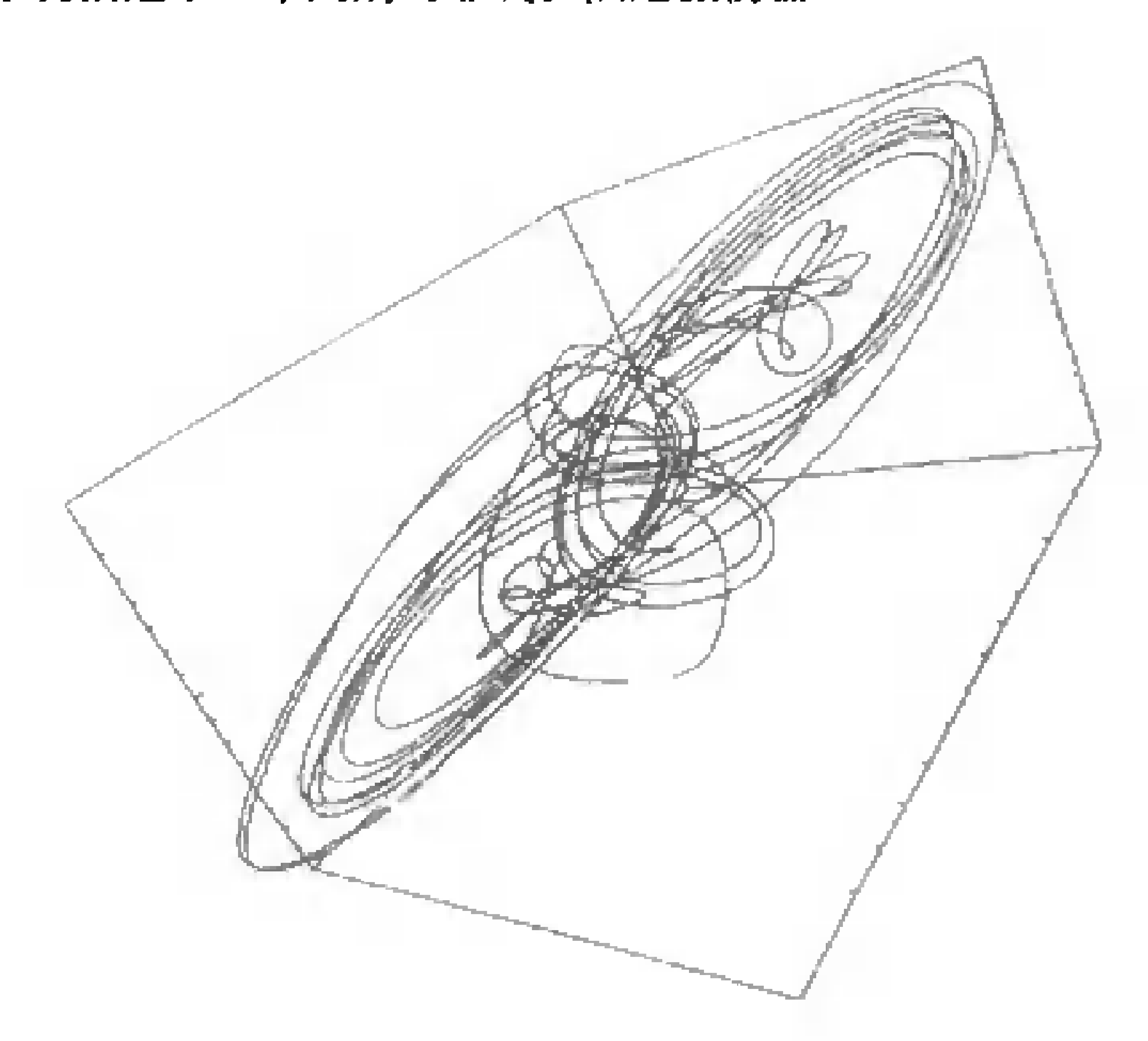


图 2.80　Duffing 方程的混沌解的三维轨迹

如果用一个二次微分方程来描述一个非线性正弦电子振荡器,则微分方程形式可以在 Duffing 方程中加上一个三次项 x^2y:

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = a(1 - x^2)y - x^3 + b\cos(ft) \tag{2.212}$$

与 Duffing 方程不同,该系统可以在没有任何外激励的情况下发生振荡. 当 $b > 0$ 时,振荡器由正弦分频产生振荡,并且每 n 次正弦分频将出现一个 m 次振荡的周期轨迹,这里 m 和 n 都是整数.

参数 b 和 f 的某些组合不能产生周期振荡系统,其响应要么是非周期的,要么是不规则的混沌. 当 b 足够小时,对所有的 f 都会产生非周期振荡. 图 2.81 描绘了在 xy 平面上周期的、非周期的

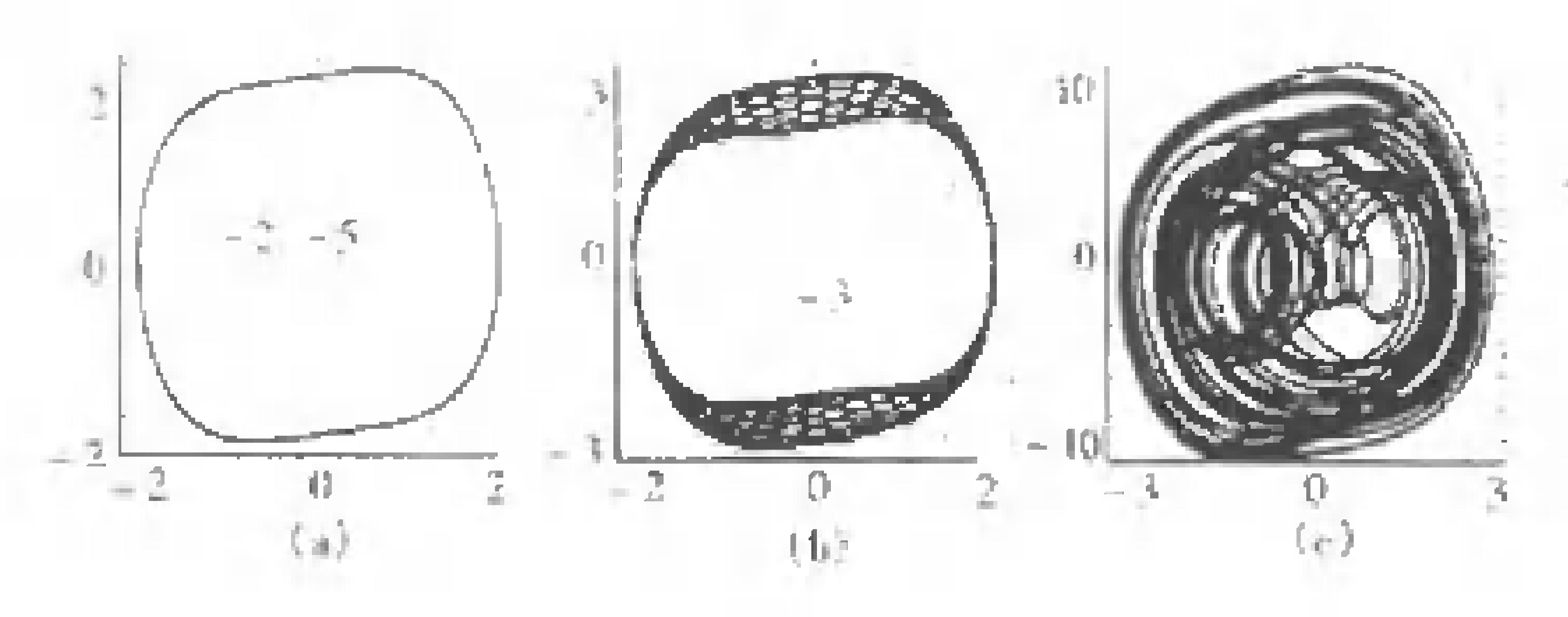


图 2.81　负阻尼振荡器的各种吸引子

和混沌的轨迹，其中(a) 是一个简单的周期吸引子：$b = 1.0, f = 1.617$；(b) 是一个非周期吸引子：$b = 0, f = 4.0$；(c) 是一个奇异吸引子，参数为 $b = 17, f = 4.0$. 有人用频闪观测器从另一个不同的侧面描绘了方程(2.212) 的一些吸引子行为，其方法是在固定的相位上，每正弦分频一次，就对轨迹采样一次，这样，在频闪观测器画面上，周期吸引子表现为一些少量的点，非周期吸引子表现为一条封闭曲线，而奇异吸引子表现为一种复杂的结构.

§2.7.2　一个化学动力学系统

混沌现象不仅仅只存在于数学，物理学中，同样也存在于化学中. 只不过化学反应比较复杂，有时难以用一个简单的数学方程予以描述. 但是，我们可以用一些技巧对化学反应动力学机理进行描述，如用空间的流体动力学来描述化学反应动力学. 用这种动力学的不规则性来描述其混沌行为. 假定化学反应至多表现为二次项，并且当系统封闭时，系统保持质量守恒. 这样，化学反应动力学系统可以用方程(2.213) 来描述.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x(a_1 - k_1 x - z - y) + k_2 y^2 + a_3 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y(x - k_2 y - a_5) + a_2 \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= z(a_4 - x - k_3 z) + a_3
\end{aligned}
\qquad (2.213)
$$

其中 $a_i(i=1,2,3,4,5)$ 是各反应物浓度,保持为常数不变,$k_i(i=1,2,3)$ 是变化率系数,亦保持不变,并且 a_i 和 k_i 都是正数.方程(2.213)的数值分析说明了该系统具有明显的混沌行为,如图 2.82 和图 2.83 所示.图 2.82 是方程(2.213)的奇异吸引子的二维轨迹,所采用的二维平面的分别是(a)xy 平面,(b)yz 平面,(c)zx 平面.参数值是 $k_1=0.25, k_2=0.001, k_3=0.5, a_1=30, a_2=a_3=0.01, a_4=16.5, a_5=10$.图 2.83 则是方程(2.213)的奇异吸引子的三维轨迹,其中 z 从 0 到 50 变化,x 和 y 都从 0 变化到 100.参数与图 2.82 相同.

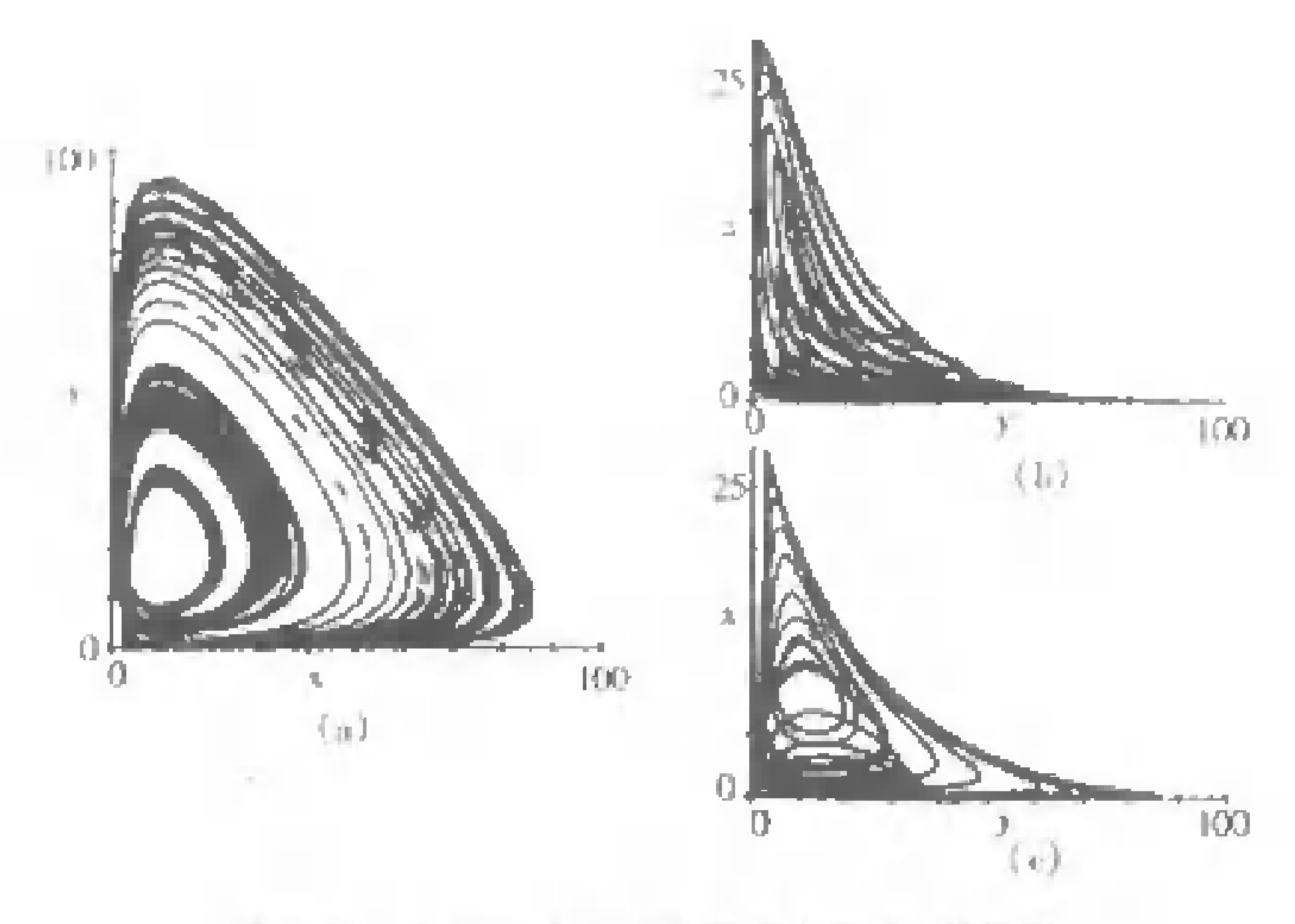


图 2.82 方程(2.213)的奇异吸引子的二维图形

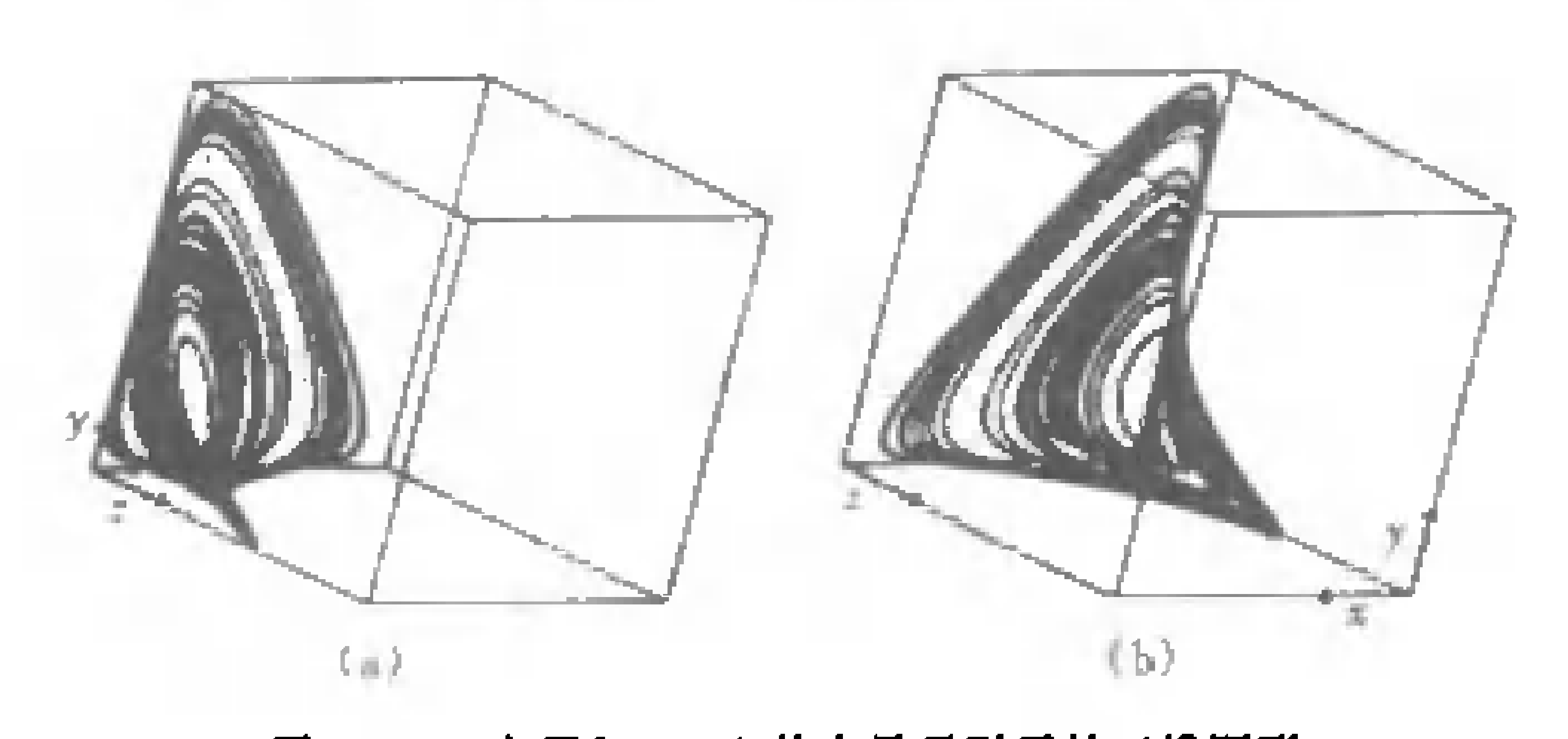


图 2.83 方程(2.213)的奇异吸引子的三维图形

§2.7.3 四维非线性系统

在三维系统中奇异吸引子对初始条件的敏感性由三维系统中奇异吸引子的单个正的 Lyapunov 指数来反映.而一个四维系统的奇异吸引子可以有两个正的 Lyapunov 指数来反映,因而其解比三维系统的混沌解更加不规则,我们称之为超混沌.

由 Rossler 提出的一个表现这种超混沌行为的简单四维系统由下列微分方程组组成:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -y-z \\
\frac{dy}{dt} &= x+0.25y+w \\
\frac{dz}{dt} &= 3+xz \\
\frac{dw}{dt} &= -0.5z+0.05w
\end{aligned}
\tag{2.214}
$$

方程(2.214)中的奇异吸引子的二维轨迹如图 2.84 所示.这些二维平面分别是:(a)xy,(b)zw,(c)xz,(d)yz,(e)yw 和(f)wx.各个坐标方向的数值变化范围是:$-110 \leqslant x \leqslant 40$,$-60 \leqslant y \leqslant 60$,$0 \leqslant z \leqslant 280$ 和 $0 \leqslant w \leqslant 170$,其中图 2.84(a)所示的 xy 平面轨迹使人联想到 Rossler 隧道.事实上,方程(2.214)大体上就是在 rossler 中增加一个非线性变量 w,因而其二维轨迹有点相似.其实,在三维空间 xyz 中,它们的轨迹也很相似.图 2.85 是方程(2.214)在三维空间 xyz 中的轨迹图.吸引子画在一个坐标立方体的内部,将它向前倾斜一点以后,再绕 y 轴旋转:(a)45°,(b)135°,(c)−135°,(d)−45°.坐标取值范围与图 2.84 相同.图 2.86 勾画了方程(2.214)在四个不同的三维空间里的轨迹图.其中各图所取的三维空间分别为:(a)xyz,(b)xyw,(c)zyw,(d)zxw,各坐标值变化范围也与图 2.84 相同.

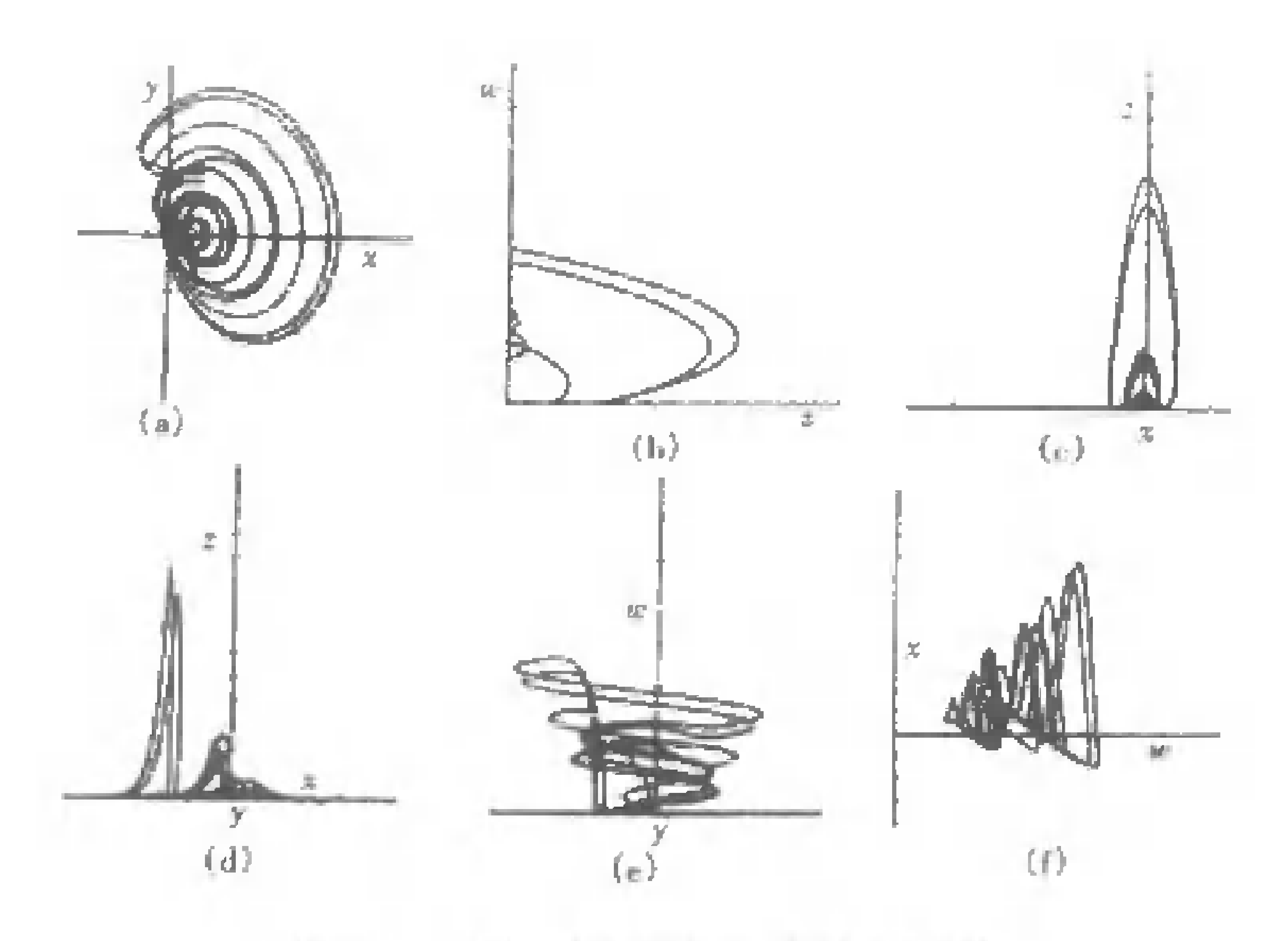


图 2.84 方程(2.214)吸引子轨迹的二维图形

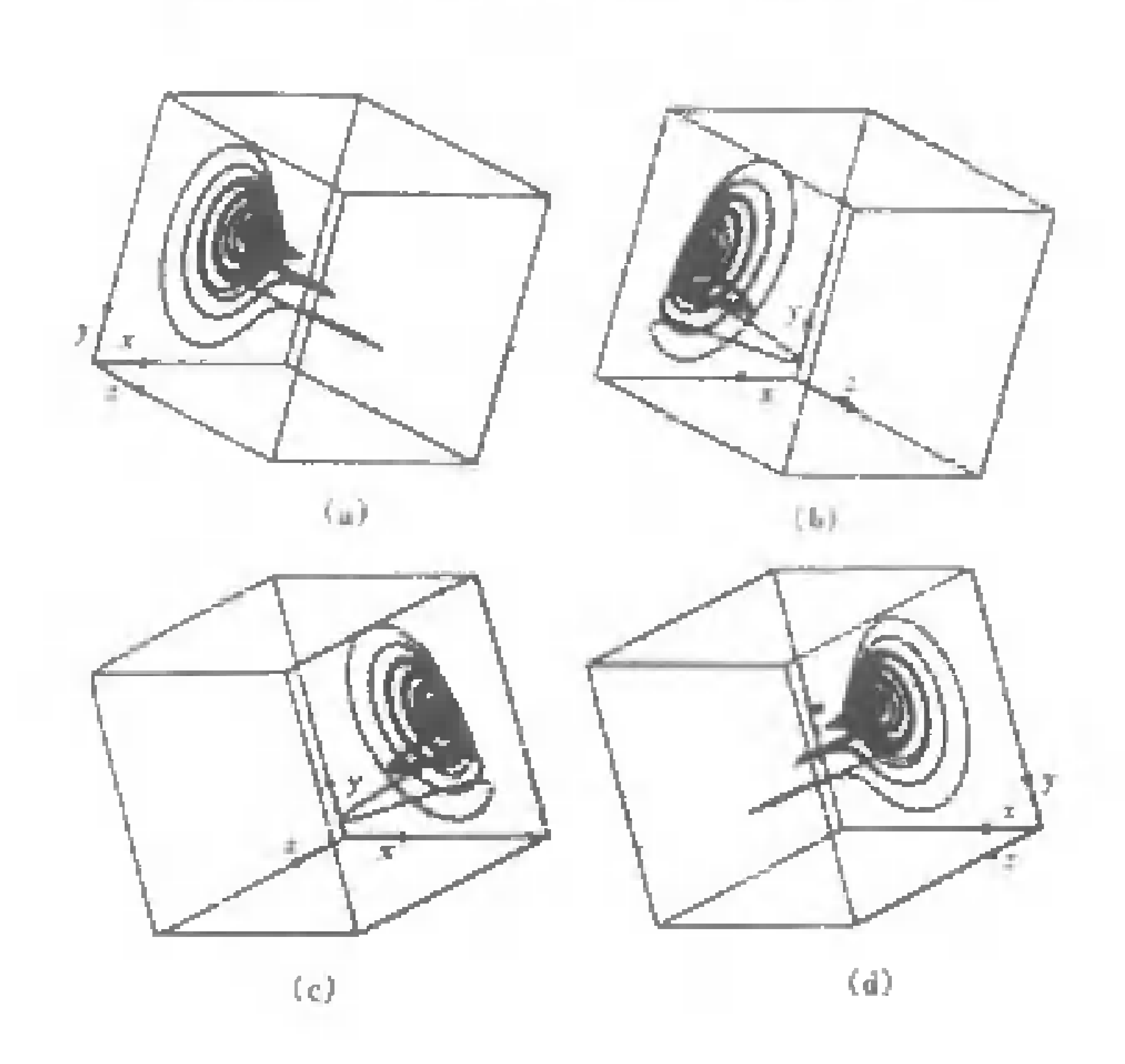


图 2.85 方程(2.214)吸引子轨迹的三维图形

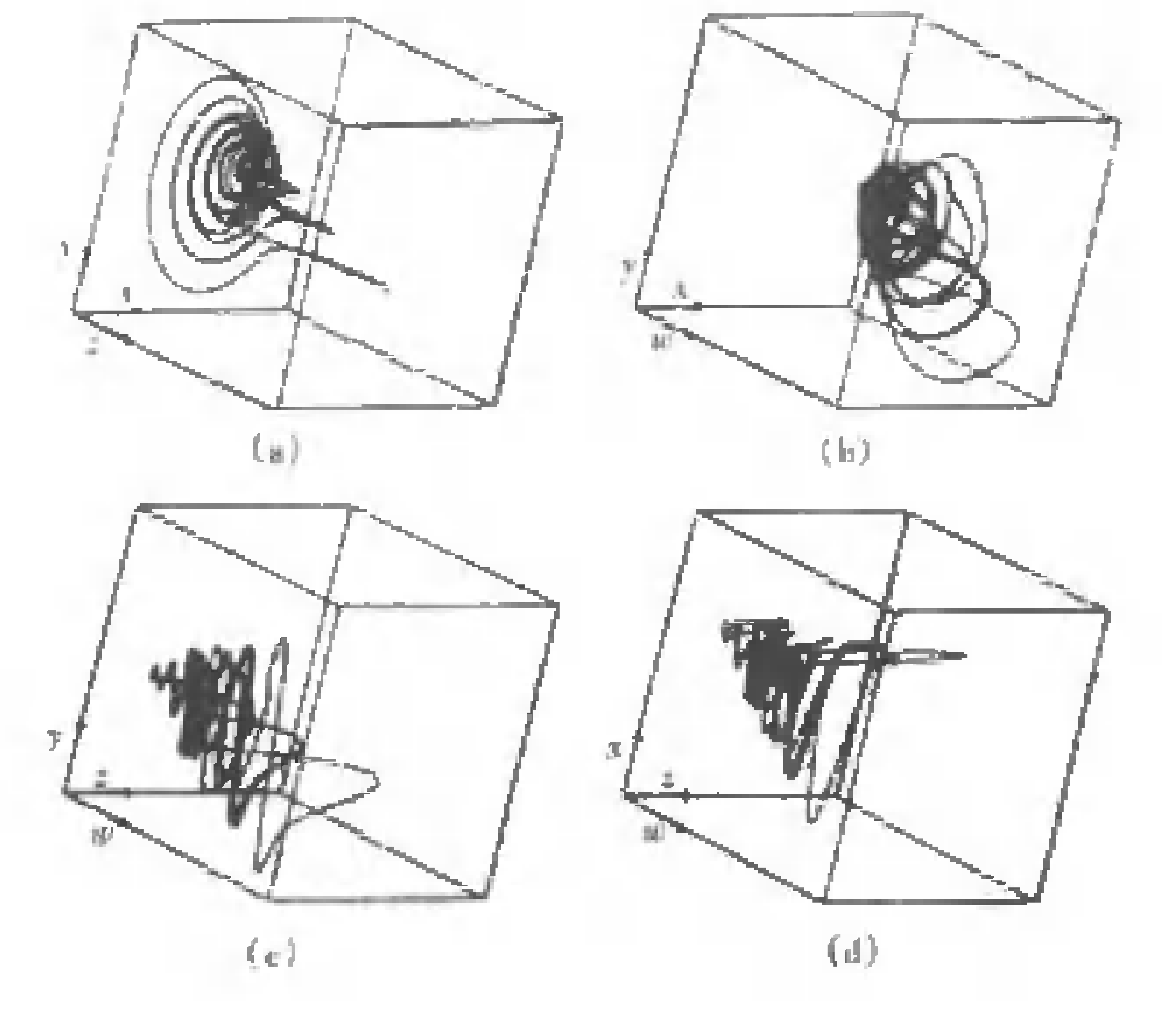


图 2.86　方程(2.214)在四个不同三维空间的吸引子轨迹

尽管这是一个非常简单的四维非线性系统,但也很难使其四维空间的吸引子可视化.为了解决这一困难,可以用二维平面来表示四维空间的运动轨迹.这一轨迹上的每个点实际上表示是一对坐标.图2.87就是用这种方法表示方程(2.214)的奇异吸引子的.图中从六个不同的角度描绘了四维空间的吸引子,其坐标取值范围已经归一化,因此轨迹是在一个正方形中表示一个超立方体.

在这一节中,我们主要讨论了各种奇异吸引子及其产生的方法,并着重讨论了 Lorenz 吸引子.从这些讨论我们可以看出,当一个系统表现奇异吸引子行为时,系统演变过程决不重复,其轨迹决不自身相交.对于三维动力学系统,其奇异吸引子在相空间中体积为零.在某些地方,邻近的轨迹按指数速度相互分离,这种分离是一种局部特征.因为吸引子具有有限的尺寸,所以在一个奇异吸引子上的两条轨迹也不会永远分离.那么,我们怎样才能同时表现这种局部伸展和全局有界呢?参看图 2.88,在混沌流的作用下,一个有

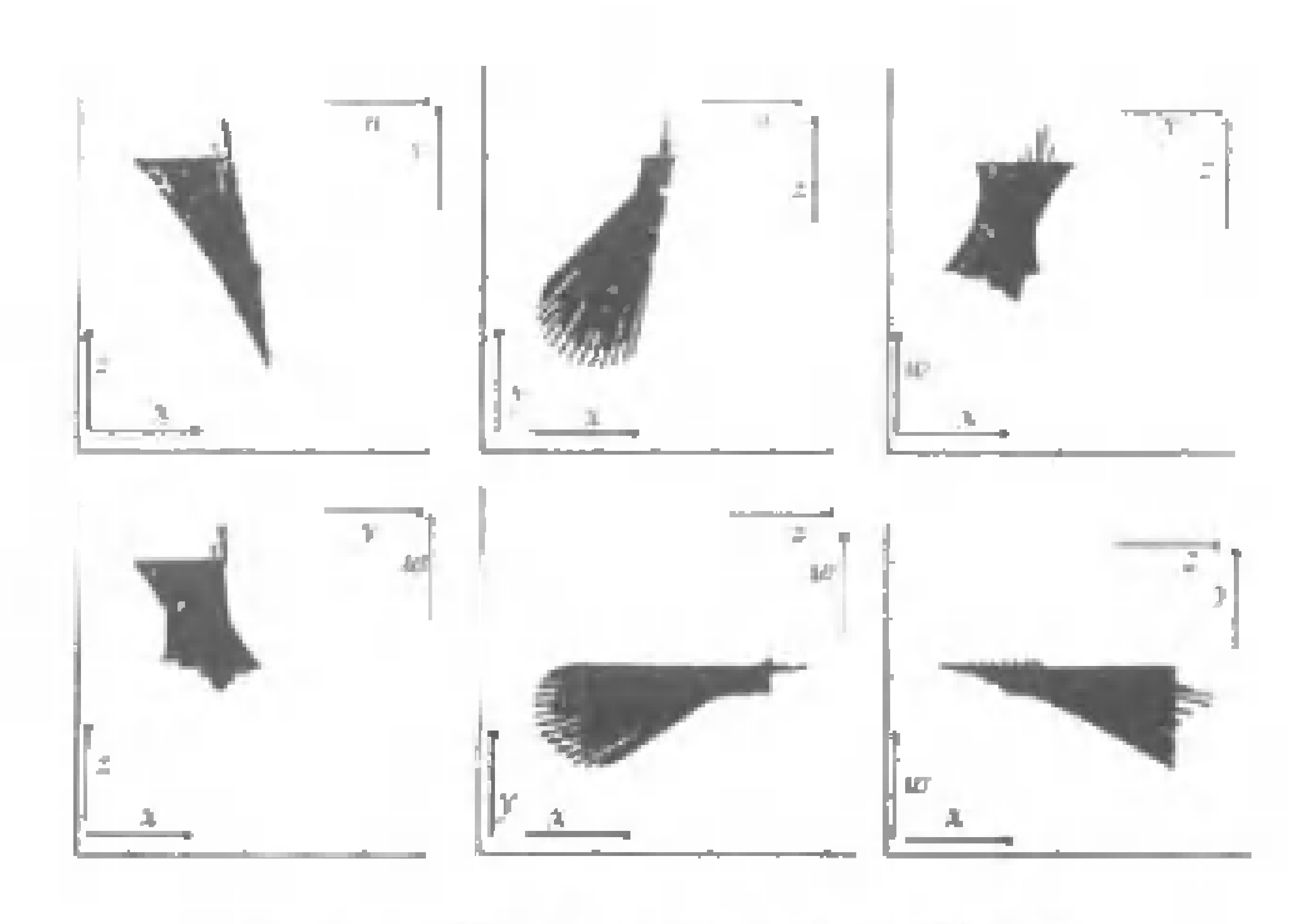


图 2.87　方程(2.214)吸引子的四维空间表示

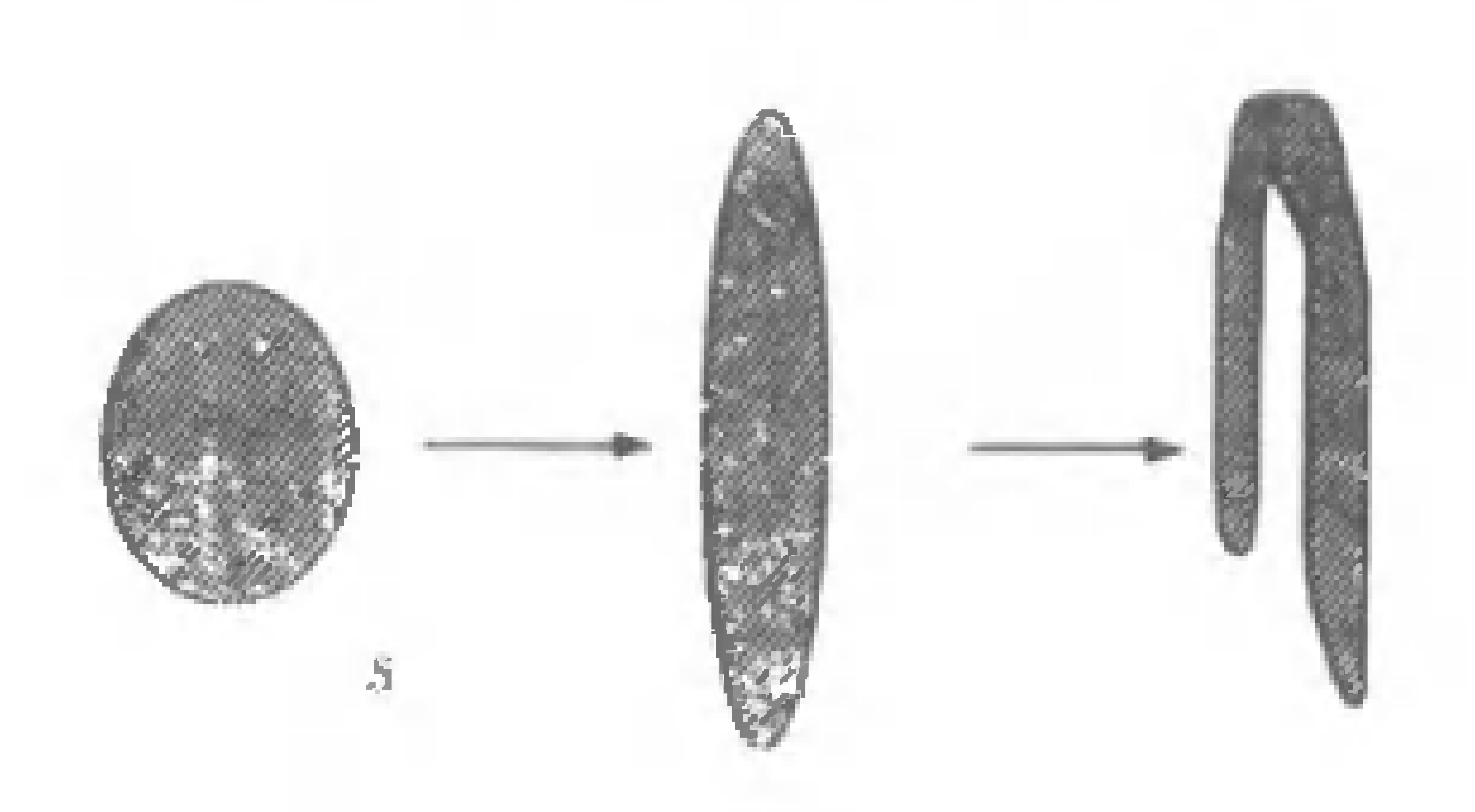


图 2.88　在混沌流作用下,轨迹点集合的演变过程

体积的集合首先沿着最不稳定的方向伸展,然而这种伸展不能占领越来越大的空间,因为吸引子具有有限尺寸.阻止这种伸展的机理是折叠.最终吸引子一定向自身折叠.这种过程的连续迭代就会产生带有折叠的渐近线吸引子.

尽管在奇异吸引子内部的任何地方,两条轨迹都局部分离,但它们在未来某些时候又可能局部地相互靠拢.我们可以把奇异吸引子的作用看作一个混合过程.这个过程有点类似于面包师揉面过程.如果一滴黑墨水滴入了面团中,则揉面过程(也就是翻滚面

团,折叠面团等一些动作的组合)最终将把墨水与面团完全混合在一起,而混沌行为可以看作就是用与此类似的方法把状态空间中的轨迹不断"揉合"的过程.

第三章　分维与分形

在经典的欧氏几何中，人们用直线、圆锥、球等概念来描述诸如墙、车轮、道路、建筑物等一类不太复杂的人造物体的图形，然而在自然界中，却存在着许多极其复杂的几何图形，如山峰、云彩，闪电、雪花边缘等，再如宇宙中点点繁星所构成的集合更不是经典几何所能描述的，因为它们已不再具有我们早已熟知的数学分析中的连续、光滑这些“良好”的基本性质了.

1975年，美国IBM公司的数学家Benoit B. Mandelbrot首次提出了“分形”(fractal)这个新术语，当Mandelbrot的标新立异工作《自然界中的分形几何》一书于1982年出版之后，分形这个概念便不胫而走.从此，分形这朵数学奇葩为物体组织形态的描述提供了一种极其简洁的方法.

在数学上，早期的分形是上世纪下半叶的处处不可微的Weierstrass函数的图像，以及20世纪初的Cantor三分集，因此，可以认为早在Mandelbrot之前，分形就已出现，不过早期的分形仅作为举反例之用.人们并没认识到它们与各种自然现象的内在联系. Mandelbrot的功绩在于利用其在计算机方面的知识把各种分形绘成一幅幅生动的图像，另一方面，他又利用其对自然科学方面的洞察力，把自然界的许多令人困惑且杂乱无章的现象转化为分形模型而统一在分形几何的框架之中，从而为人们把握自然界中的许许多多的复杂结构和形态带来希望.如流体的湍流，生物形态的对称性，通讯中的噪声，无线电静电的波动……，都可以利用分形来加以解释，由此人们发现了许多复杂现象内在的规律性.由于他所作出的杰出贡献，他于1985年荣获Barnard奖.由于分形在许多学科中的迅速发展，目前已成为一门描述自然界中许多不规则事物的规律性的学科.

§3.1 维数概念的延拓

本节介绍几种重要的维数概念,它们是欧氏空间中经典维数概念的延拓,也是分维与分形的基础.

§3.1.1 Hausdorff 测度

在欧氏空间中,直线或曲线的欧氏维数为 1,平面图形的欧氏维数为 2,空间图形的欧氏维数为 3;而非正规几何图形的相似维数可能是非整数值,为了能定量地描述包括非整数值在内的维数,Hausdorff 在 1919 年从测量的角度引进了 Hausdorff 维数的定义,后由 Besicovitch 等进一步完善,故有时人们称之为 Hausdorff - Besicovitch 测度.

如果 A 为 n 维欧氏空间 R^n 中任何非空子集,A 的直径定义为 $|A| = \operatorname{Sup}\{|x-y| \mid x,y \in A\}$,即 A 内何两点距离的最大值.对于 $\delta > 0$,可数个集 $\{U_i\}$ 称为集 A 的 δ 覆盖,若

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ 且 } |U|_i < \delta, \forall_i$$

设 $A \subset R^n$,$S \geqslant 0$ 和 $\delta > 0$,记

$$H_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, U_i \text{ 为 } A \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\right\} \tag{3.1}$$

考虑所有直径不超过 δ 的 A 的覆盖,并试图使这些直径的 s 次幂的和达到最小(见图 3.1).当 δ 减小时,式(3.1)中能覆盖 A 的集类将减少,所以下确界 $H_\delta^s(A)$ 随着 s 的增加且当 $\delta \to 0$ 时趋于一极限.

当 $\delta_1 > \delta_2$ 时

$$\{\{U_i\} \text{ 为 } A \text{ 的 } \delta_1 \text{ 覆盖}\} \supset \{\{U_i\} \text{ 为 } A \text{ 的 } \delta_2 \text{ 覆盖}\}$$

从而有 $H_{\delta_1}^s(A) \leqslant H_{\delta_2}^s(A)$.于是可定义 A 的 s 维 Hausdorff 测度如下:

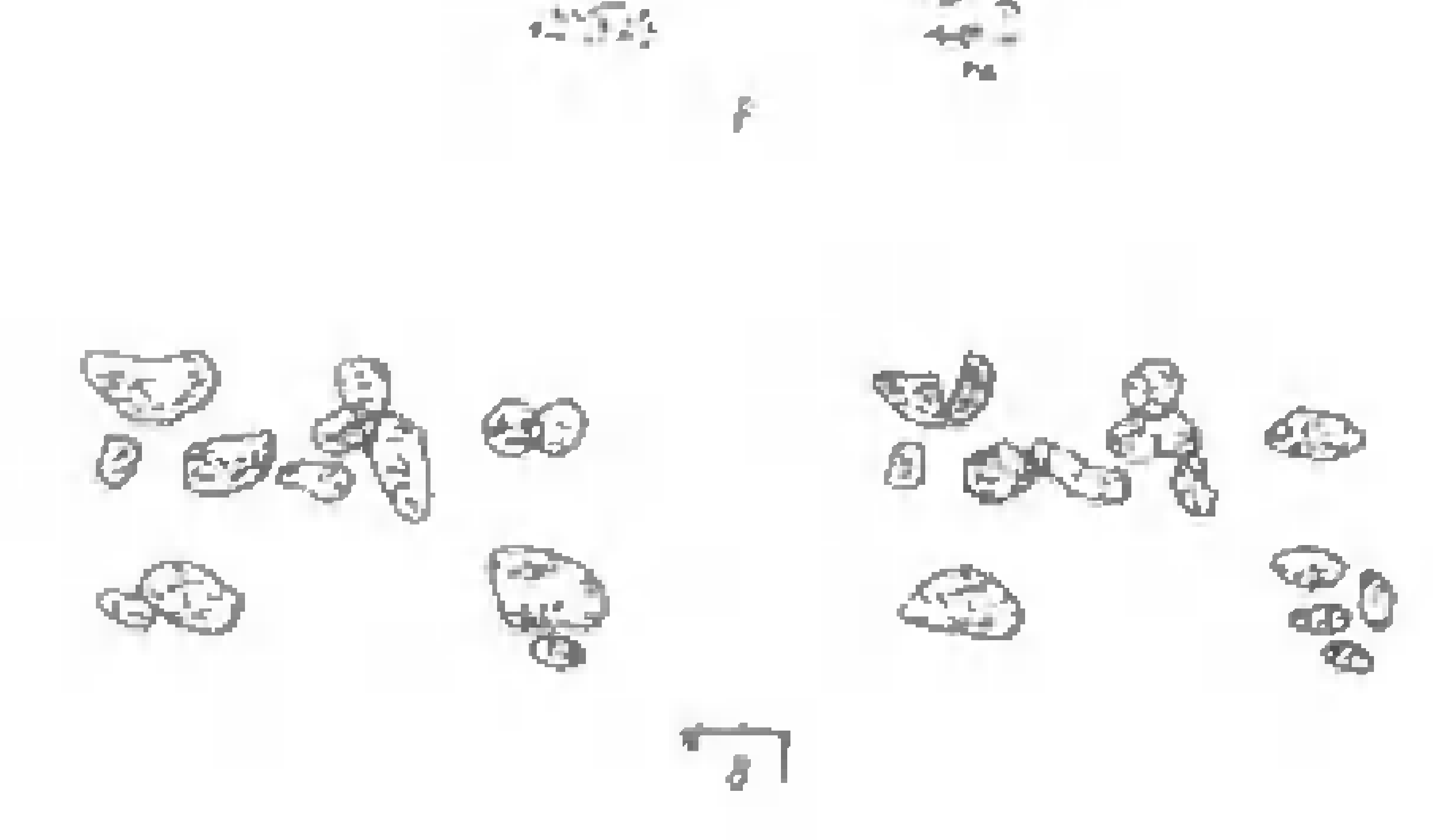


图 3.1 集 F 和 F 的两个可能的 δ 覆盖.取遍所有这样的 δ 覆盖 $\{U_i\}$ 而得的 $\sum |U_i|^s$ 的下确界给出 $H_\delta^s(F)$

$$H^s(A) = \sup_{\delta>0} H_\delta^s(A) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(A) \tag{3.2}$$

可以验证,s 维的 Hausdorff 测度必然是 $R^n(n \geqslant s)$ 上的测度,即 $H_\delta^s(\varnothing) = 0$;若 $A \subset B$,则必有 $H^s(A) \leqslant H^s(B)$;若 $\{A_i\}$ 为 R^n 中互不相交的波雷尔(Borel)集,则

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i)$$

Hausdorff 测度推广了长度、面积和体积等类似概念,下面让我们比较一下 n 维 Hausdorff 测度 H^n 与 n 维 Lebesque 测度,即通常的 n 维体积.注意到 R^n 中直径为 $2r$ 的最大集合是半径为 r 的球,从而有对于 $A \subset R^n$

$$H^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^n \,\middle|\, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A, B_i \text{ 是 } R^n \text{ 中的球}\right\} \tag{3.3}$$

而 Lebesque 测度就是物体的体积,则

$$L^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_i) \,\middle|\, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A, B_i \text{ 是 } R^n \text{ 中的球}\right\}$$

由于

$$\mathrm{Vol}(B(x,r)) = \mathrm{Vol}(B(0,r)) = \mathrm{Vol}(B(0,1))r^n$$

则

$$|B(x,r)| = (2r)^n = [2^n/\mathrm{Vol}(B(0,1))]\mathrm{Vol}(B(x,r))$$

$$= \mathrm{Vol}(B(x,r))/\mathrm{Vol}(B(0,\frac{1}{2})) \qquad (3.4)$$

从而

$$H^n(A) = L^n(A)/\mathrm{Vol}(B(0,\frac{1}{2}))$$

$$= \frac{2^{n-1}n\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}}L^n(A) \quad A \subset R^n \qquad (3.5)$$

其中 $\Gamma(x)$ 是一 Γ 函数.

下面我们给出一个显而易见的性质.

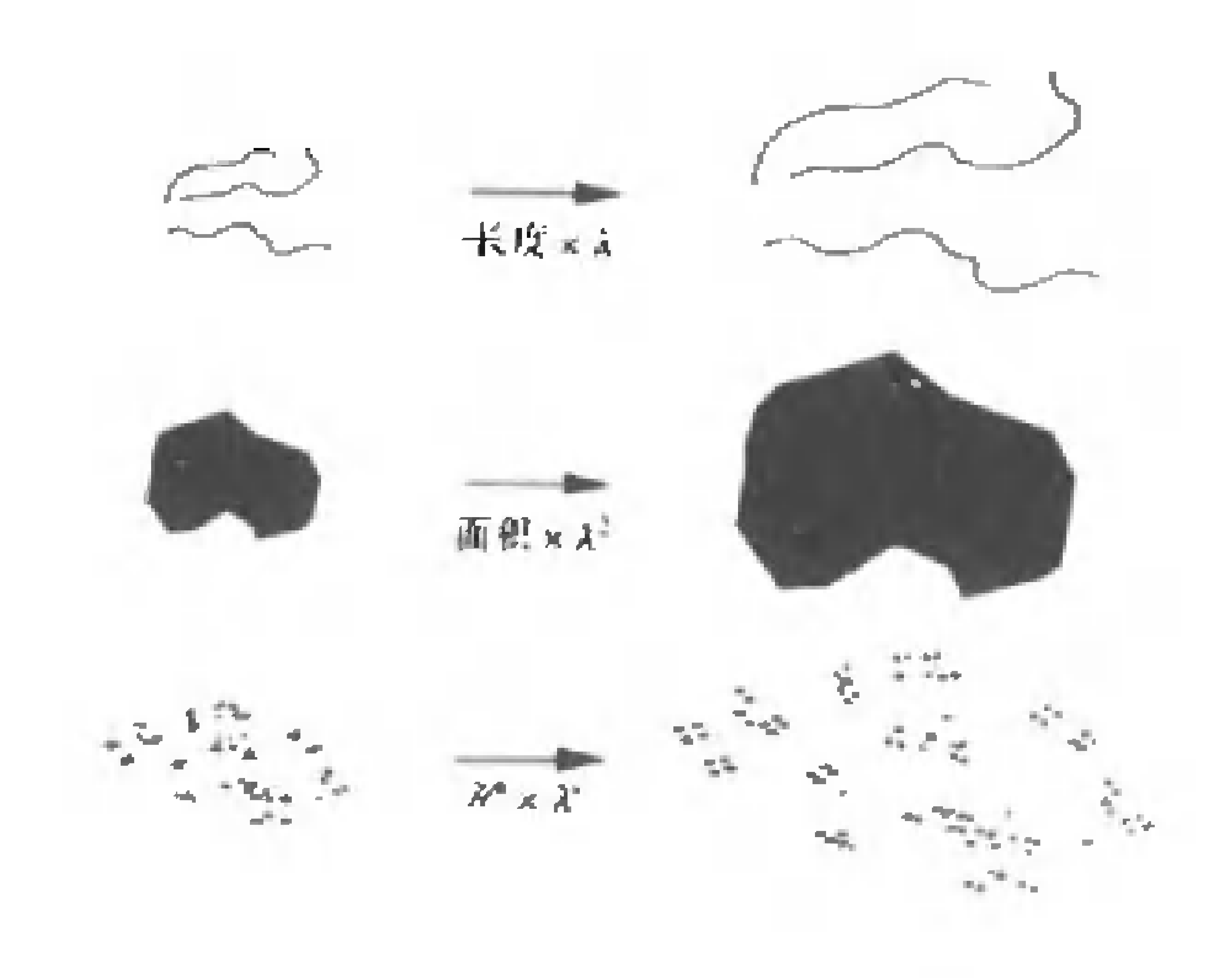


图 3.2 用比例 λ 放大集合,长度放大 λ 倍,面积放大 λ^2,s 维 Hausdorff 测度放大 λ^s 倍

定理 3.1 若 $s \geqslant 0$,且 $\lambda > 0$,则 $H^s(\lambda A) = \lambda^s H^s(A)$, $\forall A$
这里 $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$,即 A 按比例放大 λ 倍.

证明 若$\{U_i\}$为 A 的一个 δ 覆盖，则$\{\lambda U_i\}$为 λA 的一个 δ 覆盖. 所以对于任一 A 的 δ 覆盖$\{U_i\}$

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

从而

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \leqslant \lambda^s H^s_\delta(A)$$

让 $\delta \to 0$ 得

$$H^s(\lambda A) \leqslant \lambda^s H^s(A) \tag{3.6}$$

在(3.6)式中 A 代替 λA，λ 代替$\frac{1}{\lambda}$得

$$H^s(\lambda A) \geqslant \lambda^s H^s(A) \tag{3.7}$$

从而得到所需的等式.

Hausdorff 测度是平移不变的，而且也是旋转不变的. 但是当比例放大 λ 倍时，s 维的 Hausdorff 测度放大 λ^s，如图3.2. 这个比例性质是分形理论的基础.

§3.1.2 Hausdorff 维数和拓扑维数

对于二维正方形 $A = [0,1] \times [0,1]$，则其体积 $L^3(A) = 0$，其面积 $L^2(A) = 1$，而且长度 $L^1(A) = \infty$. 其实对于一般的 Hausdorff 测度而言也是同样的，设 A 的 Hausdorff 测度 $0 < H^s(A) < \infty$，则对 A 的任一 δ 覆盖$\{U_i\}$和 $\varepsilon > 0$

$$\sum_i |U_i|^{s+\varepsilon} \leqslant \delta^\varepsilon \sum_i |U_i|^s$$

$$\sum_i |U_i|^s \leqslant \delta^\varepsilon \sum_i |U_i|^{s-\varepsilon} \tag{3.8}$$

对$\{U_i\}$取下确界得

$$\delta^{-\varepsilon} H^{s+\varepsilon}_\delta(A) \leqslant H^s_\delta(A) \leqslant \delta^\varepsilon H^{s-\varepsilon}_\delta(A) \tag{3.9}$$

从而有 $\delta \to 0$ 时

$$H^{s+\varepsilon}(A)=0 \text{ 且 } H^{s-\varepsilon}(A)=\infty \tag{3.10}$$

这使得我们给出集合 A 的 Hausdorff 维数 $d_H(A)$ 为

$$d_H(A) \xlongequal{\text{def}} \inf\{s \mid H^s(A)=0\}$$

$$\xlongequal{\text{def}} \sup\{s \mid H^s(A)=\infty\} \tag{3.11}$$

所以

$$H^s(A)=\begin{cases}\infty & (\text{若 } s<d_H)\\ 0 & (\text{若 } s>d_H)\end{cases} \tag{3.12}$$

如果 $s=d_H$，则 $H^s(A)$ 可以为零或者无穷或者满足

$$0<H^s(A)<\infty \tag{3.13}$$

Hausdorff 维数满足下面的性质：

(1) 若 $A\subset R^n$ 为开集，因 A 包含一个具有正 n 维体积的球，所以 $d_H(A)=n$.

(2) 若 A 为 R^n 中光滑(即连续可微) m 维流形(即 m 维曲面)，则 $d_H(A)=m$. 特别地，光滑曲线维数为 1，光滑曲面维数为 2.

(3) 若 $A\subset B$，则 $d_H(A)<d_H(B)$. 这可以对每一 s，由 $H^s(A)\leqslant H^s(B)$ 立即得到.

(4) 若 $A_1,A_2,\cdots$ 为一可数集序列，则 $d_H(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sup_{1\leqslant i<\infty}\{d_H(A_i)\}$. 由单调性，对每一 j，必然有 $d_H(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\geqslant d_H(A_j)$. 另一方面，若 $s>d_H(A_i)$，则对所有的 i，$H^s(A_i)=0$，所以 $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=0$，从而给出反向不等式.

(5) 若 A 是可数的，则 $d_H(A)=0$. 若 A_i 是一单点，有 $H^0(A_i)=1$，$d_H(A_i)=0$，所以由可数稳定性可得 $d_H(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=0$.

在分形理论中还常会出现拓扑维数这一概念，给出其定义将是必要的. 让我们先注意到这样一个简单的事实，对于一长度为 l 的线段 A，若用长度小于 l 的开区间去覆盖时则需要两个这样的开区间，若是对于直径为 l 的二维圆盘，则需要三个直径小于 l 的开圆盘才能盖住，而进一步地，至少需要四个直径小于 l 的开球才能盖住一个直径为 l 的球. 同样地，对于直径为 l 的 n 维球至少需要 $n+1$ 个直径小于 l 的开球才能盖住，这使得我们给出如下的概念：

对于 $A \subseteq R^n$，$k = d_T(A)$ 称为 A 的拓扑维数（topological dimension），若 k 是满足下列条件的最小整数：对任意的 $\delta > 0$，存在 R^n 中的开球列 $\{B_l\}$ 为 A 的 δ 覆盖，使得 $\{B_l\}$ 中任何 $k+2$ 个开球的交

$$B_{l_1} \cap B_{l_2} \cap \cdots \cap B_{l_{k+2}} = \varnothing \tag{3.14}$$

因此拓扑维数是整数.

一般来说，计算集合的 Hausdorff 维数是相当困难的，但计算其拓扑维数则要相对容易得多，对于 n 维球 $B^n(\mathbf{0}, r)$ 而言，其拓扑维数 $d_T(B^n(\mathbf{0}, r)) = d_H(B^n(\mathbf{0}, r)) = n$ 是显而易见的.

下面给出几个拓扑维数的计算例子.

例 1 Cantor 三分集.

其构造如下：选取一个欧氏长度为 L_0 的直线段，将该线段三等分，去掉中间一段，剩下两段. 将剩下的两段分别再三等分，各去掉中间一段，剩下四段. 继续上述过程，直至无穷，这样经无限次操作，达到极限时所得到的离散集 A 称之为 Cantor 集，如图 3.3 所示. 其拓扑维数 $d_T(A) = 0$，事实上，注意到 $L(A) = 0$ 且 A 是闭集，则任意 $\delta > 0$，我们容易取得 A 的 δ 覆盖，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相交的开区间，即 $d_T(A) = 0$.

例 2 Sierpinski 垫.

Sierpinski 垫是一个初始边长为 r 的等边三角形反复去掉边长为原三角形的一半且顶点在原三角形各边的中点的开的三角形

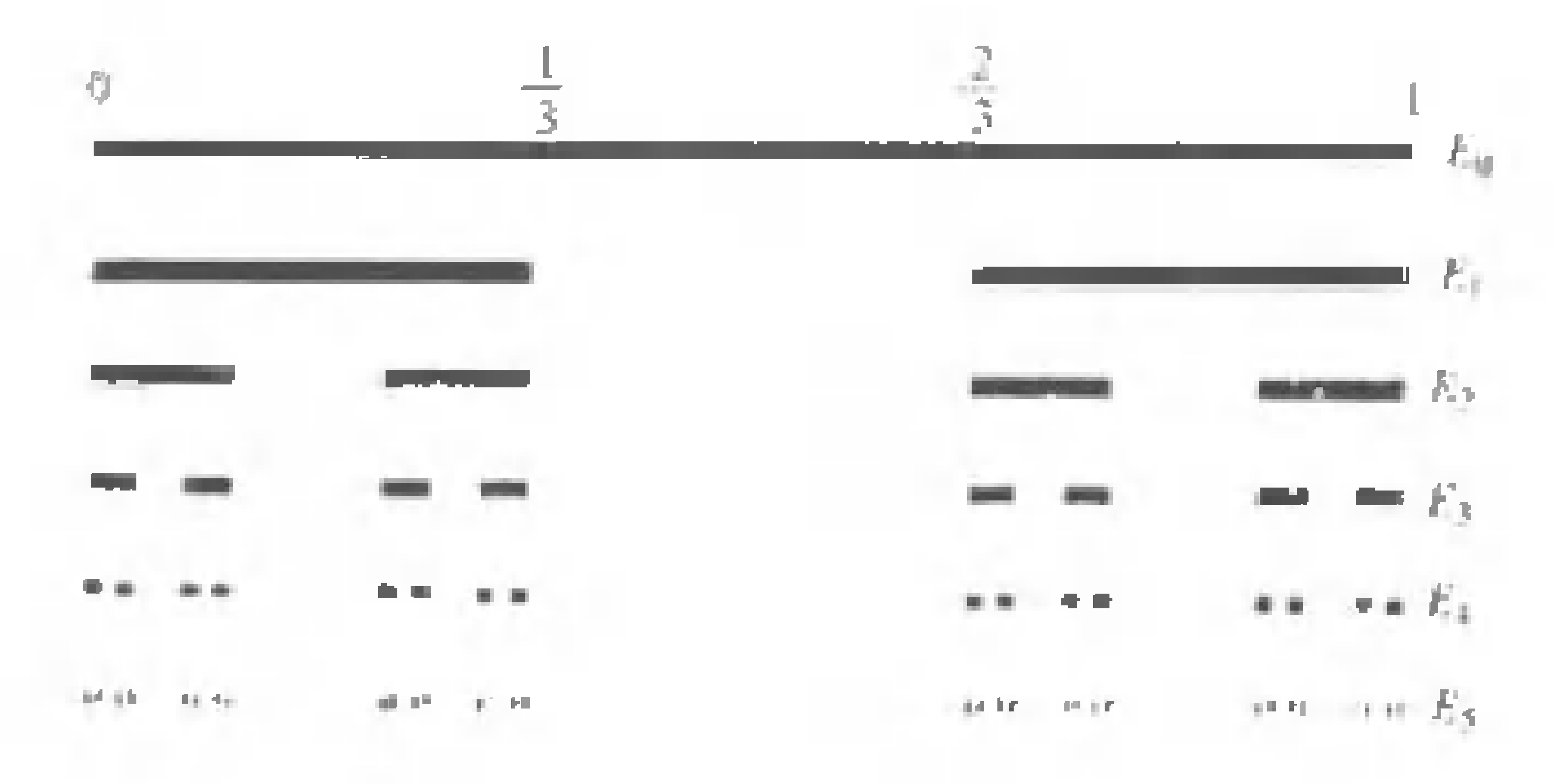


图 3.3　三分 Cantor 集

而得到的.其具体构造步骤如图 3.4 所示.其拓扑维数 $d_T(A)=1$.

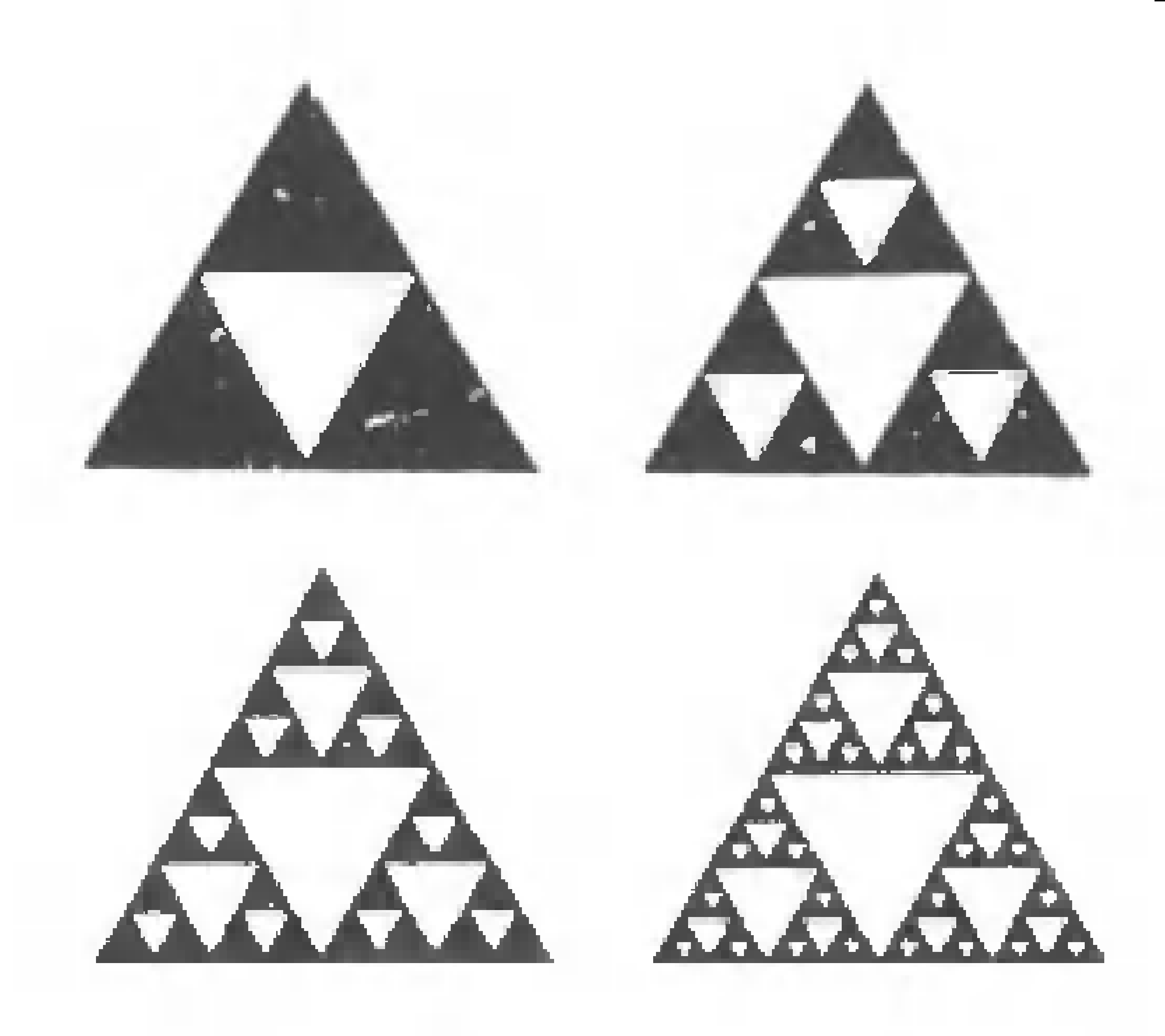


图 3.4　Sierpinski 垫

注意到边长的 r 的等边三角形的外接圆的直径为$\sqrt{3}r/2$,所以第一步 E_1 后所剩的 3 个三角形外接圆的直径都是$\sqrt{3}r/4,\cdots$,第 k 步 E_k 后所剩的 3^k 三角形外接圆的直径为$\sqrt{3}r/2^{k+1}$.从而 $\forall\delta>0$,取 k 充分大使得$\delta>\epsilon+\sqrt{3}r/2^{k+1}$,其中 ϵ 充分小,使得我们可以取直径为 $\epsilon+\sqrt{3}r/2^{k+1}$ 的 3^k 个圆,分别盖住 E_k 的每个等边三角

形，且它们中的任何三个球之交是空集，即有 $d_T(A)=1$.

例 3　Koch 曲线.

Koch 曲线的构造如图 3.5，设 E_0 是单位长度的线段. E_1 是由 E_0 除去中间 1/3 等分线段而代之以底边在除去的线段上的等边三角形另外两边所得到的集，因此 E_1 由四条长度为 $\frac{1}{3}$ 线段组成. 依次类推，E_k 是把 E_{k-1} 的每条直径段中间 $\frac{1}{3^k}$ 长度为边的等三角形另外两条边与原线段的两条边连接而成. 因此，E_k 是 4^k 条长度为 $\frac{1}{3^k}$ 的线段连接成的. 当 $k\to\infty$ 时，得极限 A 并称其为 Koch 曲线. 对于 A 的拓扑维数可以如下求得. 由于 E_k 的每一直线段的长度为 3^{-k}，所以 $\forall\delta>0$，可以取 $\varepsilon>0$ 充分小且 k 充分大，使得 $\delta>\varepsilon+3^{-k}$，而使得 4^k 个直径为 $\varepsilon+k^{-3}$ 且圆心分别在每一线段中点的圆恰是 A 的一个 δ 覆盖且任何三个这样的圆必然交空，所以 $d_T(A)=1$.

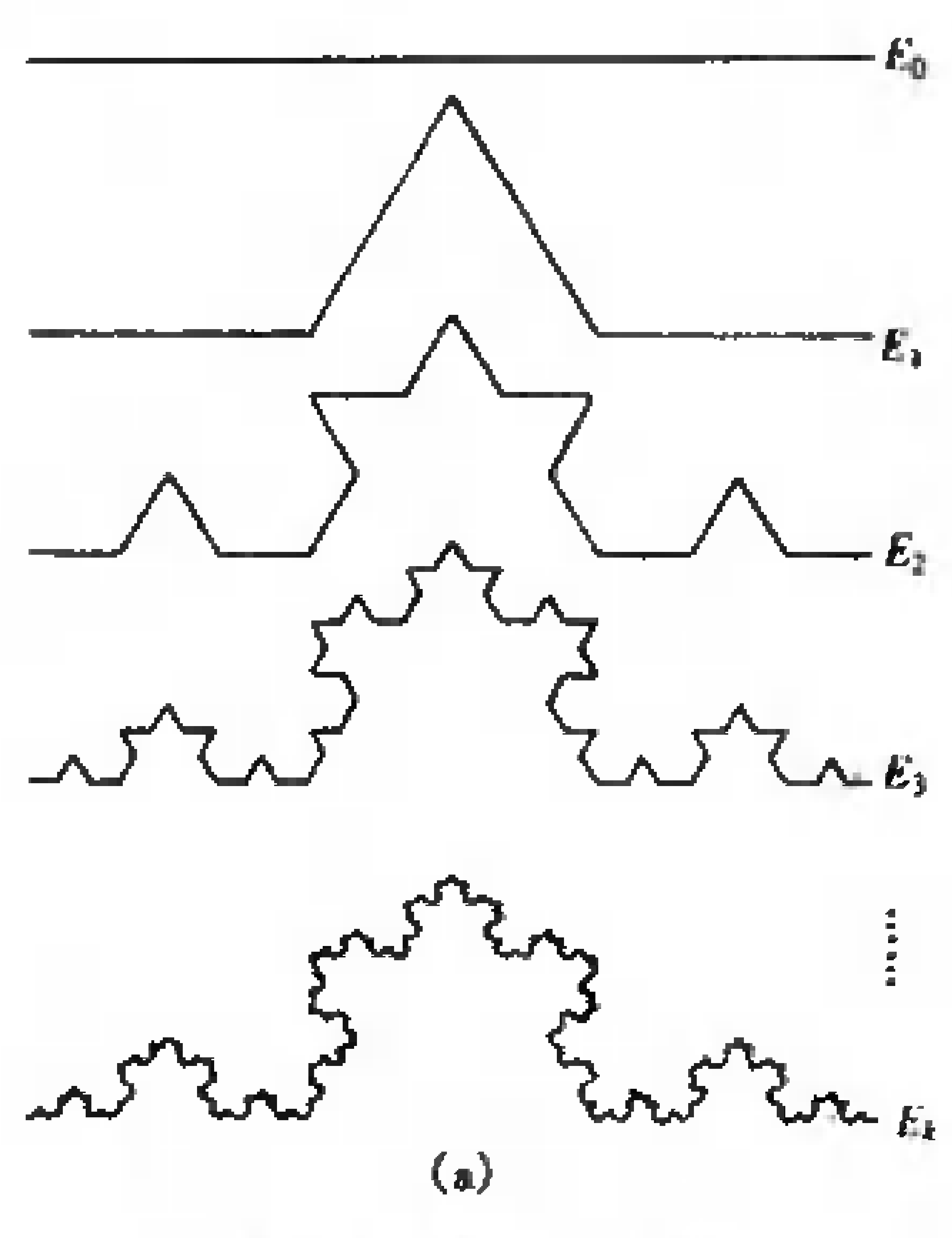


图 3.5　随机 Koch 曲线

§3.1.3 盒维数

盒维数(box dimension)是应用最广泛的维数概念之一，它之所以被普遍应用主要是由于这种维数的数学计算及经验估计相对容易一些.我们在3.1.2中所定义的Hausdorff维数虽是最重要的维数，与其相应的H^s是测度，但其计算则是困难的，这是因为定义所涉及的δ覆盖太多，为此我们将去掉一些δ覆盖，而只关心对于$A \subset R^n$,

$$U_\delta(A) = \{\{U_i\} \mid \bigcup_i U_i \supset A, \mid U_i \mid = \delta, U_i \text{ 是 } R^n \text{ 中球}\} \tag{3.15}$$

则$s \geqslant 0$,

$$\delta^s n_\delta(A) = \inf\left\{\sum_i \mid U_i \mid \middle| \{U_i\} \in V_\delta(A)\right\} \tag{3.16}$$

其中$n_\delta(A)$是R^n中直径为δ且其盖住A的球的最小个数.由于当$\delta < \delta'$时，$V_\delta(A)$与$V_{\delta'}(A)$之间没有必然的包含或被包含关系，即当$\delta \to 0$时，$\delta^s n_\delta(A)$的极限不一定存在，所以令

$$\bar{d}_B(A) = \inf\left\{s > 0 \middle| \bar{B}^s(A) = 0, \bar{B}^s(A) = \overline{\lim_{\delta \to 0}}\delta^s n_\delta(A)\right\} \tag{3.17}$$

称其为A的上盒维数.同样地，我们称

$$\underline{d}_B(A) = \sup\left\{s \middle| \underline{B}^s(A) = \infty, \underline{B}^s(A) = \underline{\lim_{\delta \to 0}}\delta^s n_\delta(A)\right\} \tag{3.18}$$

为A的下盒维数，当$\underline{d}_B(A) = \bar{d}_B(A)$时，称$d_B(A) = \bar{d}_B(A) = \underline{d}_B(A)$为$A$的盒维数(box counting dimension).

值得注意的是，当$\underline{B}^s(A) = \bar{B}^s(A)$时，记其为$B^s(A)$，并有

$$d_B(A) = \sup\left\{s \middle| B^s(A) = \infty\right\} = \inf\left\{s \middle| B^s(A) = 0\right\} \tag{3.19}$$

这时的 B^s 与 Hausdorff 测度 H^s 的地位是一样的，但 B^s 不再是测度，不过从定义可见

$$d_H(A) \leqslant \underline{d}_B(A) \leqslant \overline{d}_B(A), \forall A$$

在 Mandelbrot[1975] 的文章中，Mandelbrot 给出了下面的关于盒维数的等价定义.

定理 3.2 当 A 的盒维数存在时，有

$$d_B(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log n_\delta(A)}{\log \dfrac{1}{\delta}}$$

证明 令

$$\overline{d} = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \log n_\delta(A) / \log \frac{1}{\delta}$$

$$\underline{d} = \underline{\lim_{\delta \to 0}} \log n_\delta(A) / \log \frac{1}{\delta}$$

即需证明

$$d_B(A) = \overline{d} = \underline{d}$$

对于任意 $t < \overline{d}$ 以及 $t < s < \overline{d}$ 有

$$s < \overline{\lim_{\delta \to 0}} \log n_\delta(A) / \log \frac{1}{\delta}$$

即存在点列 $\delta_k \to 0$，使得

$$s < \log n_{\delta_k}(A) / \log \frac{1}{\delta_k}, \quad n_{\delta_k}(A) > \delta_k^{-s}$$

由此得

$$B^t(A) = \lim_{\delta \to 0} \delta^t n_\delta(A) = \lim_{k \to \infty} \delta_k^t n_{\delta_k}(A) \geqslant \lim_{k \to \infty} \delta_k^t \delta_k^{-s} = \infty$$

$$d_B(A) = \sup\{s \mid B^s(A) = \infty\} \geqslant t, \qquad \forall t < \overline{d}$$

这意味着 $d_B(A) \geqslant \overline{d}$.

另一方面，对于任意的 $t > \underline{d}$ 和 $\underline{d} < s < t$，有

$$s > \underline{\lim_{\delta \to 0}} \log n_\delta(A) / \log \frac{1}{\delta}$$

由此可取点列 $\delta_k \to 0$,使得

$$s > \log n_{\delta_k}(A) / \log \frac{1}{\delta_k}, \quad n_{\delta_k}(A) < \delta_k^{-s}$$

从而

$$B^t(A) = \lim_{\delta \to 0} \delta^t n_\delta(A) = \lim_{k \to \infty} \delta_k^t n_{\delta_k}(A) = \lim_{k \to \infty} \delta_k^t \delta_k^{-s} = 0$$

$$d_B(A) = \inf\{s \mid B^s(A) = 0\} \leqslant t, \forall t > \underline{d}$$

因此 $d_B(A) \leqslant \underline{d} \leqslant \overline{d} \leqslant d_B(A)$.证毕.

盒维数有一些等价的定义,有时这些定义更适合应用,这些不同形式的定义概括如下,并用图 3.6 表示其等价定义:

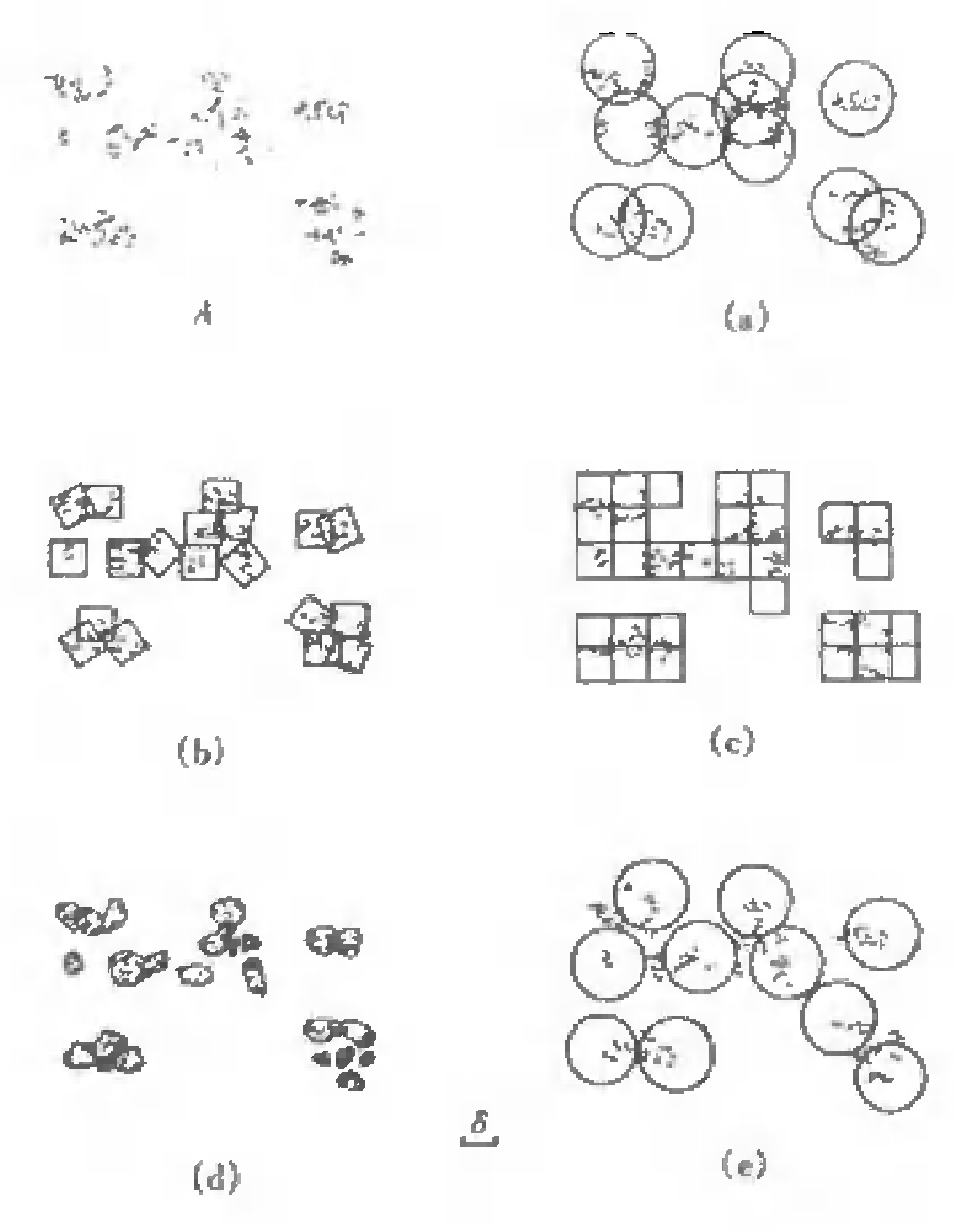


图 3.6　求 A 的盒维数的五种方法

(a) ~ (e) 分别与等价定义中的(i) ~ (v) 相对应

R^n 子集 A 的下、上盒维数由下列两式给出

$$\underline{\dim}_B(A) = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}$$

$$\overline{\dim}_B(A) = \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta} \tag{3.20}$$

A 的盒维数由下式定义：

$$\dim_B(A) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta} \quad (\text{如果这个极限存在的话}) \tag{3.21}$$

其中 $N_\delta(A)$ 是下列五个数中的任一个：

(i) 覆盖 A 的半径为 δ 的最少闭球数；

(ii) 覆盖 A 的边长为 δ 的最少的立方体数；

(iii) 与 A 相交的 δ 网立体的个数，即下列形式的立方体：

$$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_n\delta,(m_n+1)\delta]$$

其中 $m_1,\cdots,m_n$ 都是整数，显而易见，在 R 中"立体"即表示为区间，在 R^2 中表示为正方形；

(iv) 覆盖 A 的直径最大为 δ 的集的最少个数；

(v) 球心在 A 上，半径为 δ 的相互不交的球的最多个数.

应当指出，在式(3.20)、(3.21)中，为考虑当 $\delta\to 0$ 时的极限，只要考虑通过任一满足 $\delta_{k+1}\geqslant c\delta_k$ 的递减序列 δ_k 趋于零时的极限，其中 $0<c<1$，特别是在 $\delta_k = c^k$ 的情形，为看清这一点，注意到如果 $\delta_{k+1}\leqslant\delta\leqslant\delta_k$，则

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\frac{\log N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\log\delta_k}\leqslant\frac{\log N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\log\delta_{k+1}+\log(\delta_{k+1}/\delta_k)}$$

$$\leqslant\frac{\log N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\log\delta_{k+1}+\log c} \tag{3.22}$$

因此有

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log N_{\delta_k}(A)}{-\log\delta_k}\tag{3.23}$$

相反的不等式是平凡的，下极限也可用同样的方法处理.

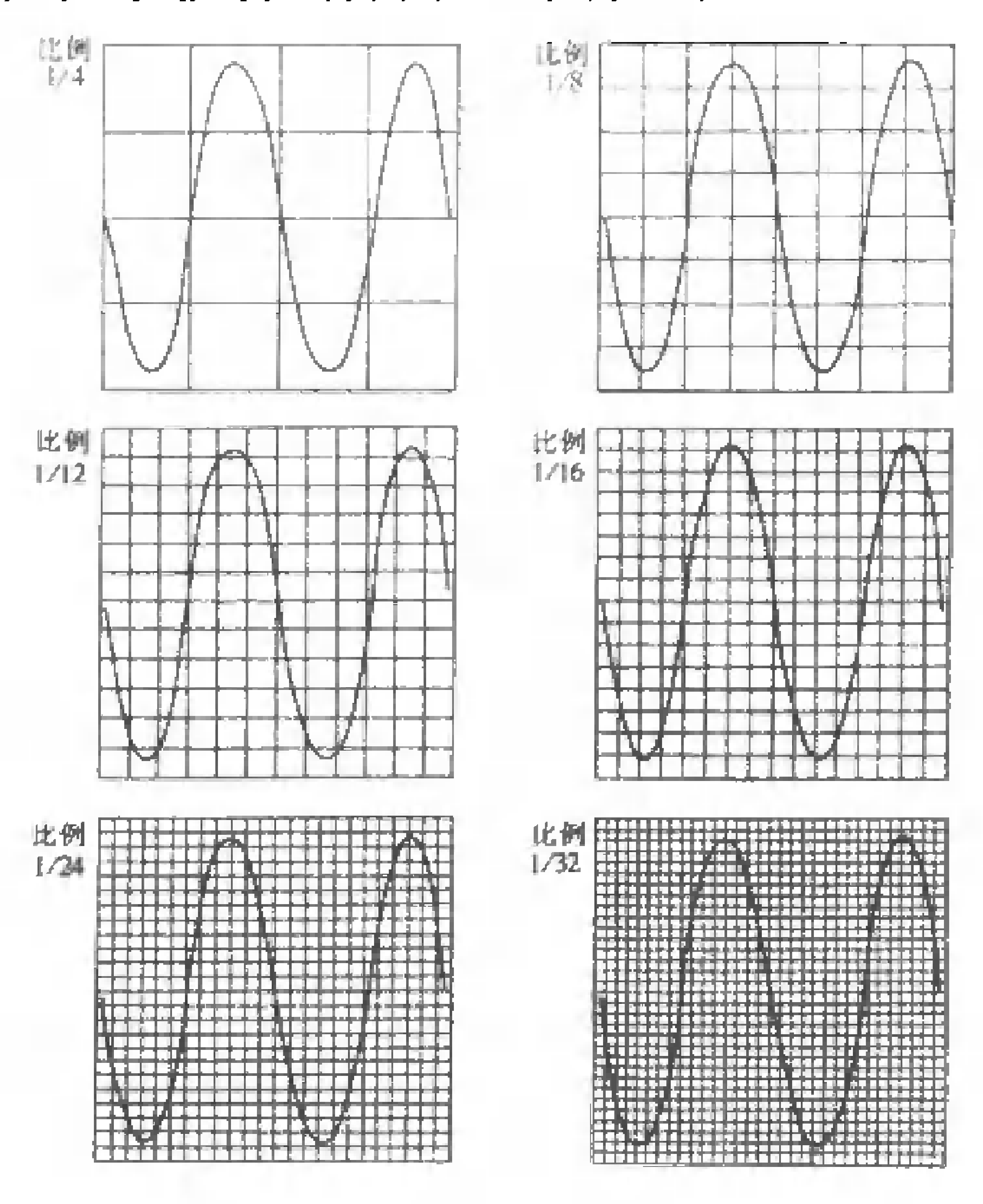


图 3.7　波线 W 的图形

盒维数有这样的重要性质，即集合 A 的盒维数等于其闭包的盒维数：$d_B(A)=d_B(\bar{A})$，这是与 Hausdorff 维数大相径庭之处. 由此很容易找到集合 A，使得 $d_H(A)<d_B(A)$.

例如[0,1]中的有理数集 A 是可列集，因此 $d_H(A)=0$，但是

$$d_B(A)=d_B(\bar{A})=d_B([0,1])=1$$

值得注意的是，对于有界集 $A\subseteq R^n$，当 $n_\delta(A)$ 表示覆盖 A 的以 δ 为边长之 n 维立方体的最小个数时，相对应的 $d_B(A)$ 和 $B'(A)$ 具有与上述一致的结论.

从定理 3.2 可见，当 $\lambda=\log\frac{1}{\delta}$ 充分大时，若记 $f_A(\lambda)=\log n_\delta(A)$，则 $f_A(\lambda)\approx c+d_B(A)\lambda$，即 $f_A(\lambda)$ 近似于线性函数. 求 $d_B(A)$ 即为求此函数所代表的直线的斜率. 这也是盒维数之近似计算的理论依据.

接下来我们将给出波线 W、Koch 曲线 K 和大不列颠海岸线 G 的图形，并把其分别置于格子边长为 $\delta=\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{32}$ 的方格纸中，而 $n_\delta(A)(A=W,K,G)$ 则近似地表示边长为 δ 的与图形 A 相交的格子数并把它们列成下表.

δ	1/4	1/8	1/12	1/16	1/24	1/32
$n_\delta(W)$	11	34	51	68	100	135
$n_\delta(K)$	6	14	16	32	55	74
$n_\delta(G)$	16	48	84	122	194	283

由于

$$f_A(\lambda)\approx c+d_B(A)\lambda \tag{3.24}$$

因此

$$d_B(A)\approx\frac{f_A(\lambda_{k+1})-f_A(\lambda_k)}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \tag{3.25}$$

由此表可以求得 $d_B(A)$ 的近似值.

对照此表，不难想象对于 $\lambda_k=\log\delta_k^{-1}$，$\delta_k=\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{1}{24},$

$\frac{1}{32}$,…,以及相应于波线 W 和 Koch 曲线 K 的函数 $f_W(\lambda)$ 和 $f_k(\lambda)$ 当 K 充分大时点 $(\lambda_k, f_W(\lambda_k))$ 和 $(\lambda_k, f_k(\lambda_k))$ 应分别在斜率为 $\log4/\log3$ 的直线上,即我们可以近似地认为

$$d_B(W) \approx 1 \text{ 以及 } d_B(K) \approx \log4/\log3 \qquad (3.26)$$

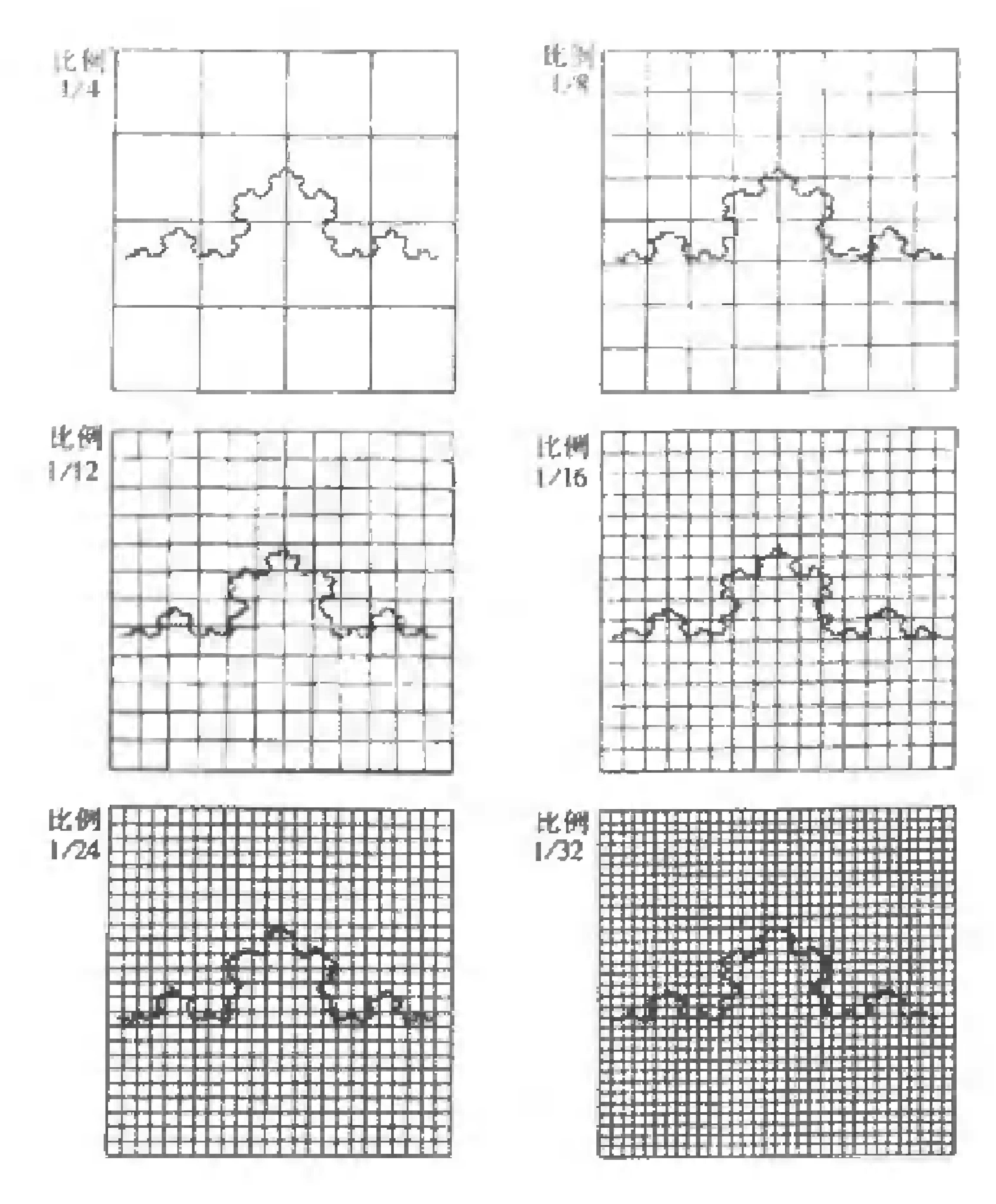


图 3.8 Koch 曲线 K

对于 G 很难找到一个精细的盒维数,设 $f_G(\lambda)$ 是相应于 G 的函数,不难看到 $f_G(\lambda)$ 的斜率可以看成

$$\frac{\log 283-\log 194}{\log 32-\log 24}\approx\frac{2.45-2.29}{1.51-1.38}\approx 1.31$$

即

$$d_B(G)\approx 1.31 \tag{3.27}$$

另外,了解盒维数与 Hausdorff 维数之间的关系是重要的,如果 A 能被 $N_\delta(A)$ 个直径为 δ 的集覆盖,则 $H_\delta^s(A)\leqslant N_\delta(A)\delta^s$.若 $1<H^s(A)=\lim\limits_{\delta\to 0}H_\delta^s(A)$,只要 δ 充分小,就有 $\log N_\delta(A)+s\log\delta>0$,即

$$s\leqslant\lim_{\delta\to 0}\log N_\delta(F)/(-\log\delta)$$

所以

$$\dim H(A)\leqslant\underline{\dim}B(A)\leqslant\overline{\dim}B(A) \tag{3.28}$$

对于任意 $A\subset R^n$ 成立.一般这里不能得到等号,虽然对许多"相当规则"的集,Hausdorff 维数与盒维数是相等的,然而,也有大量使不等号严格成立的例子.

如果 $s=\dim B(A)$,从式(3.20)粗略地可以看到,当 δ 充分小时,$N_\delta(A)\approx\delta^{-s}$,确切地,它说明

$$N_\delta(A)\delta^s\to\infty,\text{如果 } s<\dim B(A)$$

$$N_\delta(A)\delta^s\to 0,\text{如果 } s>\dim B(A)$$

但是 $N_\delta(A)\delta^s=\inf\{\sum\limits_i\delta^s:\{U_i\}$是 A 的有限的 δ 覆盖$\}$,如果将它与 $H_\delta^s(A)=\inf\{\sum\limits_i|U_i|^s:\{U_i\}$是 A 的 δ 覆盖$\}$比较,就不难发现,在计算 Hansdorff 维数时,给每个覆盖集 U_i 以不同的分量 $|U_i|^s$,而在计算盒维数时给每个覆盖集以相同的分量 δ^s.所以可以认为盒维数是表示一个集合能被相同形状的小集合覆盖的效率,而 Hausdorff 维数则涉及到可能是形状相当不同的小集合的覆盖.

由于盒维数是用相同形状集的覆盖来确定的,它计算起来当然比 Hausdorff 维数容易,因而被人们广泛应用.

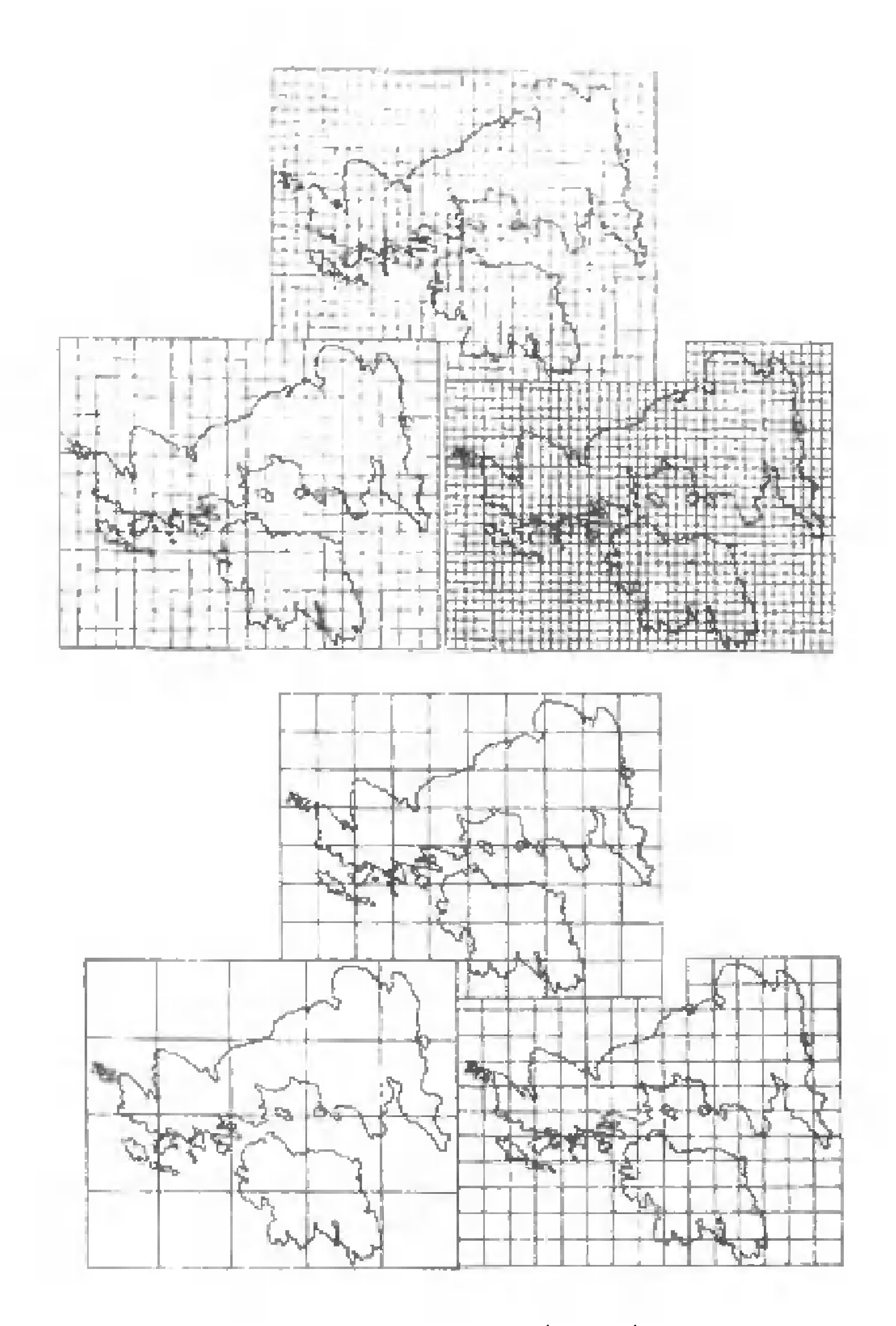


图 3.9 大不列颠海岸线的图形

§ 3.1.4 相似维数

前几节我们曾给出过一些非常特殊的集合，如 Cantor 三分集，Sierpinski 垫和 Koch 曲线等. 这些集合都有这样一种共同的性质:

其整体可以分成数个组成部分，而每一部分放大一个适当倍数，且经刚体运动后则可同原整体重合，通常我们把满足这一性质的集合称为严格自相似集．如Cantor集可以分成两部分，而每一部分是原集合缩小1/3倍而得到的．Koch曲线 K 是四个 K 的1/3倍而得的集合之并，而 Sierpinski 垫则是四个原集合缩小1/2倍而得的集合的并，对于同样一些严格自相似集，应该有某种容易计算的维数，这就是相似维数，其定义将与 δ 覆盖毫无关系．

我们先做一些准备：

令 K 是 R^n 中所有有界闭集即紧集的全体，d 满足条件：

$$d(x,A) = \inf\{|x-y| \mid y \in A\}, \quad A \in K \tag{3.29}$$

$$d(A,B) = \max\{\sup[d(x,B) \mid x \in A], \sup[d(y,A) \mid y \in B]\} \tag{3.30}$$

易见 d 是距离，称为 Hausdorff 距离，从而 K 是度量空间．

称 $S: R^n \to R^n$ 为相似映射，若存在 $0 < c < 1$，使得

$$|S(x) - S(y)| = c|x-y|, \forall x,y \in R^n$$

式中 c 称为 S 的压缩比．

定理3.3 设 $S_1,\cdots,S_k$ 是 R^n 上的一组相似映射，则存在着惟一的紧集 $A \in K$ 使得 A 是 $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ 的不动点，即

$$A = S(A) = \bigcup_{i=1}^{k} S_i(A)$$

$\forall$ 非空紧集 $B \in K$ 有 $d(S^m(B),A) \to 0 \quad (m \to \infty)$．

证明 由 Blaschke 选择定理（见 Falconer[1985]），K 关于 Hausdorff 距离是完备的度量空间，下证 S 是压缩的．

设 $c_1,\cdots,c_k$ 是 $S_1,\cdots,S_k$ 的压缩比，则 $0 < c_i < 1$，任取 $A,B \in K$，由 d 的定义，

$$d(S(A),S(B))$$
$$= \max\{\sup[d(y,S(A)) \mid y \in S(B)], \sup[d(x,S(B)) \mid x \in S(A)]\}$$

而对于 $x \in S(A), y \in S(B)$,

$$d(y, S(A)) = d(y, \bigcup_{i=1}^{k} S_i(A))$$

$$\leqslant \max_{m \leqslant k} \sup\{d(y_m, \bigcup_{i=1}^{k} S_i(A)) \mid y_m \in S_m(B)\}$$

$$\leqslant \max_{i \leqslant k} \sup\{d(y_i, S_i(A)) \mid y_i \in S_i(B)\}$$

同样地

$$d(x, S(B)) \leqslant \max_{i \leqslant k} \sup\{d(x_i, S_i(B)) \mid x_i \in S_i(A)\}$$

从而

$$d(S(A), S(B)) \leqslant \max_{i \leqslant k}\{\max\sup\{d(y, S_i(A)) \mid y \in S_i(B)\},$$

$$\sup\{d(x, S_i(B)) \mid x \in S_i(B)\}\}$$

$$= \max_{i \leqslant k} d(S_i(A), S_i(B))$$

$$= \max_{i \leqslant k} c_i d(A, B)$$

故 S 是完备的度量空间 K 中的压缩映射,则由压缩映射原理,S 有惟一的不动点 A.

由压缩映射定理的证明知,$\forall$ 紧集 $B \subset R^n$,都有 $d(S^m(B), A) \to 0 \quad (m \to \infty)$.

根据定理 3.3,我们可以给严格自相似集作一个严格的且略为苛刻的数学定义.

定义 3.1 i) 称集 $A \subset R^n$ 为严格自相似集,若它是紧集,且 A 是 R^n 中相似映射 $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ 的不动点.

ii) 设 $c_1, \cdots, c_k$ 是 $S_1, \cdots, S_k$ 的压缩比,记 $d_s(A)$为方程 $\sum_{i=1}^{k} c_i^s = 1$ 的惟一解,并称其为 A 的相似维数.

定理 3.3 还告诉我们如何在给定相似映射 $S_1, \cdots, S_k$ 的情况下,寻求其严格自相似集,事实上 $\forall a \in R^n$,则迭代 $S^m(a)$,

$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ 就可逼近所要求的严格自相似集，由此可见，对于这种集合，我们可以借助于计算机来求得.

值得注意的是一个严格自相似集可能是数组相似映射的不动点，但所得到的相似维数是惟一的.

下面我们回忆一下前面所提到过的几个集合. Cantor 三分集 A 是由二个相似映射 $S_1(x) = x/3, S_2(x) = (x+2)/3$ 得到，即 $A = S_1(A) \cup S_2(A)$，而 S_1, S_2 的压缩比都是 1/3，所以，Cantor 集的相似维数为 $d_s(A) = \log 2/\log 3$，它是方程 $2(\frac{1}{3})^\alpha = 1$ 的解.

Sierpinski 垫 A 是由三个压缩比都为 $\frac{1}{2}$ 的相似映射 S_1, S_2, S_3 得到的，即 $A = S_1(A) \cup S_2(A) \cup S_3(A)$，且当 $\alpha = \log 3/\log 2$ 及有 $3(\frac{1}{2})^\alpha = 1$，所以 $d_S(A) = \log 3/\log 2$.

Koch 曲线 A 是由 4 个相似映射 S_1, S_2, S_3, S_4 而得的，即 $A = S_1(A) \cup S_2(A) \cup S_3(A) \cup S_4(A)$，而每一个 S_i 的压缩比都是 $\frac{1}{3}$ 且 $\alpha = \log 4/\log 3$ 满足方程 $4(\frac{1}{3})^\alpha = 1$，所以 A 的相似维数为 $d_s(A) = \log 4/\log 3$.

值得注意的是线段、正方形和立方体都是严格自相似集(如图 3.10). 容易看到，它们的相似维数分别为 1,2,3. 从图 3.10 也可见，一个严格自相似集可以是多组相似映射的不动点.

下面我们举一个奇怪的例子，它是平面图形，但其相似维数大于 2.

根据如图 3.11 所示的步骤得到一个严格自相似集 A，易见 A 是由 13 个压缩比同为 1/3 的相似映射 $S_1, S_2, \cdots, S_{13}$ 而得，即 $A = S_1(A) \cup \cdots \cup S_{13}(A)$. 由于 $\alpha = \log 13/\log 3$ 是方程 $13(\frac{1}{3})^\alpha = 1$ 的解，所以 A 的相似维数 $d_s(A) = \log 13/\log 3 \approx 2.335$.

从集合 A 的构造可见，从第二步开始，图形已开始重叠，而计

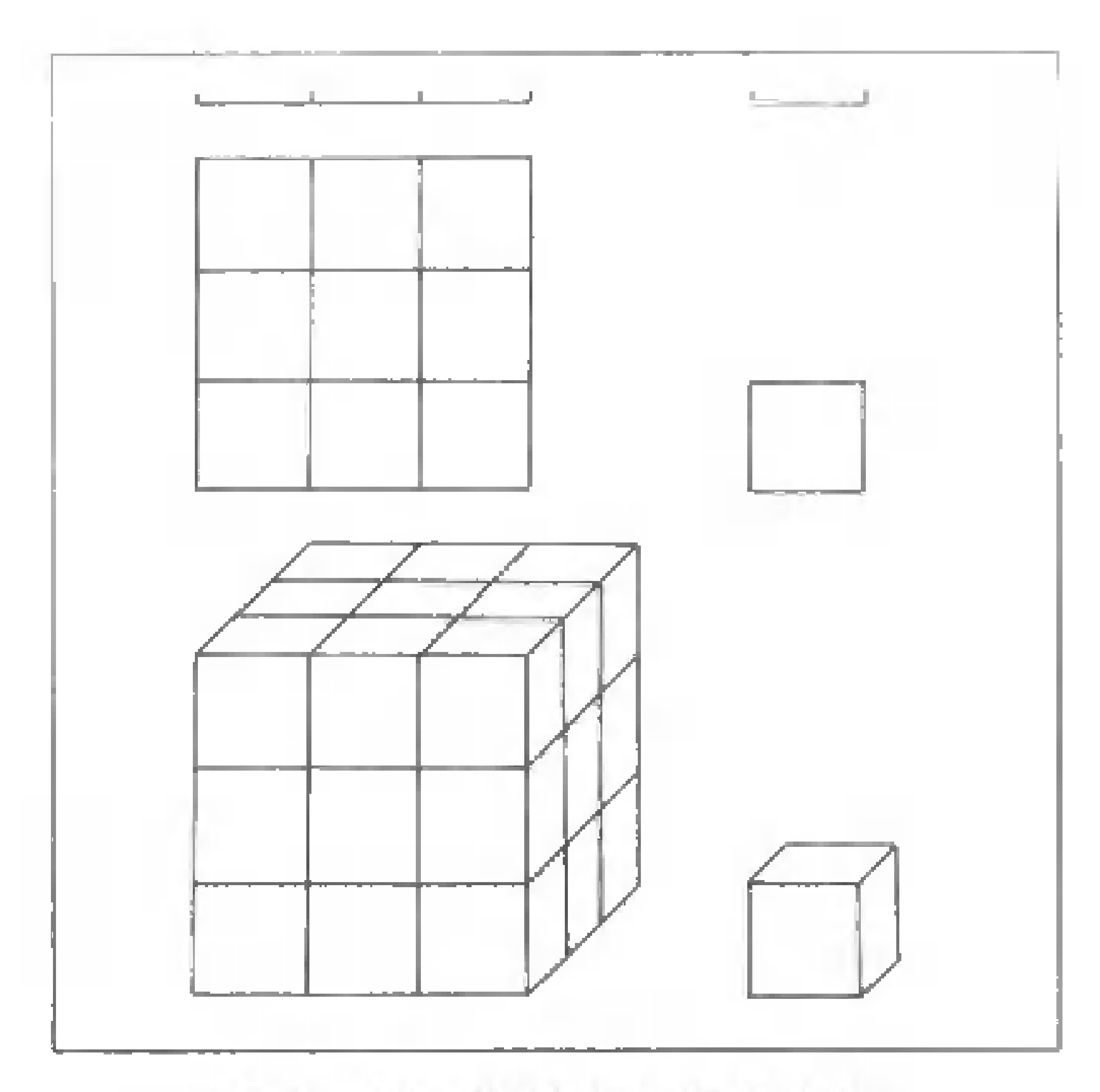


图 3.10　严格自相似集:线段、正方形、立方体

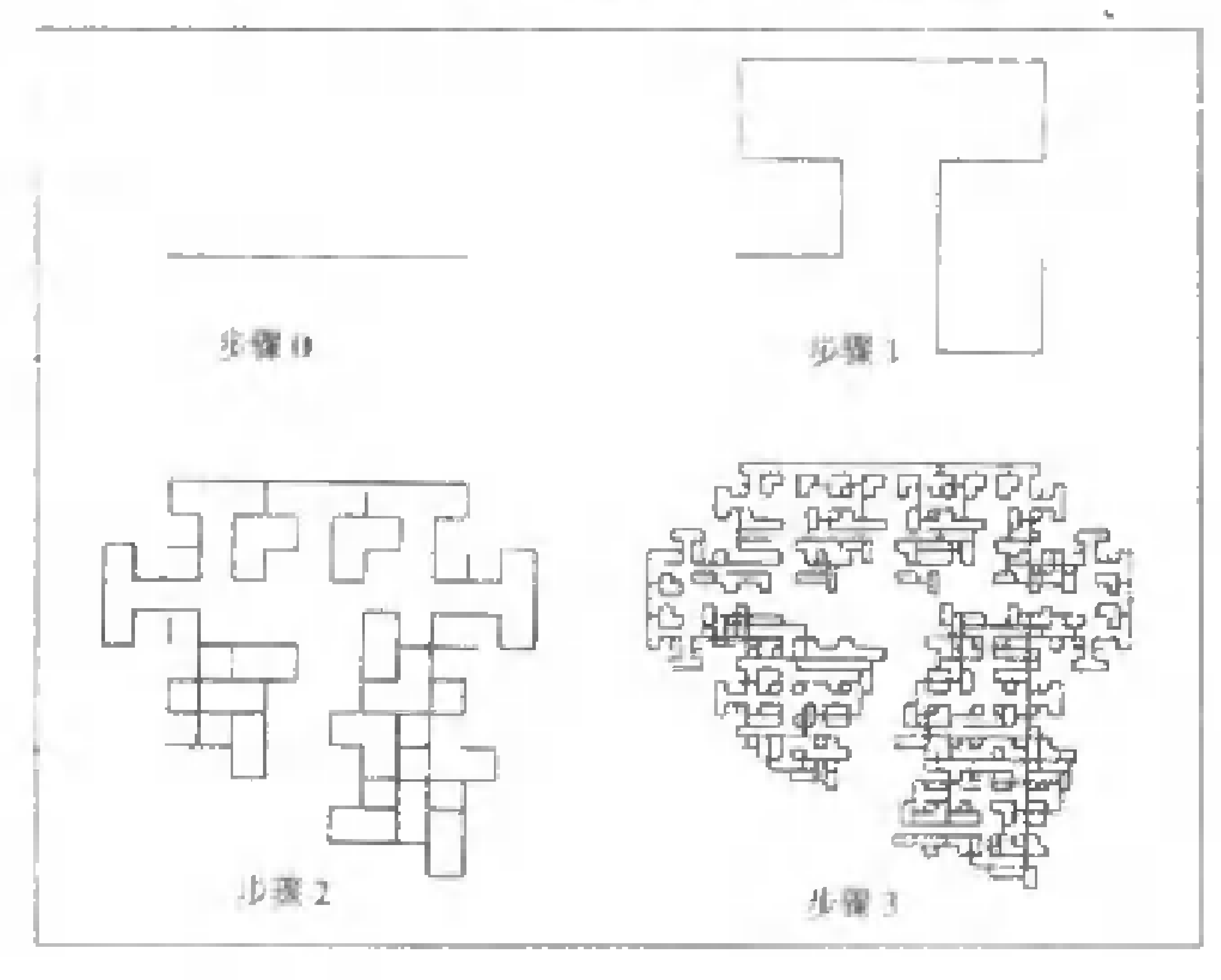


图 3.11　$d_s > 2$ 的严格自相似集

算相似维数时由于把重叠的部分重复计算在内，从而导致平面图形的相似维数大于 2.

§3.2　分形维数之间的关系

在 §3.1.3 中，我们已经知道 $d_H(A) \leqslant d_B(A)$，且存在集合 A 使得 $d_H(A) < d_B(A)$，但是严格自相似集的各种维数却有下列关系.

定理3.4　设 $S_1, \cdots, S_i$，是 R^n 上的相似映射，$A \subseteq R^n$ 是紧集且是 $S = \bigcup\limits_{i=1} S_i$ 的不动点，即 A 是严格自相似集，则

i) $d_H(A) = d_B(A)$;

ii) 若 $\{S_1, \cdots, S_k\}$ 满足下列条件：对有界非空开集 $V \subset R^n$，有

$$S_i(V) \cap S_j(V) = \varnothing，且 \bigcup_{i=1} S_i(V) \subset V$$

则有 $d_H(A) = d_B(A) = d_S(A)$.

此定理是重要的，因为这极大地减少了求严格自相似集的 Hausdorff 维数的困难，同 Falconer[1990] 一样，我们只证明 ii)，在证明之前我们先给出下面定理.

定理3.5　对于 $a_1, a_2, r > 0$，如果 $\{V_i\}$ 是 R^n 中的不交的开子集族，每个 V_i 包含一个半径为 $a_1 r$ 的球，并且包含于一个半径为 $a_2 r$ 的球中，则任何半径为 r 的球 B 最多与 $(1+2a_2)^n a_1^{-n}$ 个 V_i 的闭包 $\overline{V_i}$ 相交.

证明　如果 $\overline{V}_i$ 与 B 相交，则 $\overline{V}_i$ 包含在一个与 B 同心、半径为 $(1+2a_2)r$ 的球中，假定有 q 个 V_i 与 B 相交，则由于 V_i 间互不相交，对所有相应的在 V_i 内部的半径为 $a_1 r$ 的球的体积求和，由此可得 $q(a_1 r)^n \leqslant (1 + 2a_2)^n r^n$，从而有 q 小于或等于 $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$.

定理3.4的证明. 令 $c_1, \cdots, c_m$ 是对应于相似映射 $S_1, \cdots, S_m$ 的

压缩比，对于 $\forall E \subset R^n$，记 $E_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = S_{i_1} \cdot S_{i_2} \cdots S_{i_k}(E)$，且

$$J_k = \{(i_1,\cdots,i_k) | 1 \leqslant i_j \leqslant m\}$$

从而有

$$A = S(A) = S^k(A) = \bigcup_{J_k} A_{i_1,\cdots,i_k}$$

即 A 被 m^K 个集合所覆盖，现我们验证 A 的这一覆盖为它的 Hausdorff 测度提供一个合适的上估计. 事实上，因 $\alpha = d_s(A)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{\alpha} = 1$$

且 $S_{i_1},\cdots,S_{i_k}$ 是具有压缩比为 $c_{i_1},\cdots,c_{i_k}$ 的相似映射，所以

$$\sum_{J_k} | A_{i_1,\cdots,i_k} |^{\alpha} = \sum_{J_k} (c_{i_1},\cdots,c_{i_k})^{\alpha} | A |^{\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^{\alpha}\right)\cdots\left(\sum_{i_1} c_{i_k}^{\alpha}\right) | A |^{\alpha} = | A |^{\alpha}$$

$\forall \delta > 0$，取 k 充分大使得直径 $| A_{i_1,\cdots,i_k} | \leqslant (\max_i c_i)^k | A | < \delta$，从而 $\{A_{i_1,\cdots,i_k} | (i_1,\cdots,i_k) \in J_k\}$ 是 A 的一个 δ 覆盖，所以

$$H_\delta^{\alpha} \leqslant \sum_{J_k} | A_{i_1,\cdots,i_k} |^{\alpha} \leqslant | A |^{\alpha}，从而\ H_\delta^{\alpha} \leqslant | A |^{\alpha} < \infty$$

下面我们再证明 $H^{\alpha}(A) > 0$，令

$$I = \{(i_1,\cdots,i_k,i_{k+1},\cdots) | 1 \leqslant i_k \leqslant m\}$$

$$I_{i_1,\cdots,i_k} = \{(i_1,\cdots,i_k,q_{k+1},\cdots) | 1 \leqslant q_j \leqslant m\}$$

则

$$I = \bigcup_{J_k} I_{i_1,\cdots,i_k},$$

在 I 上定义 μ 使得 $\mu(I_{i_1,\cdots,i_k}) = (c_{i_1},\cdots,c_{i_k})^{\alpha}$，从而可令

$$\mu(I) = \sum_{J_k}\mu(I_{i_1,\cdots,i_k}) = \sum_{J_k}(c_{i_1},\cdots,c_{i_k})^{\alpha} = 1$$

从而 μ 是 I 上的质量分布.

注意到 A 中点与 I 中点以及 $I_{i_1,\cdots,i_k}$ 与 $A_{i_1,\cdots,i_k}$ 都可以一一对应起来，所以我们非常自然地把 μ 变换成 A 上的质量分布 $\tilde{\mu}$. $\tilde{\mu}$ 定义如下：$\forall E \subset A$，定义

$$\tilde{\mu}(E) = \mu\{(i_1,i_2,\cdots) \mid X_{i_1,i_2,\cdots} \in E\}$$

其中 $X_{i_1,i_2,\cdots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$，从而有 $\tilde{\mu}(A) = \mu(I) = 1$，且

$$\tilde{\mu}(F_{i_1,i_2,\cdots,i_k}) = \mu(I_{i_1,i_2,\cdots,i_k})$$

由于 V 是满足有关条件的开集，从而 V 的闭包满足条件 $\overline{V} \supset S(\overline{V}) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(\overline{V})$，所以递减的迭代序列 $S^K(\overline{V})$ 收敛到 A. 特别地，$\overline{V} \supset A$，从而对每一有限列 $(i_1,\cdots,i_k)$，$\overline{V}_{i_1,\cdots,i_k} \supset A_{i_1,\cdots,i_k}$，设 B 是任意半径为 $r < 1$ 的球，且集 $\overline{V}_{i_1,\cdots,i_k}$ 与集 $A \cap B$ 相交.

设 i_k 是无穷序列 $(i_1,i_2,\cdots)$ 满足下式

$$(\min c_i) r \leqslant c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k} \leqslant r \tag{3.31}$$

的一个分量，并用 Q 表示所有这样的有限列 $(i_1,\cdots,i_k)$ 所组成的集合，故对 $\forall$ 无穷列 $(i_1,\cdots,i_k,\cdots) \in I$，必存在着某个 k，使得 $(i_1,\cdots,i_k) \in Q$. 因为 $V_1,\cdots,V_m$ 互不相交，所以对每个 $(i_1,\cdots,i_k)$，$V_{i_1,\cdots,i_k,1}\cdots V_{i_1,\cdots,i_k,m}$ 也是互不相交的. 将此与开球套方法（如图 3.12）相结合，可知开集类 $\{V_{i_1,\cdots,i_k} \quad (i_1,\cdots,i_k) \in Q\}$ 中都是两两不交的，现取 a_1 和 a_2，使得 V 含有一个半径为 a_1 的球，并含于一个半径为 a_2 的球中，则对于 $(i_1,\cdots,i_k) \in Q$，集 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 含有

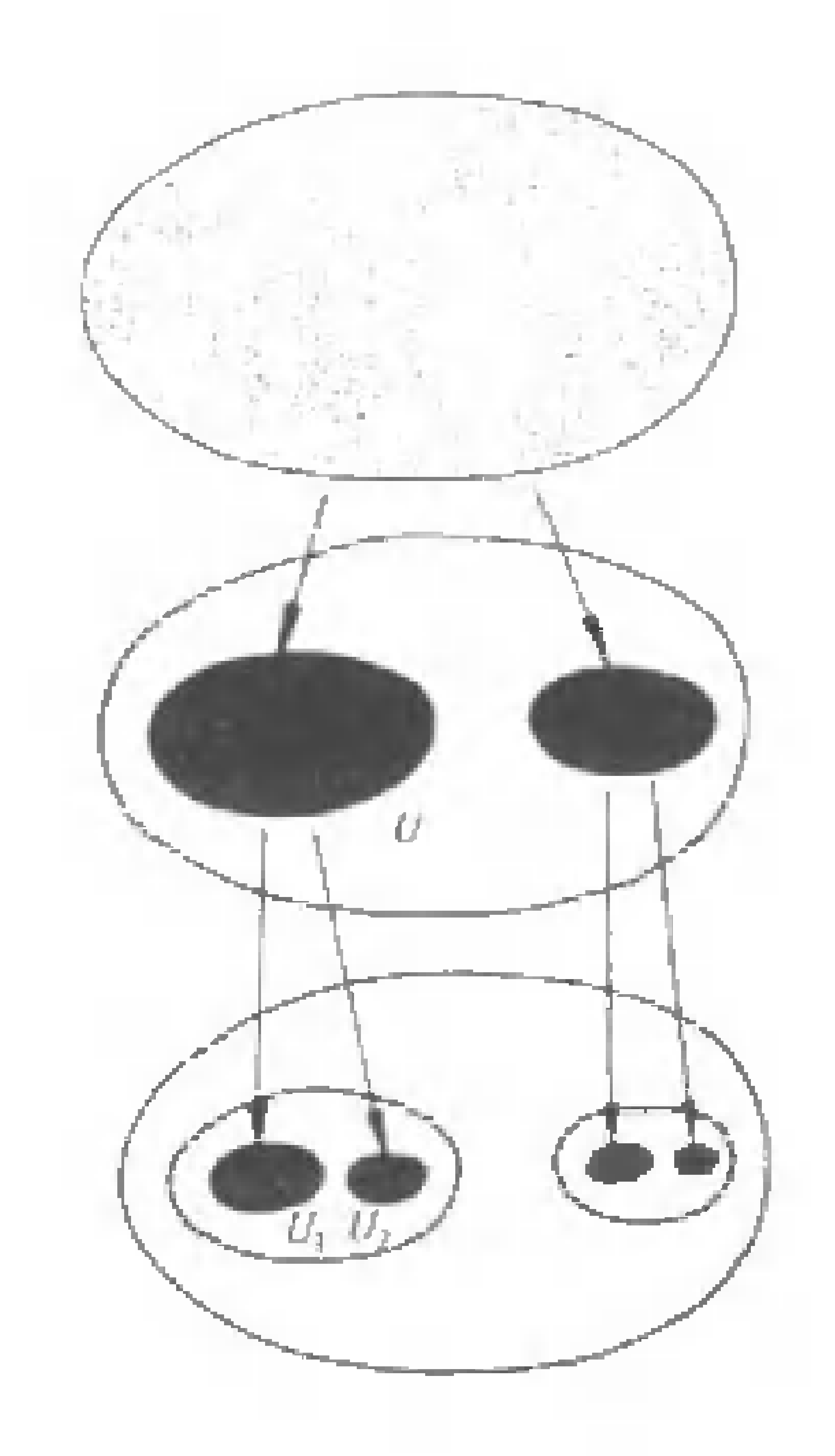


图 3.12

一个半径为 $c_{i_1},\cdots,c_{i_k}a_1$ 的球，且含于一个半径为 $c_{i_1},\cdots,c_{i_k}a_2$ 的球中，因此也就包含在一个半径为 a_2r 的球中(由 3.31)．设 Q_1 表示那些在 Q 中的使 B 与 $V_{i_1,\cdots,i_k}$ 相交的序列$(i_1,\cdots,i_k)$，由定理 3.5，Q_1 中的元素个数不会超过 $q=(1+2a_2)^n a_1^{-n}$，于是

$$\tilde{\mu}(B)=\tilde{\mu}(A\cap B)=\mu\{(i_1,\cdots,i_k)\mid X_{i_1,\cdots,i_k,\cdots}\in A\cap B\}$$

$$\leqslant \mu\{U_{Q_1}I_{i_1,\cdots,i_k}\}$$

这是因为，如果 $X_{i_1,i_2}\in A\cap B\subset\bigcup_Q V_{i_1,\cdots,i_k}$，那么存在整数 k 使得$(i_1,\cdots,i_k)\in Q_1$，利用(3.31)式，

$$\tilde{\mu}(B)\leqslant\sum_{Q_1}\mu(I_{i_1,\cdots,i_k})=\sum_{Q_1}(c_{i_1}\cdots c_{i_k})^s$$

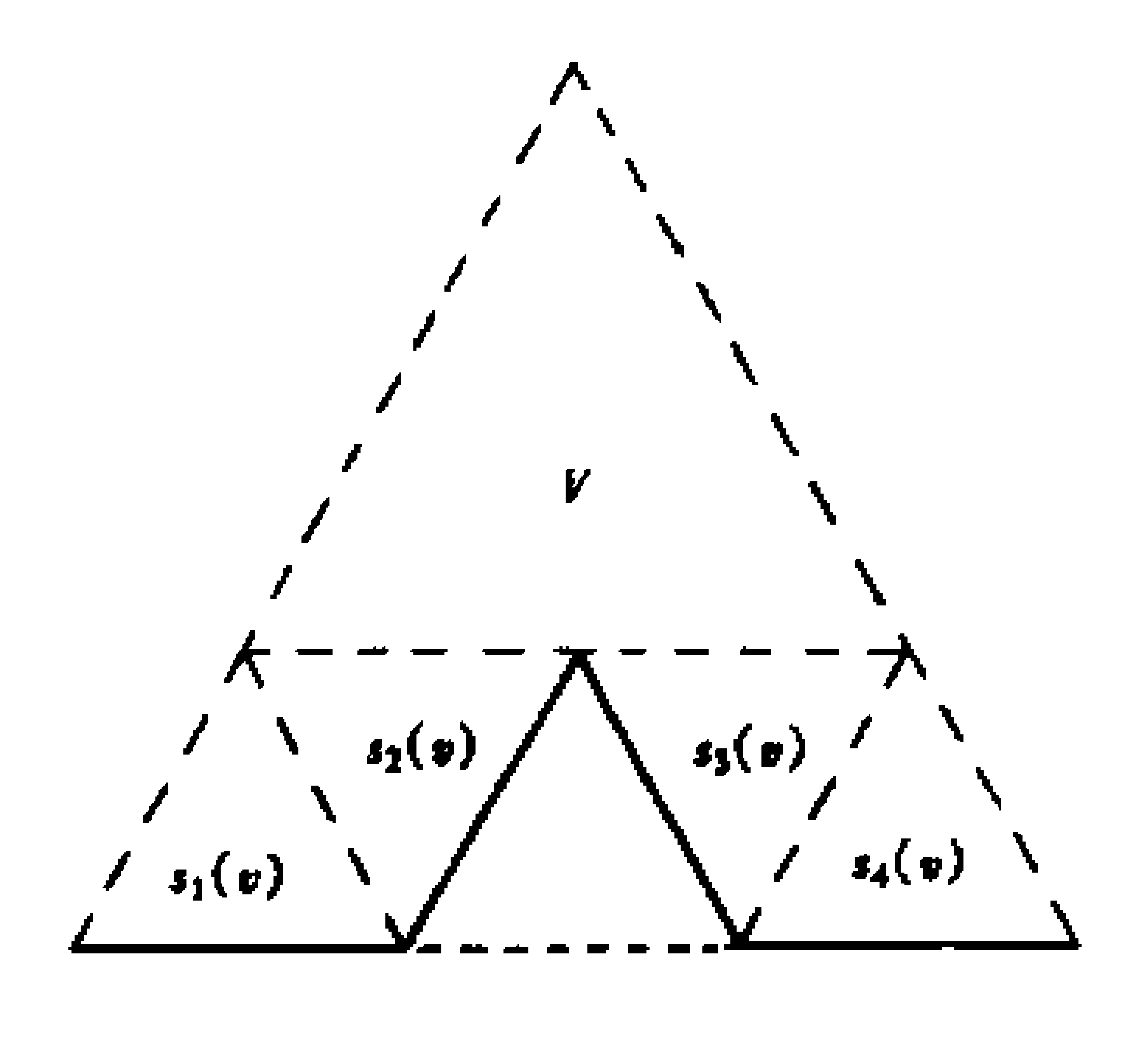


图 3.13

$$\leqslant \sum\nolimits_{Q_1} r^{\alpha} \leqslant qr^{\alpha} \tag{3.32}$$

因为 ∀ 集 U 都含在半径为 $|U|$ 的球中，所以 $\tilde{\mu}(U) \leqslant q|U|^{\alpha}$，从而对 A 的任一 δ 覆盖 $\{U_i\}$，有

$$1 = \tilde{\mu}(A) \leqslant \mu(\bigcup_i U_i) \leqslant \sum_i \mu(U_i) \leqslant q \sum_i |U_i|^{\alpha} \tag{3.33}$$

对 δ 覆盖取下确界得 $H_{\delta}^{\alpha}(A) \geqslant q^{-1}$，从而 $H^{\alpha}(A) \geqslant q^{-1}$. 因此我们证明了对于 $\alpha = d_s(A)$ 有 $0 < H^{\alpha}(A) < \infty$，即 $d_H(A) \leqslant \alpha$.

进一步地，我们证明 $d_B(A) = \alpha$，即只需证 $d_B(A) \leqslant \alpha$.

设 Q 如上所述. 由(3.31)知，若 $(i_1, \cdots, i_k) \notin Q$，则必有对于 $l = 1, \cdots, m, j = j(l)$ 使得 $(i_1, \cdots, i_k, l, i_{k+l}, \cdots, i_{k+j}) \in Q$，即 $r < c_1 \cdots c_k$，则 ∀ $l = 1, \cdots, m$ 有 $j = j(l)$，使得

$$(\min c_i) r \leqslant c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} c_l c_{i_{k+2}} \cdots c_{i_{k+j}} \leqslant r \tag{3.34}$$

从而有 $\sum_Q (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^{s} = 1$. 因此，由(3.31) Q 中元素个数不超过 $(\min c_i)^{-s} r^{-s}$. 对于 Q 的每一序列 (i_1, i_k)，有

$$|\overline{V}_{i_1,\cdots,i_k}| = c_{i_1}\cdots c_{i_k}|\overline{V}| \leqslant r|\overline{V}| \tag{3.35}$$

而 $A \subset \bigcup_Q \overline{V}_{i_1},\cdots,i_k$,所以 A 可以被 $(\min c_i)^{-\alpha} r^{-\alpha}$ 个半径为 $r|\overline{V}|$ 的球所覆盖.对于 $\delta = r|\overline{V}|$,有 $n_\delta(A) \leqslant (\min c_i)^{-\alpha}\delta^{-\alpha}$,所以

$$\bar{d}_B(A) = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\log n_\delta(A)/\log\delta^{-1}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log(\min c_i)^{-\alpha} + \alpha\log r^{-1}}{\log r^{-1} + \log|\overline{V}|^{-1}} = \alpha \tag{3.36}$$

从而

$$\alpha = d_H(A) \leqslant \underline{d}_B(A) \leqslant \bar{d}_B(A) \leqslant \alpha$$

即

$$d_H(A) = d_B(A) = d_s(A) \tag{3.37}$$

从以上证明还可以看到,若开集条件不满足,则有

$$d_H(A) = d_B(A) \leqslant d_s(A) \tag{3.38}$$

若 A 是由图 3.11 所构造的图,则有

$$d_H(A) = d_B(A) \leqslant 2 < d_s(A) = \log 13/\log 3 \tag{3.39}$$

值得注意的是,应用此定理,关键在于验证开集条件,Cantor 三分集的开集条件是显而易见的. 事实上,取 $V = (0,1)$,则 $S_1(V) = (0,1/3)$,$S_2(V) = (2/3,1)$,则有 $S_1(V) \cup S_2(V) \subset V$,所以 Cantor 三分集的 Hausdorff 维数和盒维数都是 log2/log3.

Sierpinski 垫 A 的开集条件也是易见的,取 V 为E_0 的内部(见图 3.4),则 $S_1(V)$,$S_2(V)$,$S_3(V)$ 分别是 E_1 的三个黑三角形的内部,从而有 $d_H(A) = d_B(A) = \log 3/\log 2$.

Koch 曲线的开集条件则并不是直接可以看到的,取 V 为以 E_0 为底边的等边三角形的内部(见图 3.5),则 $S_1(V)$,$S_2(V)$,$S_3(V)$ 和 $S_4(V)$ 分别是以 E_1 的四条直线段为底边的等边三角

形的内部，从而有 $S_1(V)\cup S_2(V)\cup S_3(V)\cup S_4(V)\subset V$，且 $S_i(V)$ 互不相交，从而 Koch 曲线的 Hausdorff 维数和盒维数都是 $\log 4/\log 3$.

§3.3　分形维数的计算

奇怪吸引子的结构具有分形特征，因此常用分维值来定量表示，分维值指出了动力系统的有效自由度，从而揭示了奇怪吸引子的复杂程度.

分维的定义有很多种，而且不同的定义其最终的值也稍有差别. 目前用得较多的分维概念主要有 Hausdorff 维数 D_H，计盒维数 D_0，信息维数 D_1，关联维数 D_2，广义维数 D_q 等，以上各种维数定义中，D_2 有着较为有效的数值计算方法.

相对于计盒维数的算法，关联维数 D_2 的算法具有以下几方面的优点：

① 关联维数算法只需通过对相点的距离进行统计就可计算分维，易于实现.

② 关联的动力范围为 $O(N^2)$，而计盒维数的动力范围为 $O(N)$，按照对数意义，关联积分的动力范围是计盒维数算法的两倍.

③ 计盒维数算法需要采用大小不同的格栅覆盖相点演化序列，对有相点的格子进行计数，这需要在计算机图形公式下进行，有时还要进行人工处理，因而，常借助于大型计算机，Grassberger 和 Procaccia 提出的关联维数算法一般可在高档微机上进行.

④ 在高维相空间中，计盒维数算法受到实用上的限制. 鉴于上述原因，在计算分维时，目前广泛采用 *G-P* 算法而不采用计盒维数及其他维数.

§3.3.1　关联维数的统计估计

Hausdorff 维数给出了一个直观生动的维数定义，但计算

Hausdorff 维数却是十分不方便的.

维数在几何直观上可以表示为 $V \sim r^D$,其中 V 是某种测度,r 表示测量的尺度,这样,在直观上定义

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\ln V}{\ln r} \tag{3.40}$$

(3.40) 式定义了集合的局部维数,整个集合的维数应是各局部维数的某种平均,对于相空间中的混沌吸引子 A,若 $\beta \subseteq A$,定义 β 的测度为

$$\mu(\beta) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T I_\beta[\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x}_0)] \mathrm{d}t \tag{3.41}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_t$ 为动力学系统,$\boldsymbol{x}_0$ 为初始状态

$$I_\beta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \beta \\ 0 & \boldsymbol{x} \overline{\in} \beta \end{cases} \tag{3.42}$$

β 的尺度定义为其直径

$$\delta(\beta) = \sup\{ \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \beta \} \tag{3.43}$$

其中 sup 为集合的上确界,$\| \cdot \|$ 为相空间的范数.

可定义范数为

$$\| \boldsymbol{x} \|_s = \left(\sum_{i=1}^{m} | x_i |^s \right)^{\frac{1}{s}} \tag{3.44}$$

s 范数为 Eudidean 范数,∞ 范数为最大值范数.记 $\beta_x(r)$ 为中心在相点 $\boldsymbol{x}$,半径为 r 闭球,$B_x(r) = \mu(B_x(r))$,则在相点 $\boldsymbol{x}$ 外的逐点维数定义为

$$D_P(\boldsymbol{x}) = \lim_{r \to 0} \frac{\ln \overline{B}_x(r)}{\ln r} \tag{3.45}$$

逐点维数是一个局部概念,整个集合的维数需对其求平均:

$$D_P = \int_A D_P(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{3.46}$$

Grassberger 和 Procaccia 提出了对逐点维数进行算术平均，从而推出了关联维数算法.

设 $\{x_i, i = 1,2,\cdots,N\}$ 为实验测得的相空间中 N 个相点值，令

$$C(r) = < \overline{B}_x(r) > = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \overline{B}_{x_j}(r) \tag{3.47}$$

定义关联维数为

$$D_2 = \lim_{r\to 0}\frac{\ln C(r)}{\ln r} \tag{3.48}$$

(3.47) 中

$$\overline{B}_{x_j}(r) \approx \frac{\#\{x_i : i \neq j \text{ 且 } |x_i - x_j| \leqslant r\}}{N-1} \tag{3.49}$$

其中 # 表示满足条件的相点数目.

由于动力系统实测数据之间不可避免地存在着自相关性，为了减少或基本消除由于这种自相关性所造成的影响，记

$$C(r,N,W) \triangleq \frac{2}{(N-W+1)(N-W)}\sum_{n=W}^{N}\sum_{i=1}^{N-n} H[r - |x_{i+n} - x_i|] \tag{3.50}$$

其中 N 为样本量，W 为与系统背景有关的参数，H 为 Heaviside 阶跃函数.

(3.50) 式中，当 $N \to \infty$ 时

$$\lim_{N\to+\infty} C(r,N,W) = F(r) \tag{3.51}$$

$F(r)$ 的数学意义十分明显，它表示数据集中的点 x_i 和 x_j 距离的分布函数：

$$F(r) = P\{|x_i - x_j| < r\}$$

而

$$d_2 = \lim_{r \to 0} \frac{\ln F(r)}{\ln r} \tag{3.52}$$

考虑到(3.52) 中的极限形式,$F(r)$ 可写为

$$F(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{d_2}, \quad 0 < r \leqslant r_0 \tag{3.53}$$

现从样本中取 M 个独立的子样,它们分别在半径为 $r_1, r_2, \cdots, r_M$ 的球内.为了估计动力系统实测数据的维数 d_2,采用极大似然函数的估计方法,由(3.53) 式,其概率密度为

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{d_2 x^{d_2 - 1}}{r_0^{\,d_2}} \qquad 0 < x \leqslant r_0 \tag{3.54}$$

取似然函数

$$L = \prod_{i=1}^{M} f(r_i) \tag{3.55}$$

则

$$\frac{\partial \ln L}{\partial d_2} = -M \ln r_0 + \frac{M}{d_2} + \sum_{i=1}^{M} \ln r_i \tag{3.56}$$

由(3.56) 式可得 d_2 的极大似然估计为

$$\hat{d}_2 = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \ln\left(\frac{r_0}{r_j}\right)\right]^{-1} \qquad 0 < r_j \leqslant r_0 \tag{3.57}$$

同时可求得估计值 d_2 的方差为

$$\mathrm{Var}(\hat{d}_2) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X, d_2)}{\partial d_2^2}\right] = \frac{d_2^2}{M} \tag{3.58}$$

由(3.58) 式可知,$\mathrm{Var}(\hat{d}_2)$ 与所取的样本的个数成反比,实际问题适当取样本大一些可减少 $\mathrm{Var}(\hat{d}_2)$,以便使 $\hat{d}_2$ 的估计值更准确.

由于实际问题中 N 的取值不可能无穷大而要受到实际问题的限制,取 $r_{ij} = | x_i - x_j |$,则(3.57) 中 d_2 的极大似然估计值为

$$\tilde{d}_2 = \left[\frac{1}{M}\sum_{i>j}^{N} W_{ij}\ln(\frac{r_0}{r_{ij}})\right]^{-1} \tag{3.59}$$

其中 $W_{ij} = H(r_0 - r_{ij})$ 和 $L = \sum_{i>j}^{N} W_{ij}$.

§3.3.2 关联维数算法的误差分析

假设 $V_n(R)$ 表示球心在原点半径为 R 的 n 维球的体积，即

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{3.60}$$

令 $V_D(i,r)$ 表示中心在 i 点，半径为 r 的 D 维球体的体积
则

$$V_D(i,r) = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)}r^D \quad (D\text{ 为大于零的正数}) \tag{3.61}$$

(3.50) 中 $C(r,N,W)$ 可写为

$$\begin{aligned} C(r,N,W) &= \frac{2}{(N-W+1)(N-W)}\sum_{i\neq j}H[r - |x_i - x_j|] \\ &= \frac{\text{相点间距离小于 } r \text{ 的相点对数目}}{\text{所有相点对数目}} \end{aligned} \tag{3.62}$$

开始时 r 取值很小，包含于半径为 r 中的点集对的个数近乎为 0，$C(r,N,W)$ 近似于零，随着 r 的增大，$C(r,N,W)$ 也在增加，但如果点集具有确定性的行为，$C(r,N,W)$ 的增长与 r 的增长保持某种对应关系，即点集的维数基本上恒定的. 如果 r 的值超过点集的半径，则 $C(r,N,W)$ 的值便不再增加，即趋于饱和.

我们不妨假定有 N 个点均匀分布在一个 D 维的半径为 R 的超球体中，则此超球体的体积满足(3.61) 式，根据我们的假设，可定义每个点所占据的超几何体体积为

$$V_0 = \frac{V_D(R)}{N} \tag{3.63}$$

如图 3.14,则区间 dx 内点的数目为

$$d_N' = \frac{V_D(x+\mathrm{d}x) - V_D(x)}{V_D(R)} \cdot N$$

$$= \frac{NX^D}{R^D} \cdot \frac{D\mathrm{d}x}{x} \tag{3.64}$$

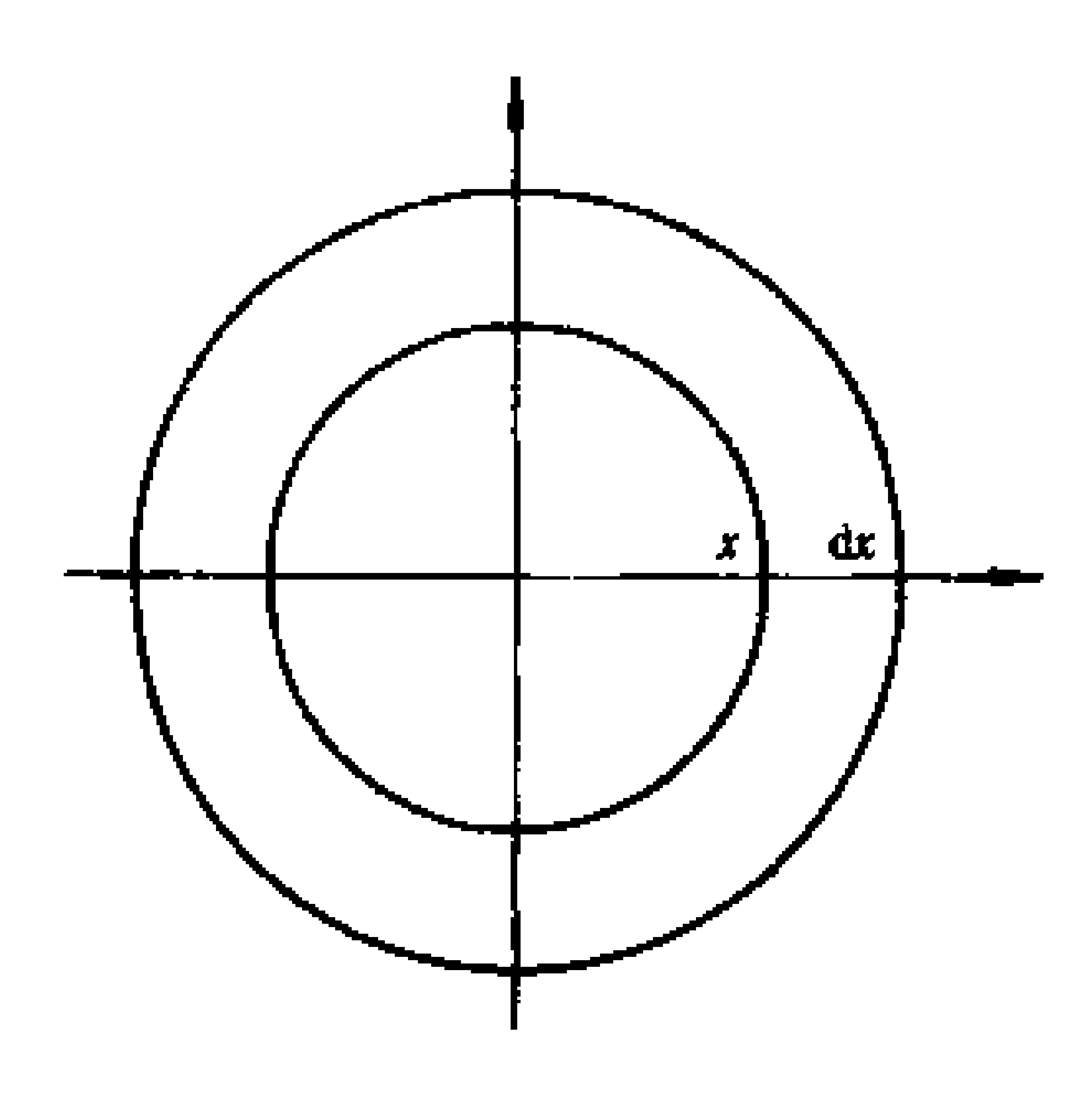


图 3.14

则点集落入圆心为第 i 点,半径为 r 的 D 维超体积 $V_D(i,r)$ 内的概率为 $u = \dfrac{V_D(i,r)}{V_D(R)}$,则 N 个点中有 n 个落入这样的 D 维超球体内的概率为 $P(n) = C_N^n u^n (1-u)^{N-n}$,根据泊松定理 $N \to +\infty$, $u \to 0$ 时,$Nu = \lambda$,故

$$P(n) \approx \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \qquad \lambda = \frac{NV_D(i,r)}{V_D(R)} \tag{3.65}$$

λ 为落入球 $V_D(i,r)$ 内的点集的个数的数学期望,则

$$C(r,N,W) = \sum_{i=1}^{N} \frac{NV_D(i,r)}{V_D(R)} \tag{3.66}$$

假设 N 个点中有 $M(r)$ 个点落入与球心 i 距离不超过 $R-r$ 的区域内，于是有 $N-M(r)$ 个点落入这一区域外(但在 $V_D(R)$ 内).

$$M(r)=\frac{N}{V_D(R)}\cdot V_D(R-r)\approx N(1-\frac{Dr}{R})$$

$$N-M(r)=\frac{NDr}{R}$$

则

$$C(r,N,W)=\sum_{i=1}^{M(r)}\frac{NV_D(i,r)}{V_D(R)}+\sum_{i=M(r)+1}^{N}\frac{NV(i,r)}{V_D(R)}$$

$$=\frac{M(r)Nr^D}{R^D}+\sum_{i=M(r)+1}^{N}\frac{NV(i,r)}{(2R)^D} \tag{3.67}$$

下面计算(3.67)中第二项. 如图 3.15, L 是超球体圆心到边界的距离，则 $0\leqslant L\leqslant r$，落入 L 到 $L+\mathrm{d}L$ 内的点集的个数为

$$\mathrm{d}_N(L)=\frac{N}{V_D(R)}\cdot[V_D(R-L)-V_D(R-L-\mathrm{d}L)]$$

$$=\frac{N_D\mathrm{d}L}{R} \tag{3.68}$$

利用切片技术，超 D 维球缺的体积为

$$V_D(L)=K_{D-1}\int_{-r}^{L}(r^2-x^2)^{\frac{D-1}{2}}\mathrm{d}x \tag{3.69}$$

式中 K_{D-1} 为 $D-1$ 维，半径为 1 的球的体积

$$\frac{\sum_{i=M(r)+1}^{N}NV(i,r)}{V_D(R)}=\frac{N^2D}{R\cdot V_D(R)}\int_0^r\mathrm{d}LK_{D-1}\int_{-r}^{L}(r^2-x^2)^{\frac{D-1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{N^2D}{R\cdot V_D(R)}\Big[\int_{-r}^{0}\mathrm{d}x\int_0^rK_{D-1}(r^2-x^2)^{\frac{D-1}{2}}\mathrm{d}L$$

$$+\int_0^r\mathrm{d}x\int_x^rK_{D-1}(r^2-x^2)^{\frac{D-1}{2}}\mathrm{d}L\Big]$$

$$= \frac{N^2 D}{R \cdot V_D(R)} \cdot r^{D+1} \cdot K_{D-1}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^D\theta \mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^D\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta\right]$$

$$= \frac{N^2 D}{R \cdot V_D(R)} \cdot r^{D+1} \cdot K_{D-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{D+1}{2})}{\Gamma(\frac{D+2}{2})} - \frac{1}{D+1}\right]$$

$$= \frac{N^2 D \cdot r^{D+1}}{R^{D+1}}\left[1 - \frac{1}{(D+1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{D+2}{2})}{\Gamma(\frac{D+1}{2})}\right] \tag{3.70}$$

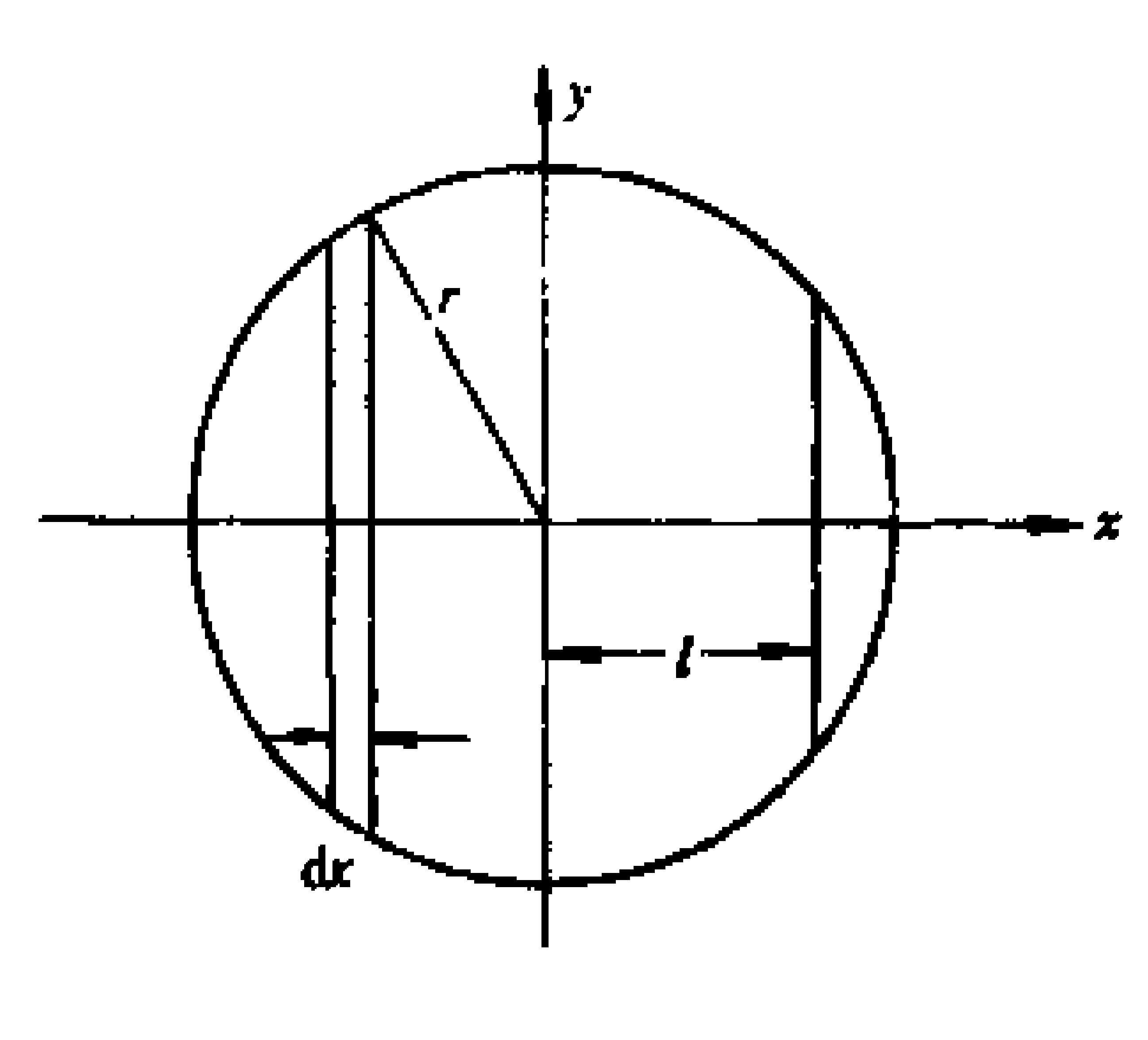


图 3.15

将(3.70)代入(3.67)式可得

$$C(r,N,W) = \frac{N^2 r^D}{R^D} - \frac{DN^2 r^{D+1}}{R^{D+1}} \frac{1}{(D+1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{D+2}{2})}{\Gamma(\frac{D+1}{2})} \tag{3.71}$$

采用点集的关联维数 V 的概念：

$$V = \frac{\ln C(kr) - \ln C(r)}{\ln(kr) - \ln r} = \frac{\ln C(kr) - \ln C(r)}{\ln k} \tag{3.72}$$

在(3.67)中取 $M(r) = N$，则有

$$C(r,N,W)=\frac{N^2 r^D}{R^D} \tag{3.73}$$

将(3.73)式代入(3.72)式便有 $V=D$,这说明了对(3.71)式估计的准确性,亦说明(3.72)式中 V 的误差是由(3.71)式中第二项所引起,取

$$\Delta C(r)=-\frac{DN^2 r^{D+1}}{R^{D+1}}\frac{1}{(D+1)\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{D+2}{2})}{\Gamma(\frac{D+1}{2})} \tag{3.74}$$

由于 $\Delta C(r)$ 较 $\frac{N^2 r^D}{R^D}$ 小得多,为简便计算,取

$$C(r,N,W)=\frac{N^2 r^D}{R^D} \tag{3.75}$$

则由 $\Delta C(r)$ 引起的 V 的误差 ΔV 便为

$$\begin{aligned}\Delta V&=\frac{1}{\ln(k)}\left[\frac{\Delta C(kr)}{C(kr)}-\frac{\Delta C(r)}{C(r)}\right]\\&=\frac{1-k}{\ln k}\frac{D}{D+1}\frac{r}{R}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}\end{aligned} \tag{3.76}$$

§3.3.3 嵌入维数与分维数关系分析研究

利用式(3.52)可以推得

$$D_2(m)=\lim_{r\to 0}\frac{\log_2 C_m(r)}{\log_2 r}=\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{d}\log_2 C_m(r)}{\mathrm{d}\log_2 r} \tag{3.77}$$

m 为嵌入维数

$$C_m(r)=\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M(M-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{M}H[r-|\boldsymbol{Y}_j(m)-\boldsymbol{Y}_i(m)|] \tag{3.78}$$

这里 $Y_i(m)=(x_i,x_{i+\tau},x_{i+2\tau},\cdots,x_{i+(m-1)\tau})$，$H$ 为 Heaviside 函数，r 是 D 维球的半径. 可采用(3.79)式作为计算分维数 D_2 的近似估计公式：

$$D_2(m)=\frac{l\sum_{i=1}^{l}\log_2(r_i)\log_2 C_m(r_i)-\sum_{i=1}^{l}\log_2 C_m(r_i)}{l\sum_{i=1}^{l}\log_2^2(r_i)-\left(\sum_{i=1}^{l}\log_2(r_i)\right)^2} \tag{3.79}$$

根据嵌入定理，令向量 $Y_{i+\tau}(m)$ 满足(3.80)式

$$Y_{i+\tau}(m)=(y_{i,1},y_{i,2},y_{i,3},\cdots,y_{i,m})=g(y_i(m)) \tag{3.80}$$

即

$$\begin{cases} y_{i+\tau,1}=y_{i,2} \\ y_{i+\tau,2}=y_{i,3} \\ \cdots\cdots \\ y_{i+\tau,q}=y_{i,q+1}=\Phi(y_{i,1},y_{i,2},\cdots,y_{i,q}) \\ \cdots\cdots \\ y_{i+\tau,m-1}=y_{i,m}=\Phi(y_{i,m-q},y_{i,m-q+1},\cdots,y_{i,m-1}) \\ y_{i+\tau,m}=\Phi(y_{i,1},y_{i,2},\cdots,y_{i,m}) \end{cases} \tag{3.81}$$

定义

$$S_{i,k}(r)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}H[r-|Y_i(k)-Y_j(k)|]$$

k 为嵌入维数，且满足($q\leqslant k\leqslant m$).

可以证明，在计算关联维数时，不管采用 $\|\cdot\|_2$ 还是 $\|\cdot\|_\infty$ 或采用两者之间的所有范数，结果都是相同的. 所以，可定义两向

量 $Y_i(k)$ 及 $Y_j(k)$ 之间的距离为 ∞ 范数：

$$|Y_i(k) - Y_j(k)| = \max_{\alpha} |y_{i,\alpha} - y_{j,\alpha}| \tag{3.82}$$

其中 $1 \leqslant \alpha \leqslant k$，这样，我们有

$$\max_{j} \max_{\alpha} |y_{i,\alpha} - y_{j,\alpha}| \sim r \tag{3.83}$$

由于 r 很小，我们可以将 $y_{j,k+1}$ 在 $y_{i,k+1}$ 附近展成 Taylor 级数，现展到第二项：

$$\begin{aligned}
y_{j,k+1} &= \Phi(y_{j,k-q+1}, y_{j,k-q+2}, \cdots, y_{j,k}) \\
&= \Phi(y_{j,k-q+1}, y_{j,k-q+2}, \cdots, y_{j,k}) \\
&\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k-q+1}}(y_{j,k-q+1} - y_{j,k-q+1}) \\
&\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k-q+2}}(y_{j,k-q+2} - y_{j,k-q+2}) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k}}(y_{j,k} - y_{i,k})
\end{aligned} \tag{3.84}$$

这样，我们便得到

$$\begin{aligned}
&\left|(y_{j,k+1} - y_{i,k+1})\right| \\
\approx &\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k-q+1}}(y_{j,k-q+1} - y_{i,k-q+1}) + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k-q+2}}(y_{i,k-q+2} - y_{i,k-q+2}) \right. \\
&\left. + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k}}(y_{i,k} - y_{i,k})\right| \\
\leqslant &\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k-q+1}}(y_{i,k-q+1} - y_{i,k-q+1})\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k-q+2}}(y_{i,k-q+2} - y_{i,k-q+2})\right| \\
&+ \cdots + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y_{i,k}}(y_{j,k} - y_{j,k})\right|
\end{aligned} \tag{3.85}$$

由于

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y_{i,k-q+1}}\right|,\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y_{i,k-q+2}}\right|,\cdots,\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y_{i,k}}\right| \tag{3.86}$$

依赖于 $Y_i(k)$，且对所有的 $Y_i(k)$ 其均连续，所以(3.86) 式为定值，应用(3.83) 式，我们得到

$$\max_j \mid y_{i,k+1} - y_{i,k+1} \mid \sim r \tag{3.87}$$

对于一定的嵌入维数 k，和固定的滞迟时间 τ，则向量 $Y_j(k)$ 的个数 $M - N - (k - 1)\tau = N$，这样便有

$$S_{i,k}(r) \sim S_{i,k+1}(r) \propto r^{d_2} \tag{3.88}$$

换句话说，在球 $V_D(Y_i(m), r)$ 内 $Y_i(k+1)$ 和 $Y_i(k)$ 的个数相同，这样便有

$$C_k(r) \sim C_{k+1}(r) \propto r^{d_2} \tag{3.89}$$

应用相同的办法，

$$C_q(r) \sim C_{q+1}(r) \cdots \sim C_m(r) \propto r^{d_2} \tag{3.90}$$

这样，相关维数即可被估计为

$$D_2(q) \approx D_2(q+1) \approx \cdots \approx D_2(m) \approx d_2 \tag{3.91}$$

即计算 D_2 时，如果已略去噪声的影响，我们只要取略大于原动力系统维数估计值的整数作为嵌入维数，在理论上对 D_2 的计算都不会产生影响.

§3.4 分形与混沌

分形、混沌有着各自发展的历史，但由前面可见，分形也可视为产生于一个迭代系统的动力行为，这表明了它与混沌之间存在着根本的联系，它们有着一个共同祖先，即 Poincaré 的动力系统. 混沌主要关心的是非线性动力过程中所呈现出的各种复杂性质；而我们说分形是一门几何学，它更注重的是对某一动力行为产生

的吸引子的考察.

§3.4.1　自相似集

自相似集是目前研究得比较清楚的一类分形集. 自相似集直观上最本质的特征是它的局部与整体相似. 也就是说，将该集的任何一个充分小的局部放大适当倍数，它的形状就和整体一致. 例如我们在前几节已经介绍了的 Cantor 三分集、Koch 曲线、Sierpinski 垫和地毯等，它们都是自相似的.

1981 年，Hutchinson 给出了自相似集的严格数学描述：一个变换 $\psi: R^n \to R^n$ 称为压缩变换. 如果 $\forall x, y \in R^n$ 和实数 $0 < c < 1$,

$$d(\psi(x), \psi(y)) \leqslant cd(x, y) \tag{3.92}$$

使上式对所有 x, y 成立的 c 值的下确界称为压缩比，等号成立时的压缩变换将 R^n 的每一个子集变换成与自身相似的集，叫做相似变换，压缩比 c 就是相似的标度因子.

我们知道，平面上所有相似变换的集合在变换的复合(乘积)运算之下构成一个四维的变换群，称为相似变换群，正交变换群是它的一个特例.

根据 Klein 的观点，自相似分形几何的实质是研究分形集在相似变换群作用下的不变性质和不变量. 事实上，自相似集本身就是相似变换之下的不变集.

集合 $E \subset R^n$ 称为压缩变换 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$ 下的不变集，如果

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} \psi_j(E) \tag{3.93}$$

集合 E 称为自相似的，如果压缩变换 $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ 是相似变换，使 (3.93) 成立且存在 s 使 $H^s(E) > 0$，对 $i \neq j$,

$$H^s(\psi_i(E) \cap \psi_j(E)) = 0.$$

定理 3.6　已给 R^n 上的压缩映射族 $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$，压缩比 $0 < c_j <$

1，即

$$d(\psi_j(x),\psi_j(y))\leqslant c_jd(x,y)$$

$\forall x,y\in R^n$，$0<c_j<1$，$j=1,2,\cdots,n$，则存在惟一非空紧集 E，使得 $E=\psi(E)=\bigcup_{j=1}^{m}\psi_j(E)$，并且，若 F 是 R^n 的任意紧集，则在 Hausdorff 距离的拓扑意义下 $\psi^k(F)\to E\quad k\to\infty$.

本定理说明了自相似集是一簇相似变换下的不变集，对有限序列$\{1,2,\cdots,m\}$的所有排列$\{j_1,i_2,\cdots,j_k\}$，$1\leqslant j_i\leqslant m$，可以证明 E 是映射 $\psi_{j_1}\circ\psi_{j_2}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$ 的不动点的闭包.

下述定理用以估计不变集的 Hausdorff 维数.

定理 3.7 若$\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$是 $R^n\to R^n$ 的一族压缩映射，如果

$$q_id(x,y)\leqslant d(\psi_i(x),\psi_j(y))\leqslant r_id(x,y)$$

$$(i=1,2,\cdots,m,0<q_i,r_i<1)\tag{3.94}$$

$x,y\in\overline{V}$，V 是 E 的某一开集，满足当 $i\neq j$ 时

$$\psi_i(V)\cap\psi_j(V)=\varnothing,\quad i,j=1,2,\cdots,m\tag{3.95}$$

则 $D_H(E)\in[s,t]$，而 s,t 是方程

$$\sum_{i=1}^{m}q_i^s=1=\sum_{i=1}^{m}r_i^t\tag{3.96}$$

的解.若对某些 $i\neq j$，$\psi_i(V)\cap\psi_j(V)\neq\varnothing$，则 $D_H(E)\leqslant t$ 成立.

定理的一个特殊情况是$\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$为一列相似变换，这时 $0<q_i=r_i<1$.自相似集的严格定义就是 E 对某一列压缩相似变换$\{\psi_i\}_{i=1}^{m}$满足

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}\psi_i(E),\quad \psi_i(E)\cap\psi_j(E)\neq\varnothing,$$

$$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m\tag{3.97}$$

用递归方法生成的自相似分形集，当生成元的每个直线段等

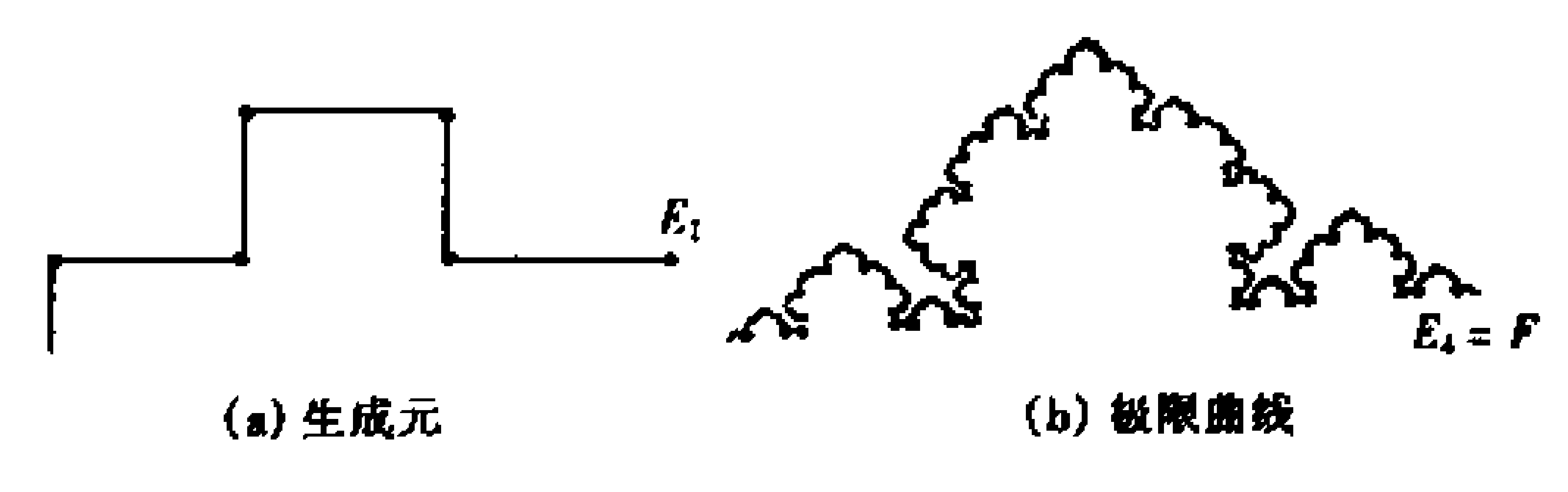
长时，则相似比 $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = r$，这时分形集的 Hausdorff 维数 s 为

$$s = \log m / \log \frac{1}{r}$$

由此可以知道，三分 Cantor 集的 Hausdorff 维数 $D_H = \log 2/\log 3$. 对 Sierpinski 垫 F，$D_H = \log 3/\log 2$，即是方程 $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$ 的解，因为 F 是三个压缩比为 1/2 的相似映射下的不变集，这些映射把三角形 E_0 变成 E_1 中的三个三角形. Koch 曲线 $D_H = \log 4/\log 3$.

例 4 修改的 Koch 曲线. 固定 $0 < a \leqslant 1/3$，去掉单位区间 I_0 正中与全长比例为 a 的一段区间，并用与之组成等边三角形的另外两边代替，把这样的过程反复地进行下去而构造出曲线 F，称作修改的 Koch 曲线，它将 I_0 映射到 I_1 中的 4 个相似映射下的不变集. 对照定理 3.7，这里取 V 为底边是 1，高是 $\sqrt{3}/2$ 的等腰三角形，其 $D_H(F) = D_B(F)$ 是方程 $2a^s + 2\left(\frac{1}{2}(1-a)\right)^s = 1$ 的解.

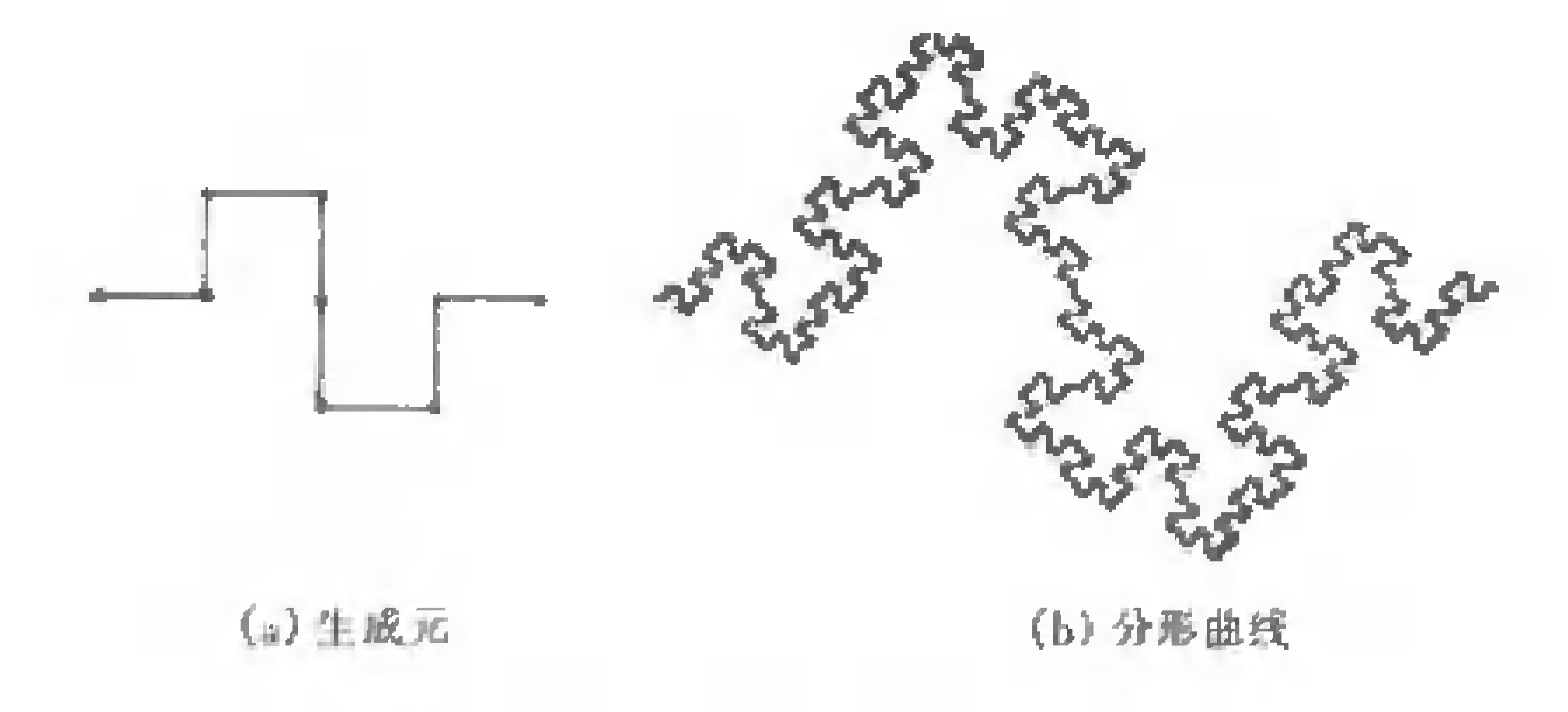
像上述这样的曲线的构成过程可以统一理解为由一个生成元（直线段图形）或与之相似的直线段图形作为生成元并不断地通过相似映射迭代而成（如图 3.16 ~ 图 3.18）.



(a) 生成元　　(b) 极限曲线

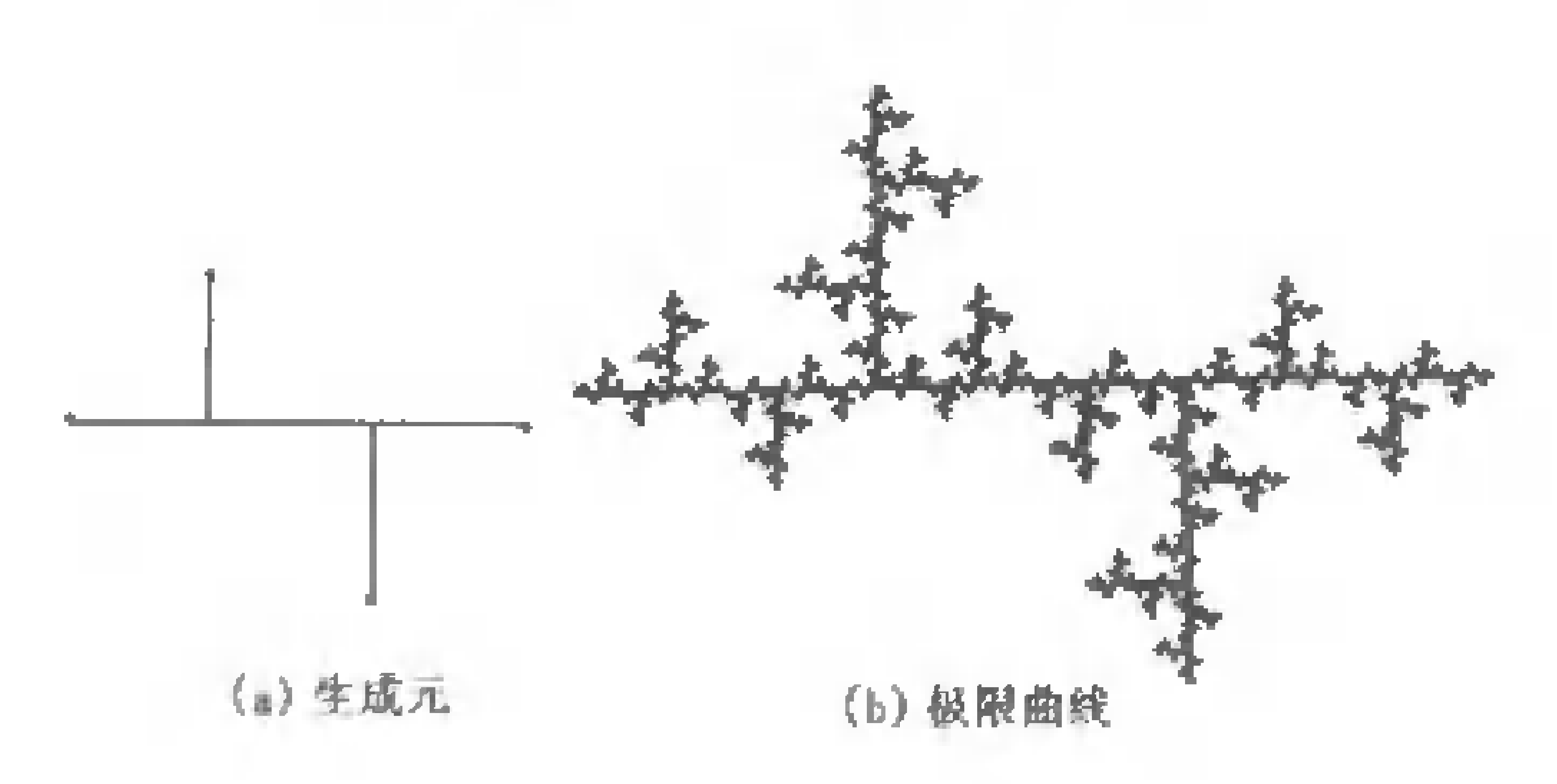
图 3.16　D_H 是 $3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$ 的解，$s = 1.34$

若集 E 的自相似性质只在统计意义上成立，则说 E 是统计自相似的，把小部分放大以后，它与整体有相同的统计分布，自然界中的分形，大都是统计自相似的.



(a) 生成元　　(b) 分形曲线

图 3.17　$D_H = D_B = \log 8/\log 4 = 1.5$



(a) 生成元　　(b) 极限曲线

图 3.18　树枝状分形

$D_H = D_B = \log 5/\log 3 = 1.465$

另外还有一类广泛的分形，只具有拟自相似性，它们是自相似的推广，如有面积的 Cantor 集和 Cantor 曲线. 复解析映照的 Julia 集也表现出拟自相似性.

§3.4.2　自仿射集

我们已经看到，自相似集沿各个方向的伸缩率都相等. 在前节定义的压缩比为 r 的相似变换将一点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ 变换成点 $r\boldsymbol{x} = (rx_1, \cdots, rx_n)$. 若所定义的变换沿各个方向的伸缩率不全相同，设 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$，则我们得到自仿射集是将点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变换成点 $(r_1x_1, r_2x_2, \cdots, r_nx_n)$. 更一般地，

一个映射 $S: R^n \to R^n$,称为仿射变换,若

$$S(x) = Tx + b \quad x \in R^n \tag{3.98}$$

这里 T 是 R^n 上的线性交换,T 可以表成一个 $n \times n$ 阶矩阵,且 $\det(T) \neq 0$,而 b 是 R^n 中的一个向量.

R^n 的一个子集 F 称为自仿射集,如果 F 是一族仿射压缩变换 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的惟一不变紧集.

仿射变换是平移、旋转、伸缩可能还有反射的合成.欧氏平面内全体仿射变换的集合构成一个六维的变换群.称作仿射变换群.按照 Klein 的观点,自仿射分形几何的实质,即研究分形集在仿射变换群作用下的不变性质与不变量,自仿射集正是仿射压缩变换下的不变集.

由于相似变换群是仿射变换群的子群,因此,自相似集是自仿射集的特例,自仿射集是自相似集的推广.这样,我们很自然地也想将自相似集的维数公式(3.98)推广到自仿射集,希望维数公式依赖于仿射变换,并由仿射变换的矩阵和向量表达出来,但是实际情形却复杂得多.我们通过下述的两个例子来说明.

例 5 设 S_1, S_2 是 R^n 上的仿射压缩映射,它们分别把正方形映射到如图 3.19 所示的边长为 $\frac{1}{2}$ 和 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 的两个矩形 R_1, R_2 上,矩形 R_1 与 y 轴的距离为 λ,若 F 是 S_1 和 S_2 的不变集,则当 $\lambda > 0$ 时,$D_H(F) \geqslant 1$;但当 $\lambda = 0$ 时,$D_H(F) = \log 2/[-(\log\varepsilon)] < 1$.

设 $\lambda > 0$(图 3.19(a)),则第 k 步的构造 $E_k = \bigcup S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(E)$ 包含有边长为 2^{-k} 和 ε^k 的 2^k 个矩形,并且 E_k 在 x 轴上的投影包含区间 $[0, 2\lambda]$.因为 $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$,所以 F 的投影也包含区间 $[0, 2\lambda]$.另外用映射的迭代也能说明这一点.若 $\tilde{S}_1(x) = \frac{1}{2}x$, $\tilde{S}_2(x) = \frac{1}{2}x + \lambda$ 是两个 $R \to R$ 的映射,则 F 的投影必是 $\tilde{S}_1$ 和 $\tilde{S}_2$

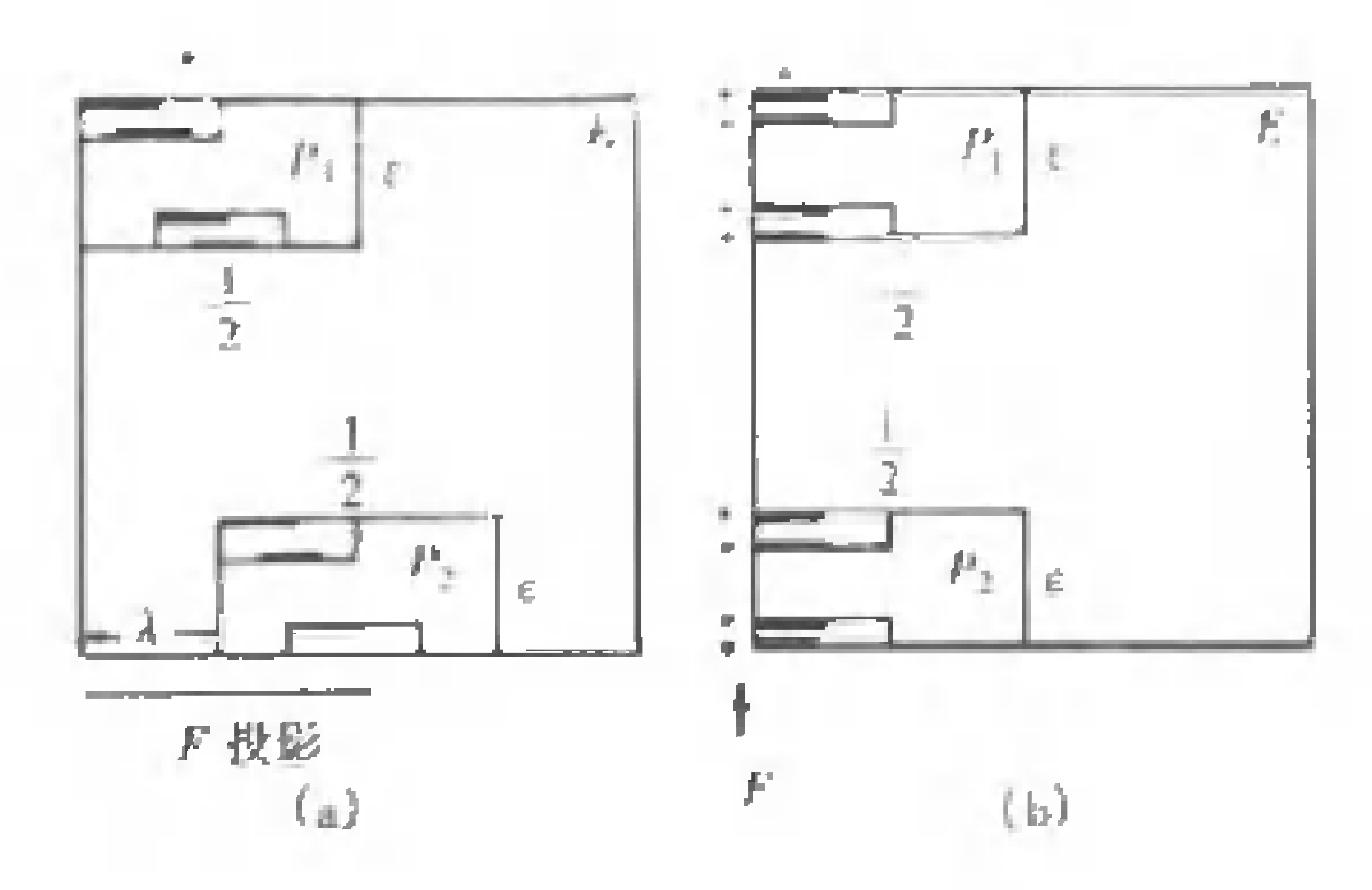


图 3.19　自仿射集维数的不连续性

下的不变集，而$\bar{S}_1$ 和$\bar{S}_2$ 的惟一不变集为$[0,2\lambda]$.

若 $\lambda = 0$(图 3.19(b))，情况就变了. E_k 由 2^K 个左端紧靠 y 轴、边长为 2^{-K} 和 ϵ^K 的矩形组成，E_k 包含在窄条$\{(x,y)\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2^{-k}\}$ 之内. 令 $k \to \infty$，则可见 F 是包含在 y 轴上的均匀 Cantor 集. 它可以看成从每个区间的正中反复去掉一长度比为 $1-2\epsilon$ 的线段而得到的，于是 $D_H(F) = \log 2/[-(\log\epsilon)] < 1$.

例 6　把单位正方形 E_0 分割成按 $p \times q$ 排列的边长各为 $1/p$ 和 $1/q$ 的矩形，其中 p 和 q 都是正整数且 $p < q$. 从这些矩形中选取一个子集类组成 E_1，并且用 N_j 表示第 j 个柱集中选出的矩形数，$1 \leqslant j \leqslant p$. 如图 3.20 按通常的方法重复这个过程，即把 E_1 中的每个矩形用E_1的一个仿射拷贝代替. 设F是这一过程的极限

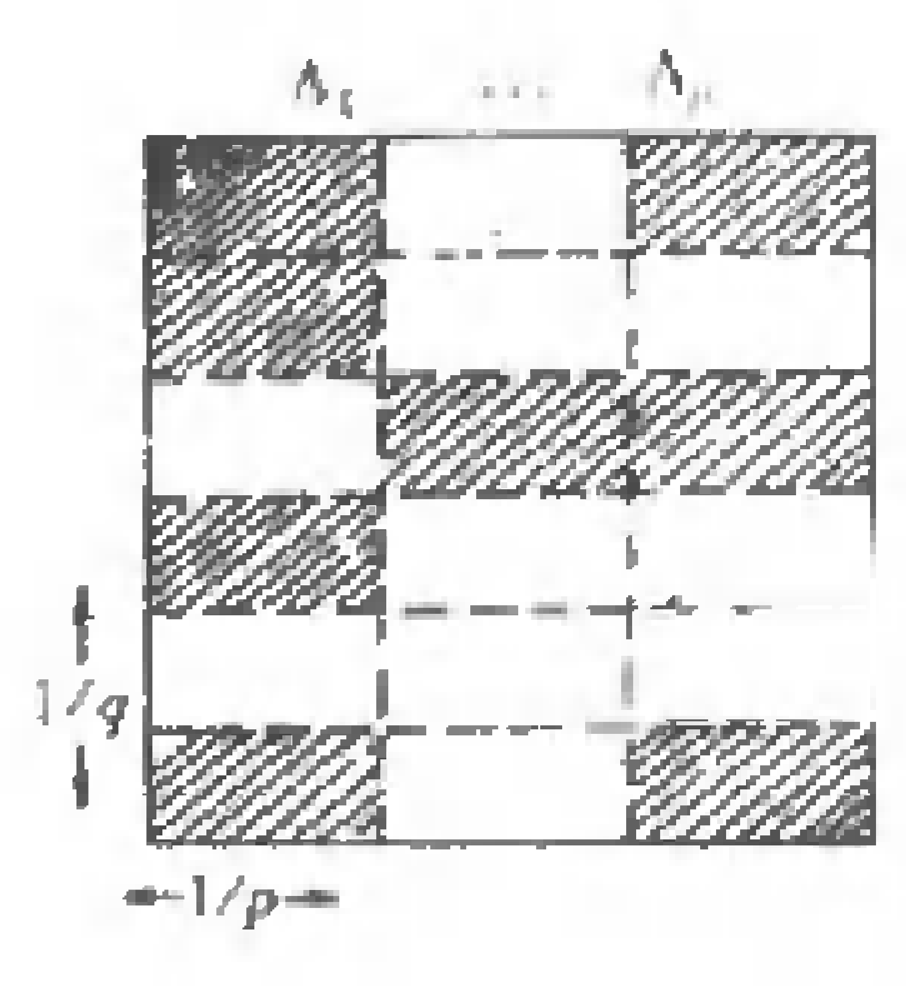


图 3.20　子集类

集，则

$$D_H(F)=\log\sum_{j=1}^{p}N_j^{\log p/\log q}/\log p \tag{3.99}$$

$$D_B(F)=\frac{\log p_1}{\log p}+\log\left(\frac{1}{p_1}\sum_{j=1}^{p}N_j\right)/\log q \tag{3.100}$$

其中 p_1 是至少包含 E_1 的一个矩形的柱集数.

前几步构造如图 3.21 所示. 在这个例子中，维数不仅依赖于每步选出矩形的个数，同时与它们的位置有关，而且 $D_H(F)$ 和 $D_B(F)$ 一般不相等.

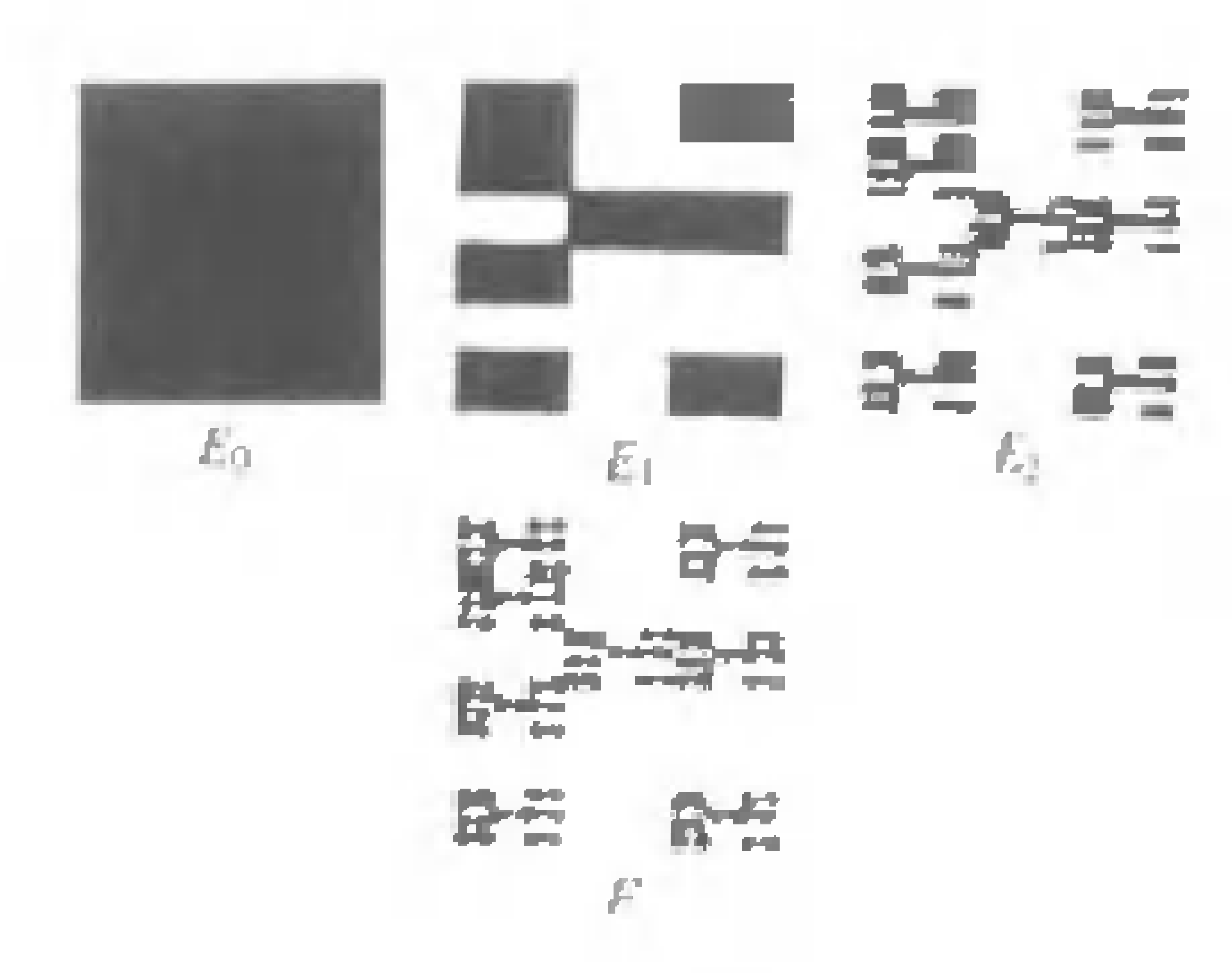


图 3.21 F 的前几步构造

上述两例是相当特殊的，对一般自仿射集的维数公式，有下述定理.

定理 3.8 设 $S_1,\cdots,S_m$ 是按(3.98)定义的仿射变换，其中 $\{T_i\}_{i=1}^m$ 是线性压缩变换，若 F 是满足

$$F=\bigcup_{i=1}^{m}(T_iF+b_i)$$

的仿射不变集，则 $D_H(F)=D_B(F)=d(T_1,\cdots,T_m)$ 在 m 维 Lebesque测度意义下对几乎所有的 $(b_1,\cdots,b_m)\in R^m$ 成立. 这里

$$d(T_1,\cdots,T_m) = \inf\left\{s \mid \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{J_k}\psi(T_{i_1},\cdots,T_{i_k}) < \infty\right\} \tag{3.101}$$

$$\psi^s(T) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r^{s-r+1} \tag{3.102}$$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 是线性变换 $T:R^n \to R^n$ 的奇异值，且 $1 > \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n > 0$，$0 \leqslant s \leqslant n$，$r$ 是满足 $r-1 < s \leqslant r$ 的整数. J_k 是序列 $(i_1,\cdots,i_k)$，$1 \leqslant i_j \leqslant m \quad (1 \leqslant j \leqslant k)$ 组成的集.

另外，若分形集的自仿射性质只在统计意义下成立，则称为统计自仿射的.

§3.4.3 随机分形

前面的讨论让我们了解到可以通过相似变换与仿射变换来生成分形图形，但如自然界中的海岸线、天空中的云彩等复杂图形都不能严格地通过相似变换与仿射变换而得到. 研究表明，这类复杂的分形图形在大小不同的尺度上均表现出随机性，即它的生成过程的每一步都包含了随机成分. 我们粗略地把由构造过程中的随机性而得到的分形结构称为随机分形.

我们首先分析随机 Cantor 集的统计自相似性. 在三分 Cantor 集的构造中，每次去掉线段中间的 1/3. 现在每次仍将线段分成三等分，但并不总是去掉中间的一段，而是用掷骰子的办法来决定去掉哪部分. 对于六面体的骰子，按 mod(3) 来决定，当余数为 0，1，2 时，则分别去掉左、中或右边的一段，这样不断重复至极限情形，得到的随机康托集具有统计自相似性，即把它的每一部分放大，与整体有相同的统计分布.

随机 Cantor 集的另一构造是在每一步去掉中间一段，但留下两段的长度是随机变化的. 在第 k 步，得到 2^k 个不同长度的区间，设极限集 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$，$[0,1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \cdots$ 是递缩的闭集序列，E_k 是第 k 步得到的 2^k 个不交的闭基本区间的并. 设 E_k 的每

个基本区间 I 包含 E_{k+1} 的两个区间 I_L,I_R，且 I_L,I_R 分别与 I 有相同的左、右端点，每个区间的长度是随机的，但 $|I_L|/|I|$ 和 $|I_R|/|I|$ 独立同分布，由此加进了统计自相似性，即 F 是统计自相似的，对每个 I，$F\cap I$ 与 F 有相同的分布，比例变化由 $|I|$ 决定.

现在用概率论述语描述随机分形 F，设 a,b 是常数，且 $0<a\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}$，设

$$\Omega=\{\{E_k\}_{k=0}^{\infty}\mid[0,1]=E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots\}$$

E_k 由 2^k 个不相交的闭区间 $I_{i_1\cdots i_k}$ 组成，$i_j=1$ 或 $2(1\leqslant j\leqslant k)$，如图 3.21 所示. E_k 的区间 $I_{i_1\cdots i_k}$ 包含 E_{k+1} 的两个区间 $I_{i_1\cdots i_k1}$ 和 $I_{i_1\cdots i_k2}$ 的左端点和 $I_{i_1\cdots i_k1}$ 的左端点一致，$I_{i_1\cdots i_k}$ 的右端点和 $I_{i_1\cdots i_k2}$ 的右端点一致，记

$$C_{i_1\cdots i_k}=|I_{i_1\cdots i_k}|/|I_{i_1\cdots i_{k-1}}|$$

图 3.22 随机 Cantor 集的构造

设对所有 $i_1,\cdots,i_k$ 有 $a\leqslant C_{i_1\cdots i_k}\leqslant b$，令 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$. 取 Ω 为样本空间，并设有概率测度 P 定义在 Ω 的子集构成的 σ 域 T 上，使得此值 $C_{i_1\cdots i_k}$ 是一个随机变量. 对每一序列 $i_1,\cdots,i_k$，设 $C_{i_1\cdots i_k,1}$ 与 $C_1=|I_1|$ 同分布，$C_{i_1\cdots i_k,2}$ 与 $C_2=|I_2|$ 同分布，$C_{i_1\cdots i_k,1}$ 与 $C_{i_1\cdots i_k,2}\cdots C_{i_1\cdots i_k,m}$ 可以不独立，但 $\{C_{i_1\cdots i_k}\}$ 是独立的. 则可以证明

$D_H(F)$ 是可用 $C_{i_1\cdots i_k}$ 表示的随机变量.

定理 3.9 对随机 Cantor 集 F,以概率 1 有 $D_H(F) = s$,s 是下述期望方程的解

$$E(C_1^s + C_2^s) = 1 \tag{3.103}$$

上述结果是定理 3.7 和式(3.98)在随机情形的翻版.该定理可以从很多方面推广,比如 E_k 的每个区间可以产生 E_{k+1} 中随机多个具有随机长度的区间,这一构造还可以推广到 R^n 上.

设 V 是 R^n 的开子集,$\overline{V}$ 是 V 的闭包,$m \geqslant 2$ 是整数,$0 < b < 1$,令 $\Omega = \{\{E_k\}_{k=0}^{\infty} \mid \overline{V} = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots\}$.$E_k$ 是 m^k 个闭集 $\overline{V}_{i_1\cdots i_k}$ 的并集,$i_j = 1,\cdots,m(1 \leqslant j \leqslant k)$ 且 $V_{i_1\cdots i_k}$ 或者与 V 相似,或者是空集.

设对每个$(i_1\cdots i_k)$,$V_{i_1\cdots i_k}$ 包含 $V_{i_1\cdots i_k i}(1 \leqslant i \leqslant m)$ 且这些集不相交.若 $V_{i_1\cdots i_k}$ 非空,记 $C_{i_1\cdots i_k} = |V_{i_1\cdots i_k}| / |V_{i_1\cdots i_k}|$ 为顺序集之间的相似比,$V_{i_1\cdots i_k} = \varnothing$,则 $C_{i_1\cdots i_k} = 0$,并记 $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.设 P 是定义在 Ω 的子集构成的 σ 域上的概率测度,使 $C_{i_1\cdots i_k i}$ 与 C_i 是随机变量.

设给定 $C_{i_1\cdots i_k} > 0$,即给定 $V_{i_1\cdots i_k}$ 非空,且对每一序列$(i_1,\cdots,i_k)$和 $1 \leqslant i \leqslant m$,$C_{i_1\cdots i_k i}$ 与 C_i 同分布.$C_{i_1\cdots i_k 1},\cdots,C_{i_1\cdots i_k m}$ 可以不独立而 $C_{i_1\cdots i_k}$ 独立,N 表示 $C_1,\cdots,C_k$ 中正数的(随机)个数,即 $V_1,\cdots,V_k$ 为非空集的个数,则有

定理 3.10 设 q 为集 F 为非空的概率,则 q 是下述多项式方程的最小非负根:

$$f(t) \equiv \sum_{j=0}^{m} P(N = j) t^j = t.$$

集 F 的 Hausdorff 维数和盒维数以概率 $1 - q$ 为 s.s 是下述期望方程的解

$$E\left(\sum_{j=1}^{m} C_j^s\right) = 1 \tag{3.104}$$

现在我们再讨论随机 Koch 曲线，它也可以用不同的方法来构造．一种方法是每次去掉中间的三分之一，而用与去掉部分构成等边三角形的另两条边代替，可以用掷硬币的方法决定新的部分位于被去掉部分的“上边”或“下边”，比如正面表示上边，反面表示下边．也可以用掷四面体骰子的办法确定，如根据 mod2 的余数 0，1 来决定，0 表示上边，1 表示下边，这样得到的曲线是统计自相似的，更像真实的海岸线．

另一种方法是，从单位直线段 E_0 中间去掉一随机长度为 c 的线段（c 可取作 $(0,1/3)$ 上均匀分布的随机变量），而代之以由去掉线段为底边的等边三角形的另两边形成 E_1．对 E_1 的每一线段重复上述过程，按这种方法进行至无穷，极限曲线 F 是统计自相似的．它是定理 3.10 的一个特例，这时集 V 可看作底边在 E_0，高为 $\sqrt{3}/2$ 的等边三角形，在每一步，长为 L 的线段由长为 $(1-c)L/2$，cL，cL，$(1-c)L/2$ 的四条线段代替，所以 $m = 4$，$c_1 = c_4 = \frac{1}{2}(1-c)$，且 $c_2 = c_3 = c$．由于 c 在 $(0,1/3)$ 上均匀分布，故(3.104)变为

$$\begin{aligned} 1 &= E\left\{2\left[\frac{1}{2}(1-c)\right]^s 2c^2\right\} \\ &= \int_0^{1/3} 3 \times 2\left\{\left[\frac{1}{2}(1-c)\right]^s + c^s\right\} dc \end{aligned} \tag{3.105}$$

或

$$s + 1 = 12 \times 2^{-(s+1)} - 6 \times 3^{-(s+1)}$$

解得

$$S = D_H(F) = D_B(F) \approx 1.144 \qquad \text{（以概率 1）}$$

§3.4.4　几种特殊的分形集

除了前面我们已经介绍的分形集外，最典型的还有 Sierpinski

地毯，Vicsek，Sierpinski 海绵等分形集．下面将简叙这几种分形集．

将一个正方形九等分，去掉中间的一个，保留四条边，剩下八个小正方形，将这八个小正方形再分别进行九等分，各自去掉中间的一个，保留它们的边，重复上述操作直至无穷，就可得到如图 3.23 所示的图形，人们称这样的集合为 Sierpinski 地毯．

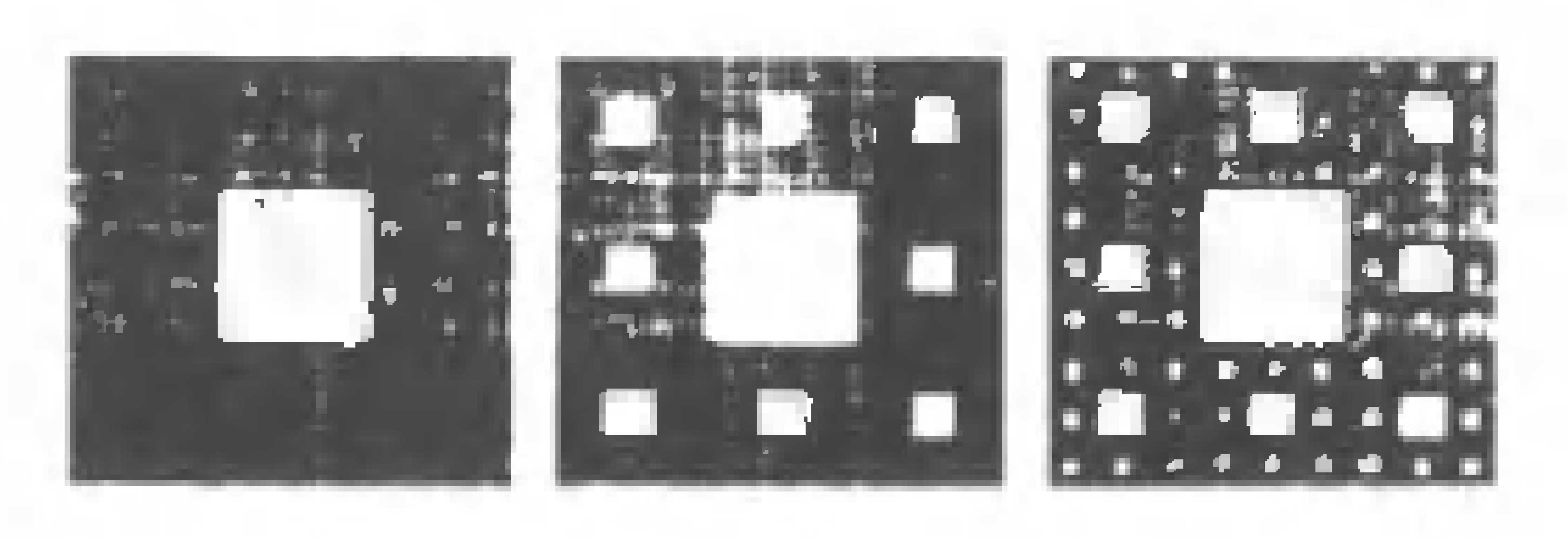


图 3.23　Sierpinski 地毯

同样地，该集合的面积趋于零，而线的欧氏长度趋于无穷大．一个原来规整的正方形，经上述操作之后，成了千疮百孔．在这里，$N - 8, r = \frac{1}{3}$，所以，相似维数为

$$D_s = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.8928$$

匈牙利的 Vicsek 提出了一种操作方法，它将一个正方形九等分，去掉四个角上的四个小正方形，保留它们的边，还剩下五个小正方形（$N = 5$），重复上述操作直至无穷，得到如图 2.24(a) 所示的几何图形．这种几何图形称为 Vicsek 图形，其相似维数为

$$D_s = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.4650$$

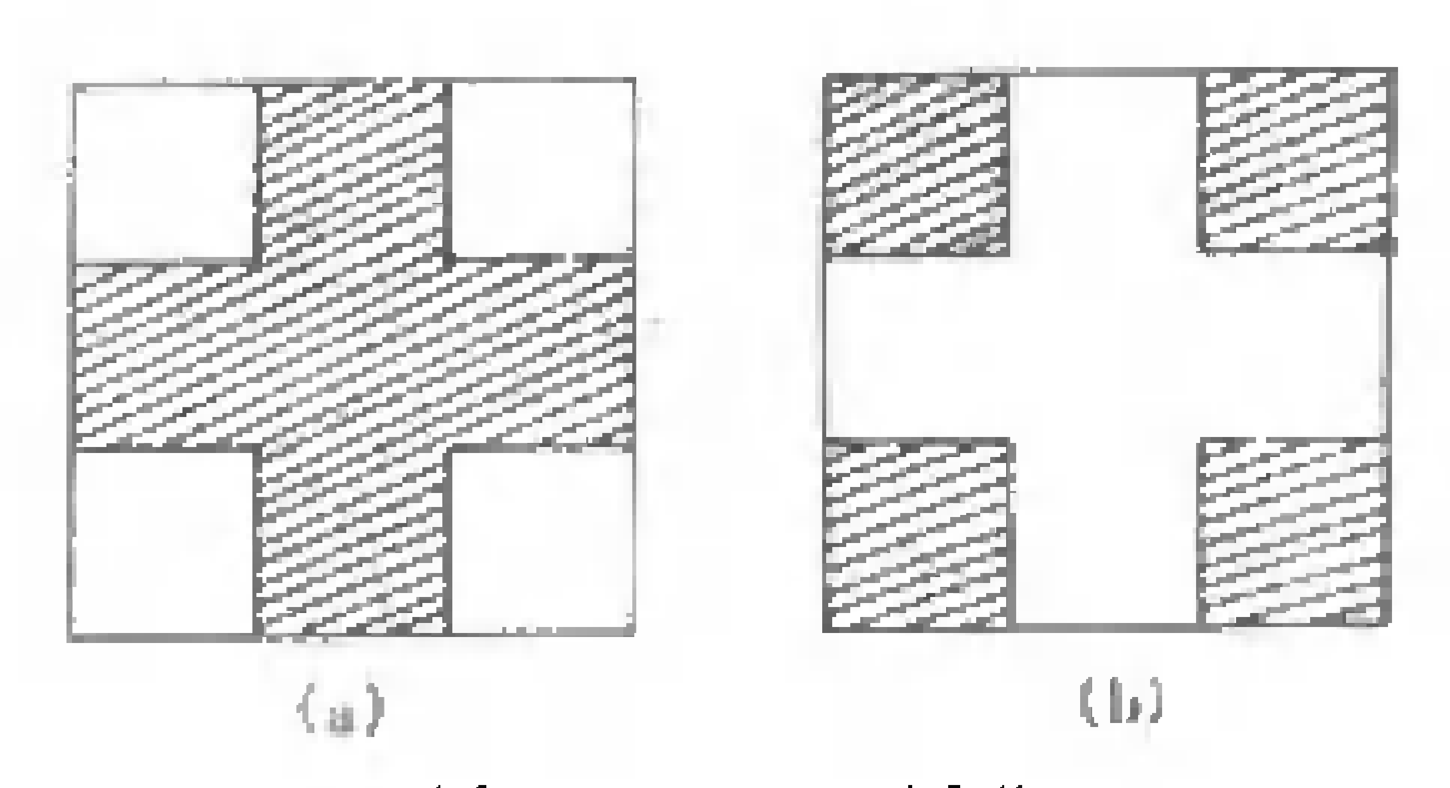


图 3.24　Vicsek 图形

类似地，九等分一个正方形之后，只保留四个角上的小正方形，其余的去掉，这样得到的图形如图 3.24(b) 所示. 它的相似维数为

$$D_s = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

对一个正六面体，将它的六个面均进行九等分，这等价于将正六面体进行 27 等分，而后去掉体心与面心处的七个小立方体，剩下 20 个小立方体($N = 20$)，并保留它们的表面. 将上述操作重复下去直至无穷，得到如图 3.25 所示的图形，人们称之为 Sierpiski 海绵.

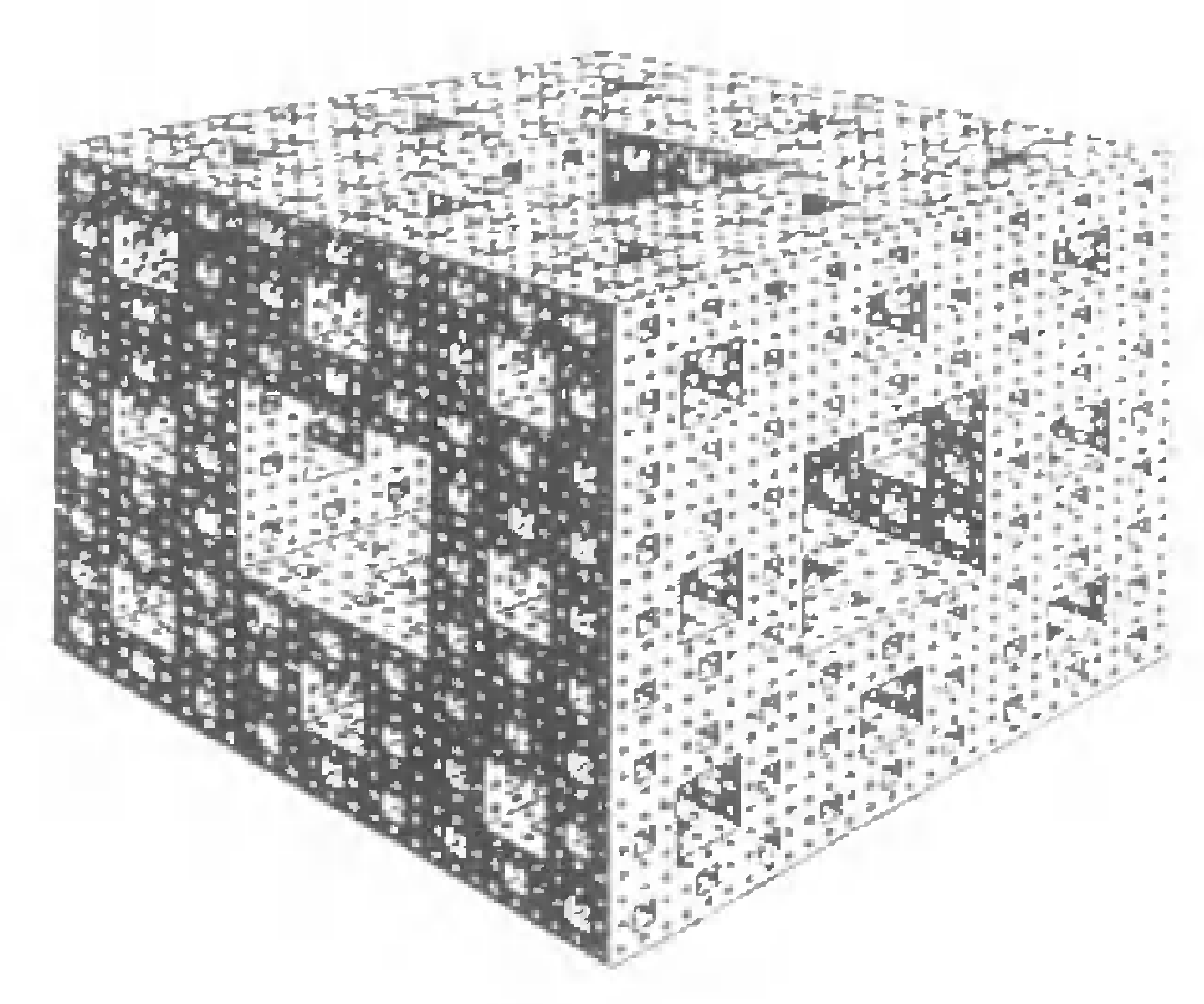


图 3.25 Sierpinski 海绵

经过上述操作后，使正六面体千疮百孔，类似于海绵的结构. 很显然，Sierpinski 海绵的相似维数为

$$D_s = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268$$

对 Sierpinski 海绵而言，其体积趋于零，而其表面的欧氏面积趋于无穷大. 对一个正四面体，也可经过类似的反复操作，获得具

有类似性质的结构.

Sierpinski 集的共同特征是:(1) 它们都是经典几何无法描述的图形.在 Sierpinski 地毯中,它的面积趋于零,而其周长趋于无穷大,因此它的维数只可能介于 1 和 2 之间;Sierpinski 海绵的体积趋于零,而其表面积却趋于无穷大,所以它的维数只能介于 2 和 3 之间.因此,它们常被称为病态的几何图形,是一种"只有皮没有肉"的几何集合.如果把化学反应中的催化剂作成 Sierpinski 海绵那样的结构,由于其表面积无限之大,那将是最理想的结构形式.(2) 它们都具有无穷多个自相似的内部结构.任何一个分割后的图形经适当放大后都是原来图形的翻版.如令初始图形(正三角形、正方形与正六面体)为 E_0,每操作一次后得到的集合依次用 E_1, E_2,…,E_i 来表示,则 Sierpinski 集合为

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \tag{3.106}$$

即由无穷多个闭集的交来构成,从而 E 也是闭集.

从本章介绍的 Cantor 集、Sierpinski 集和 Koch 曲线这些经典分形的生成来看,大体上有两种方式:第一种方式以 Cantor 集和 Sierpinski 集为例,其特点是从 E_0 中按一定原则向下"挖",结果 Sierpinski 和 Cantor 集的相似维数 D_s 小于 E_0 的欧氏维数,这种生成常称之为降维生成.第二种方式以 Koch 曲线和布朗运动为例,它们的特点是在 E_0 的基础上增加一些线或面,结果是 E 的相似维数 D_s 大于 E_0 的欧氏维数,这种生成称之为升维生成.分形结构的上述两种形成规律,对于发展分形动力学的理论体系,可能会有所启示.

§3.4.5 Julia 集

Julia 集是由法国数学家 Gaston Julia(1918 年)和 Pierre Faton(1919 年)在复变函数迭代的理论基础上获得的.

Julia 集由一个复变函数 f 经迭代生成.在复平面 C 上,像 $f(z) = z^2 + c$ 这样一个带有常数 c 的简单函数,由很简单的迭代

过程，就能生成非常复杂的点集 J，或者说具有奇异形状的分形，如图 3.26 所示.

在图 3.26(a) 中，$c = 0.1 + 0.1\mathrm{i}$，f_c 有吸引不动点，J 为拟圆；在(b) 中，$c = 0.5 + 0.5\mathrm{i}$，f_c 有吸引不动点，J 为拟圆；在(c) 中，

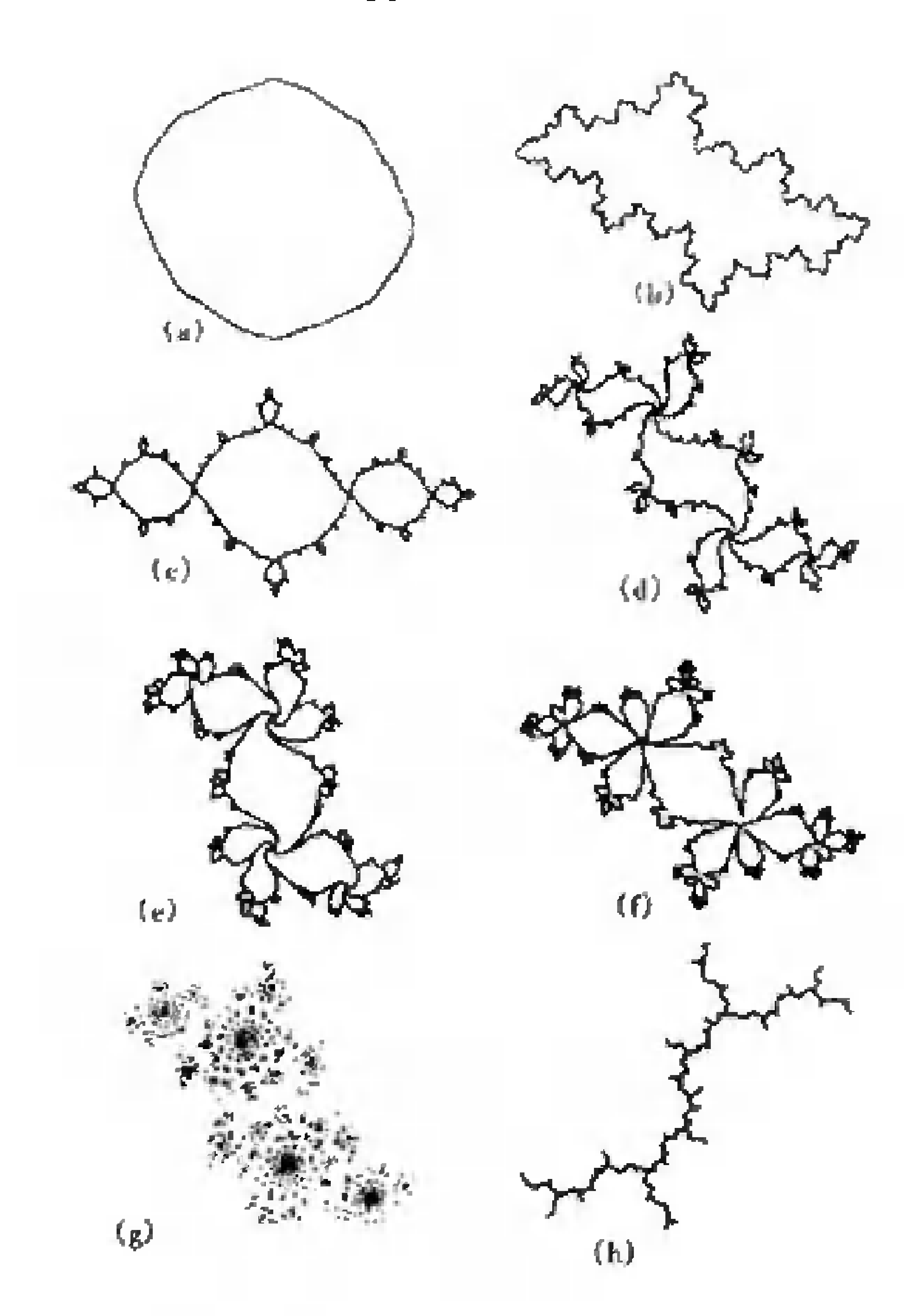


图 3.26　二次复变函数 $f(z) = z^2 + c$ 的一组 Julia 集

(a) $c = 0.1 + 0.1\mathrm{i}$　(b) $c = 0.5 + 0.5\mathrm{i}$

(c) $c = \ \ 1 + 0.05\mathrm{i}$　(d) $c = \ \ 0.2 + 0.75\mathrm{i}$

(e) $c = 0.25 + 0.52\mathrm{i}$　(f) $c = 0.5 + 0.55\mathrm{i}$

(g) $c = 0.66\mathrm{i}$　(h) $c = \ \ \mathrm{i}$

$c=-1+0.05\mathrm{i}$，f_c 有周期为 2 的吸引轨道；在(d)中，$c=-0.2+0.75\mathrm{i}$，f_c 有周期为 3 的吸引轨道；在(e)中，$c=0.25+0.52\mathrm{i}$，f_c 有周期为 4 的吸引轨道；在(f)中，$c=0.5+0.55\mathrm{i}$，f_c 有周期为 5 的吸引轨道；在(g)中，$c=0.66\mathrm{i}$，f_c 没有吸引轨道且 J 为全不连通；在(h)中，$c=-\mathrm{i}$，$f_c^2(0)$ 是周期的且 J 为无圈曲线.

在 3.4.5 节中将会清楚地看到，一个 Julia 集对应于 Mandelbrot 集内(或集外)的每个点，所以 Julia 集实际上是无穷的不计其数的.

一般地，Julia 集是动力系统中的斥子(repeller)，通过对复平面上的解析函数的深入研究，可得到关于排斥集构造的很多知识.

为了说明斥子的定义，先看一下吸引子的定义. 粗略地说，一个吸引子就是一个集合并且使得附近所有轨道都收敛到这个集合上. 精确的定义如下：

设 D 是 R^n 的一个子集(通常就是 R^n 本身)，并且设 $f:D\to D$ 是一个连续映射，则 f^k 表示 f 的 k 次迭代. 称 D 的子集 F 为 f 的吸引子，如果 F 是一个闭集，并且在 f 的作用下是不变的(即 $f(F)=F$)，使得对包含 F 的一个开集 V 中的所有点 x，$f^k(x)$ 到 F 的距离随 k 趋于无穷大而趋于零. 集 V 称为下的吸引域.

类似地，对一个闭不变子集 F，如果 F 附近(但不在 F 中)的所有点经迭代后远离 F，那么 F 就称为斥子.

在这里，一个迭代函数系 $\{f^k\}$ 就称为一个离散的动力系统. 吸引子和斥子可能正好是一个周期为 p 的轨道. 通常，如果 f 有分形吸引子或分形斥子 F，那么 f 在 F 上的性质表现为"混沌"的.

为了叙述的方便，令 $f:C\to C$ 为复系数的 $n\geqslant 2$ 的多项式 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$. 注意到，如果 f 是拓广的复平面 $C\cup\{\infty\}$ 上的有理函数 $f(z)=p(z)/q(z)$(此外 p，q 都是多项式)，只要稍微修改一下，一般结论仍然正确. 若 f 为任一亚纯函数(除去有限个极点在 $C\cup\{\infty\}$ 上是解析的)，一般结论的大部分也都成立.

照例，记 f^k 为函数 f 的 k 重复合 $f\circ\cdots\circ f$，所以 $f^k(\omega)$ 为 ω 的第 k 次迭代 $f(f(\circ\cdots\circ(f(\omega))))$. 如果 $f(\omega)=\omega$，就称 ω 为 f 的不动点. 如果存在某个大于或等于 1 的整数 p，使 $f^p(\omega)=\omega$，则称 ω 是 f 的周期点，使 $f^p(\omega)=\omega$ 为最小的 p 称为 ω 的周期. 称 $\omega, f(\omega), \cdots, f^p(\omega)$ 为周期 p 的轨道. 设 ω 是周期为 p 的周期点，且复变微商 $(f^p)(\omega)=\lambda$，点 ω 称为

$$\begin{cases}\text{超吸引的,} & \text{如果 } \lambda = 0\\ \text{吸引的,} & \text{如果 } 0 \leqslant |\lambda| < 1\\ \text{中性的,} & \text{如果 } |\lambda| = 1\\ \text{斥性的,} & \text{如果 } |\lambda| > 1\end{cases} \tag{3.107}$$

f 的 Julia 集 $J(f)$ 可以定义为 f 的斥性周期点集的闭包(当函数很明确时，用 J 代替 $J(f)$)，Julia 集的余集称为 Faton 集或稳定集，记为 $F(f)$. 对多项式的 Julia 集的几何性质与分形性质的研究表明，$J(f)$ 在 f 下是完全不变的，即 $J=f(J)=f^{-1}(J)$，且 J 为非空紧集，f 在 J 上表现出"混沌"性质，而且 J 通常为分形. 有关这些性质的证明从略.

下面是一个最简单的例子，$f(z)=z^2$，所以 $f^k(z)=z^{2k}$. 满足 $f^p(z)=z$ 的点为 $\{\exp(2\pi iq/(2^p-1)):0\leqslant q<2^p-2\}$，因为在这些点上，$|(f^p)'(z)|=2p$，因此它们通常是斥性的，于是 Julia 集 $J(f)$ 是单位圆 $|z|=1$. 显然，$J=f(J)=f^{-1}(J)$，并且当 $k\to\infty$ 时，如果 $|z|<1$，则 $f^k(z)\to 0$. 如果 $|z|>1$，则 $f^k(z)\to\infty$. 如果 $|z|=1$，则 $f^k(z)$ 总在 J 上. Julia 集 J 是在迭代中分别趋于 0 和 ∞ 的点集之间的分界. 当然，在这个特殊的情况下，J 不是分形，见图 3.27(a). 如果在本例中取 $f(z)=z^2+c$，c 为较小的复数. 容易看出，若 z 也较小，则 $f^k(z)\to\omega$，这里 ω 是 f 的接近于零的不动点；若 z 较大，则 $f^k(z)\to\infty$. 虽然 Julia 集也是两类不同表现形式的集之间的分界，但现在却显现出 J 是分形曲线，如图 3.27(b) 所示.

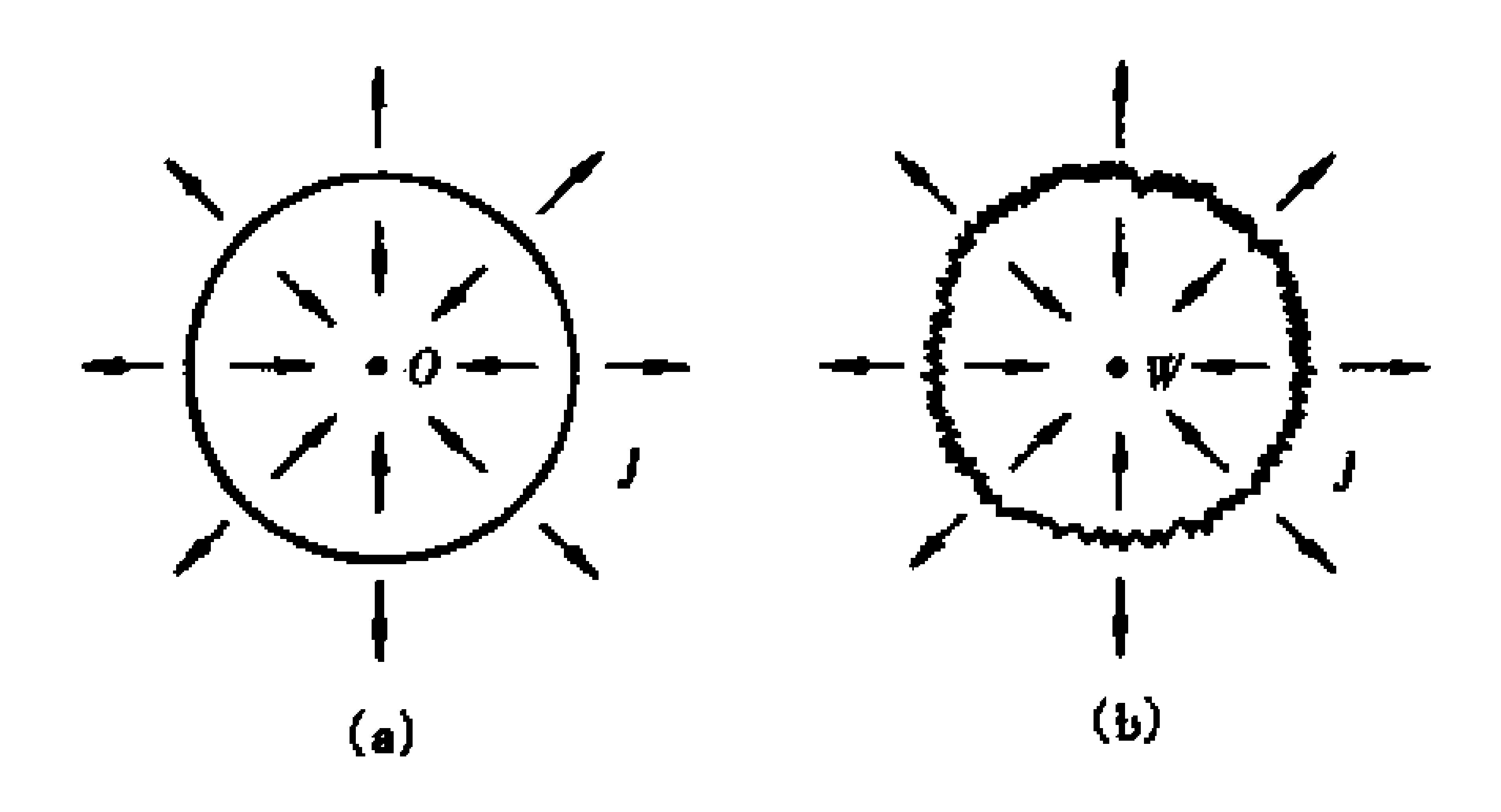


图 3.27　(a) $f(z) = z^2$ 时的 Julia 集为圆 $|z| = 1$；
(b) $f(z) = z^2 + c$ 且 c 为较小的复数时，Julia 集仍为两类不同形式的集的分界，但它是分形曲线

在研究 Julia 集的基本性质时，不能回避正规解析函数族的概念和 Montel 定理. 下面先来看关于解析函数族的概念.

设 U 是 C 中的开集，$g_k: U \to C$ 为一解析函数族（于是函数在 U 上在复数的意义下可微）. $\{g_k\}$ 在 U 上称为正规的，如果从 $\{g_k\}$ 中选出的每一函数序列都有子序列在 U 的每一紧子集上一致收敛，并且或者收敛到有界解析函数或者收敛到无穷. 注意到根据普通复变函数理论，这意味着在 U 的每一连通区域上，子序列或者收敛到有限解析函数或者收敛到无穷. 在前面的情形，子序列的导数必定收敛于极限函数的导数. 称函数族 $\{g_k\}$ 在 U 内的点 ω 上为正规的，如果存在 U 的某个包含 ω 的开子集 V，使 $\{g_k\}$ 是 V 上的正规族. 注意到这等价于存在 ω 的一个邻域 V，使 $\{g_k\}$ 的每一序列都有在 V 上的一致收敛于有界解析函数或 ∞ 的子列.

Julia 集理论的基本结果出自于 Montel 定理，这个深刻的定理断言，非正规函数族在每一点附近除去一个可能是复数值外可取到任何值. Montel 定理如下：

定理 3.11　设 $\{g_k\}$ 为开区域 U 上的一族解析函数，如果 $\{g_k\}$ 为非正规族，则对所有的 $\omega \in C$，至多除去一个例外值，存在 k 和 $z \in U$，使

$$g_k(z) = \omega \tag{3.108}$$

这个定理的证明可参见有关复变函数论的文献.作为小结,对Julia集可以摘要叙述如下:

(1) Julia集 $J(f)$ 为多项式 f 的斥性周期点集的闭包.它是不包含孤立点的不可数紧子集,而且在 f 与 f^{-1} 下不变.如果 $z \in J(f)$,则 $J(f)$ 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ 的闭包.Julia集是 f 的包括无穷远点在内的所有吸引不动点的吸引域的边界,而且对每一正整数 p

$$J'(f) = J(f^p) \tag{3.109}$$

(2) 在Julia集上可以发现 f 的许多动态性质,例如可以证明"f 在 J 上是混沌的".由定义,f 的周期在 J 内稠密.另一方面,J 包含了 $f^k(z)$ 在 J 内稠密的点 z.更进一步,f 在 J 上对"初始条件有敏感的依赖关系",因此,无论同时属于 J 的 z,ω 如何接近,对于某个 k,$|f^k(z) - f^k(\omega)|$ 将很大.

§3.4.6 Mandelbrot 集

下面考虑 C 上二次函数的情形,研究具有形式

$$f_c(z) = z^2 + c \tag{3.110}$$

的多项式的Julia集.如果 $h(z) = \alpha z + \beta \quad (\alpha \neq 0)$,则

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = (\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta)/2 \tag{3.111}$$

通过适当地选取 α,β,c 的值,可以使表达式变成我们所期望的任何二次函数 f.于是 $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$,所以对所有的 k,$h^{-1} \circ f_c^k \circ h = f^k$,这意味着在 f 作用下,点 z 的迭代序列 $\{f^k(z)\}$ 是在 f_c 下点 $h(z)$ 的迭代序列 $\{f_c^k(h(z))\}$ 在 h^{-1} 下的像.映射 h 将 f 的动态图像变换为 f_c 的动态图.特别地,z 为 f 的周期为 p 的点当且仅当 $h(z)$ 是 f_c 的周期为 p 的点,所以,f 的Julia集是 f_c 的Julia集

在 h^{-1} 下的像.

变换 h 称为 f 与 f_c 共轭,每个二次函数与一个带有某个 c 的 f_c 共轭,所以通过研究 $c \in C$ 的 f_c 的 Julia 集,能很有效地研究所有二次多项式的 Julia 集.因为 h 为一相似变换,所以任何二次多项式的 Julia 集几乎相似于带有某个 $c \in C$ 的 f_c 的 Julia 集.

定义　称下面的 M 为 Mandelbrot 集

$$M = \{c \in C : J(f_c) \text{ 是连通的}\} \tag{3.112}$$

M 看来似乎与 $J(f_c)$ 的一个相当特殊的性质有关,事实上,如下面将会看到的,M 包含了关于 Julia 集构造的无穷信息.

定义(3.112)不适合计算的目的,下面将导出一个等价定义,它在确定参数 c 是否在 M 中,及在研究 M 的非常复杂的结构中十分有用,见图 3.28.

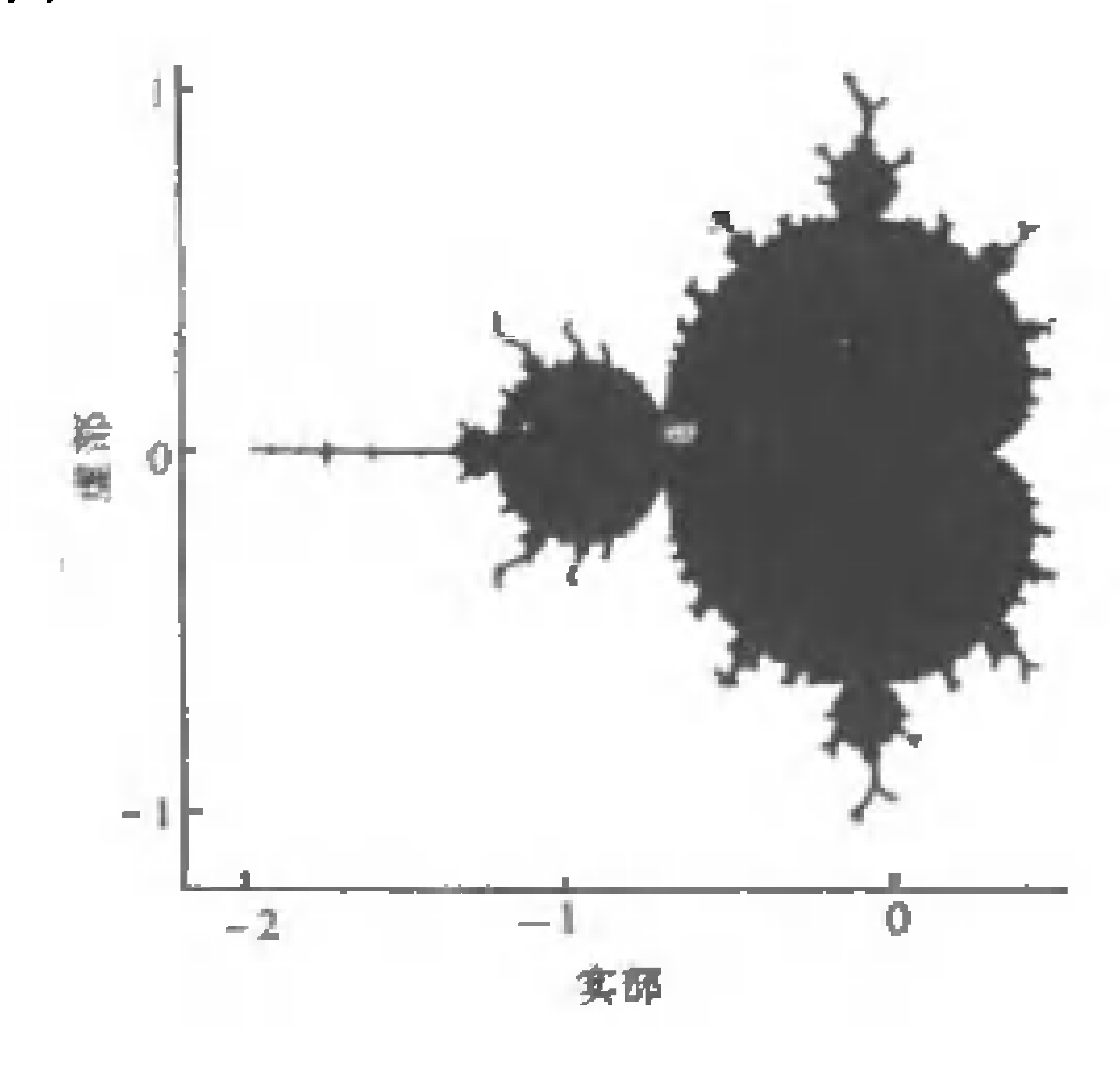


图 3.28　复平面上的 Mandelbrot 集

为此,首先需要了解一些变换 f_c 在光滑曲线上的作用,简要地称复平面中的一条光滑(即可微)的、闭合的、简单(即不自交)的曲线为一个回路;分别称平面 C 上位于这样曲线以内和以外的部分为回路的内部和外部.8 字形图是自交于一个单点的光滑闭

合曲线.

定理 3.12

$$M = \{c \in C:\{f_c^k(0)\}_{k\geq 1} \text{有界}\} \tag{3.113}$$

$$= \{c \in C:\{f_c^k(0)\} \to \infty (k \to \infty)\} \tag{3.114}$$

证明从略.这就是 M 的等价定义,它是 Mandelbrot 集的计算机制图的基础.在式(3.113) 与(3.114) 中考虑原点迭代的理由是对于每一个 c,原点是 f_c 的临界点,至于式(3.113) 与式(3.114) 等价是因为存在数 r 使得当 $|z| > r$ 时,$|f_c(z)| > 2|z|$,显然 $f_c^k(0) \to \infty$ 并且仅当 $\{f_c^k(0)\}$ 有界,所以式(3.113) 与式(3.114) 等价.

选取数 r, k_0,比如都取 100 以上,对每一个 c 连续计算 $\{f_c^k(0)\}$ 系列的各项,如果在 $k = k_0$ 之前 $|f_c^k(0)| > r$,此时,我们就认为 c 在 M 外,否则就取 $c \in M$.对一个区域的每一个 c 值都重复这个过程,以保证 M 的图像能被画出.根据使 $|f_c^k(0)| > r$ 的第一个整数 k 的不同值,区分出 M 的余集的不同区域,而设计并涂上不同的颜色.

从 Mandelbrot 集的图形(见图 3.28) 可以看出它具有非常复杂的结构与明显特征.例如,一个主要的心形图与一系列圆盘形的“芽苞”突起连结在一起.每一个芽苞又被更细小的芽苞所环绕,以此类推.然而,这并不是全部,还有精细的“发状”分枝从芽苞向外长出,这些细发在它的每一段上都带有与整个 Mandelbrot 集相似的微型样本.计算机制图中容易遗漏掉这些细发,然而精细的图形说明 M 为连通集,并且在数学上已由康奈尔大学的 John H. Hubbard 和巴黎高等师范的 Adrien Douady 给予了证明.

下面来看当参数 c 在复平面上变化时,Julia 集 $J(f_c)$ 的构造将发生一些什么样的变化,从而使 Mandelbrot 集各个不同部分的意义变得更加明显.

f_c 的吸引周期点是$J(f_c)$结构的关键.可以证明,若 $\omega \neq \infty$ 是

多项式 f 的吸引周期点，则存在临界点（满足 $f'(z)=0$ 的点）z，使得 $f^k(z)$ 被吸引到包含 ω 的周期轨道上．因为 f_c 的惟一临界点为 0，所以 f_c 至多有一个吸引周期轨道．而且若 $c \notin M$，则由定理 3.12，$f_c^k(0) \to \infty$，所以 f_c 不能有吸引周期轨道．可以猜想，使得 f_c 有吸引周期轨道的 c 的集充满 M 的内部，但这还没有被证明．

自然地可以根据（有限）吸引轨道的周期 p 对 f_c 进行分类，如果这种轨道存在的话．相应于不同 p 的 c 值对应于 Mandelbrot 集 M 的不同区域．

定理 3.13　设 $|c| > \frac{1}{4}(5+2\sqrt{6})$，则 $J(f_c)$ 是全不连通的，而且对 J 附近的 z，$J(f_c)$ 是由 $f_c^{-1}(z)$ 的两个分支定义的两个压缩变换的不变集．当 c 充分大时，有

$$D_B(J(f_c)) = D_H(J(f_c)) \sim 2\log 2/\log |c|$$

证明从略．下面来研究 c 较小的情形．已知 $c=0$，$J(f_c)$ 为单位圆．如果 c 较小，z 也充分小，则当 $k\to\infty$ 时，$f_c^k(z)\to\omega$，这里 ω 是接近于 0 的吸引不动点 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4c})$．另一方面，若 z 较大，$f_c^k(z)\to\infty$．有理由希望当 c 移动并离开 0 时，圆“变形”为简单闭曲线（即没有自交点），这个闭曲线把这两种类型的点分离开了．

定理 3.14　若 $|c| < \frac{1}{4}$，则 $J(f_c)$ 为简单闭曲线．

推广这个论证，若 c 在 M 的主心形线上，则 $J(f_c)$ 为简单闭曲线，这样的曲线有时被称为拟圆．当然，若 $c>0$，则 $J(f_c)$ 是分形曲线．

图 3.29 显示了 M 集中的“点”的结构与各种 c 值的 Julia 集相对应．

尽管要掌握 Mandelbrot 集的数学意义并非易事，但它现在已经是分形理论研究的内容之一，也成了混沌的一种国际标志，它美丽无比、色彩斑斓的图案给人以艺术享受．

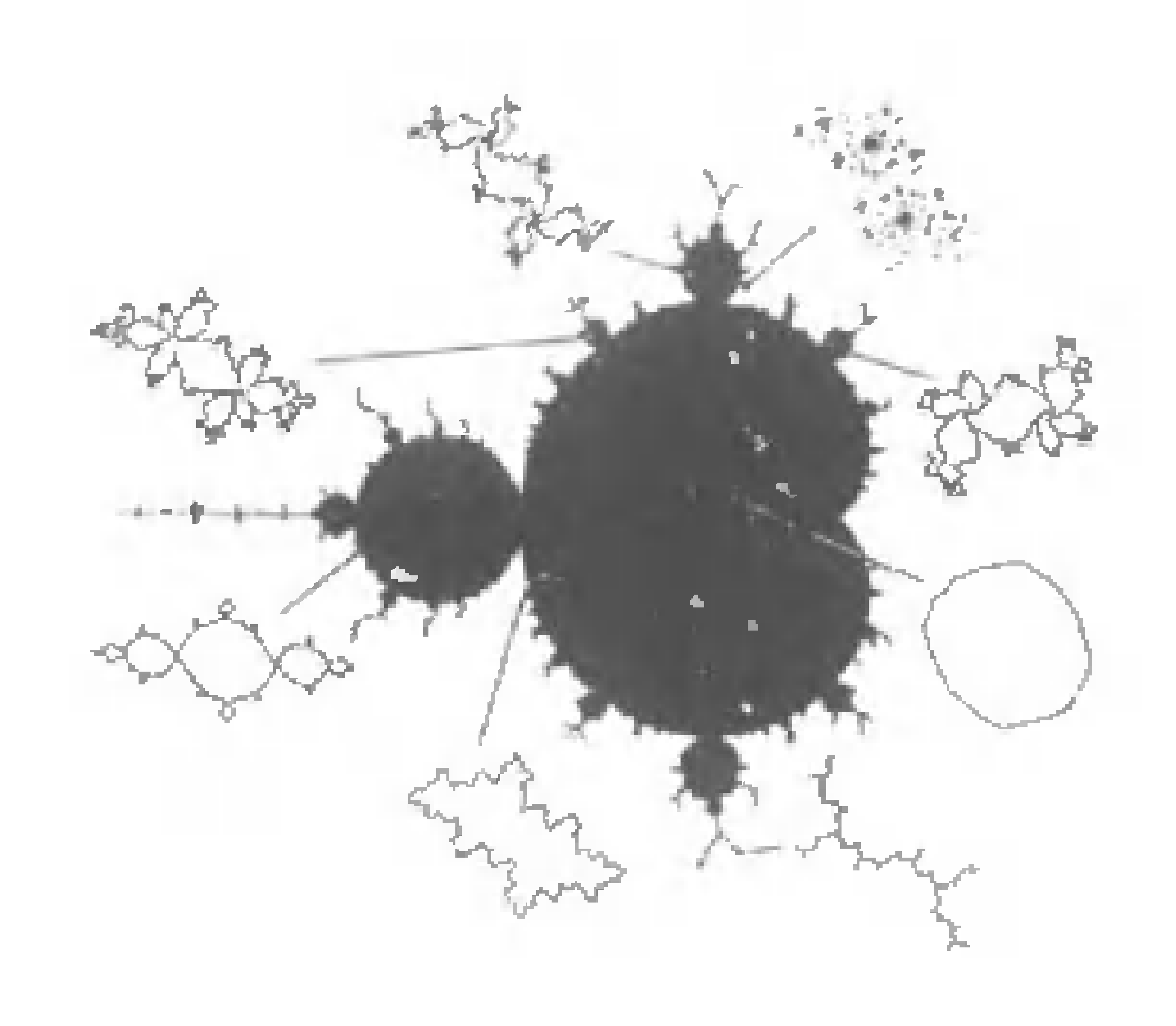


图 3.29 对应 Mandelbrot 集中各种点 c 的 Julia 集

§3.4.7 Lyapunov 指数

前几节中我们已介绍了一些混沌不变集，对于其复杂性是用几何图形去把握的，但实际问题中能弄清其几何构造的集合是非常有限的，而所有的几何构造也是非常粗糙的，特别是当系统是四维以上时，其相图已无法直观地想象. 所以用某一特征值去把握混沌集的复杂性自然是重要的. 这里所要介绍的是其中最重要的一种特征值——Lyapunov 指数.

设 $f:R\to R$，由 f 生成动力系统 f^k，任取 $x\in R$，以及 x 邻近的点 $x+\Delta x$，设 $f^k(x)$ 和 $f^k(x+\Delta x)$，$k\geqslant 0$ 是分别以 x 和 $x+\Delta x$ 为初值的轨道. 若 f 是连续可微的，则

$$
\begin{aligned}
|f^k(x+\Delta x)-f^k(x)| &\approx \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^k(x)\right||\Delta x| \\
&= |Df^k(x)||\Delta x| \qquad (3.115)
\end{aligned}
$$

由此可见，要观察 f^k 关于初值是否有敏感的依赖性，也就需要了解 $|Df^k(x)|$ 和变化情况，令

$$\lambda(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k}\ln |Df^k(x)| \quad (3.116)$$

并称 $\lambda(x)$ 为 f 在点 x 处的 Lyapunov 指数. 由于(3.116)取的是上极限,也就是 $\frac{1}{k}\ln Df^k(x)$ 的最大的极限点,所以应有无穷多个自然数 k_i 使得

$$\frac{1}{k_i}\ln |Df^{k_i}(x)| \longrightarrow \lambda(x) \quad k_i \to \infty \quad (3.117)$$

即

$$|Df^{k_i}(x)| \approx e^{k_i\lambda(x)} \quad (1 < k_i \text{ 充分大}) \quad (3.118)$$

从而

$$|f^{k_i}(x+\Delta x) - f^{k_i}(x)| \approx e^{k_i\lambda(x)} |\Delta x| \ (k_i \text{ 充分大}) \quad (3.119)$$

这意味着,当 $\lambda(x) > 0$ 时,系统 f^k 关于 x 点具有敏感的依赖性. 进一步地,若存在着非零 Lebesque 测度的集合 $A \subseteq R$,使得当 $x \in A$ 时,$\lambda(x) > 0$,则当然 f^k 是混沌的动力系统,因此,我们可以利用 Lyapunov 指数来判定动力系统是否为混沌,这也是 Lyapunov 指数之所以重要的原因之一.

在 $\lambda(x)$ 的定义中还可见,$\lambda(x)$ 恰好代表系统 f^k 在 x 点变化情况,特别地,若 x 是 f 的不动点,则

$$\lambda(\overline{x}) = \ln |Df(\overline{x})| \quad (3.120)$$

即 $e^{\lambda(x)}$ 是平衡点的特征值概念的推广.

例 7 求逻辑斯谛映射 $f(x) = 1 - 2x^2$ 的 Lyapunov 指数. 由于 $f:[-1,1] \to [-1,1]$,所以我们仅把 f 限制在$[-1,1]$上来考察. 取 $h(x) = -1 + 2\sin^2\pi(x+1)/4$,则

$$h^{-1}(x) = -1 + \frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}},$$

则对于 $-1 < x < 0$

$$h^{-1}f[h(x)] = h^{-1}(1-2h^2(x)) = h^{-1}\left(1-2\cos^2\frac{\pi(x+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi(x+1)}{2}} - 1$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{\pi(x+1)}{2} - 1 = 2x+1$$

设 $J(x) = 1-2|x|$,则易见 $h^{-1}f[h(x)] = J(x), x \in [-1,1]$ 由于

$$|DJ(x)| = 2, (x \neq 0) \text{ 且 } f^k(x) = h(J^k(h^{-1}(x)))$$

所以

$$|Df^k(x)| = |Dh(J^k(h^{-1}(x)))| 2^k \cdot |Dh^{-1}(x)|$$

因此,对于几乎所有的 $x \in [-1,1]$,有

$$\lambda(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln|Df^k(x)| = \ln 2$$

即 f 在 $[-1,1]$ 上的 Lyapunov 指数几乎处处等于常数 $\ln 2$,这就意味着 $[-1,1]$ 是 f 的混沌不变集,且 f^k 是混沌的动力系统.

事实上,对于其他的逻辑斯谛映射 $f_\mu:[0,1]\to[0,1], f_\mu(x) = \mu x(1-x), \mu \in (2,4)$ 也同样有类似的性质,即 f_μ 的 $[0,1]$ 上 Lyapunov 指数几乎处处是常数 λ_μ,其图像如图 3.30. 由图 3.30 可见,当 μ 位于几个大窗口处时,f_μ 的 Lyapunov 指数 λ_μ 小于0,即 f_μ 在这时是非混沌的. 当然 λ_μ 在其他窗口处也应是小于或等于零的,还有当 $\mu = \mu_\infty$ 时,$\lambda_\mu = 0$,即 f_μ 在此时也是非混沌的.

由于一维动力系统变化的自由度只有一个,所以只需用单个 Lyapunov 指数就足够了,若系统 ψ^t 是 n 维的,即 ψ^t 的自由度已有 n 个,所以自然也需要有 n 个 Lyapunov 指数来刻画其变化情况,这使得问题复杂起来.

这里,我们将简单介绍一下高维动力系统的 Lyapunov 指数的

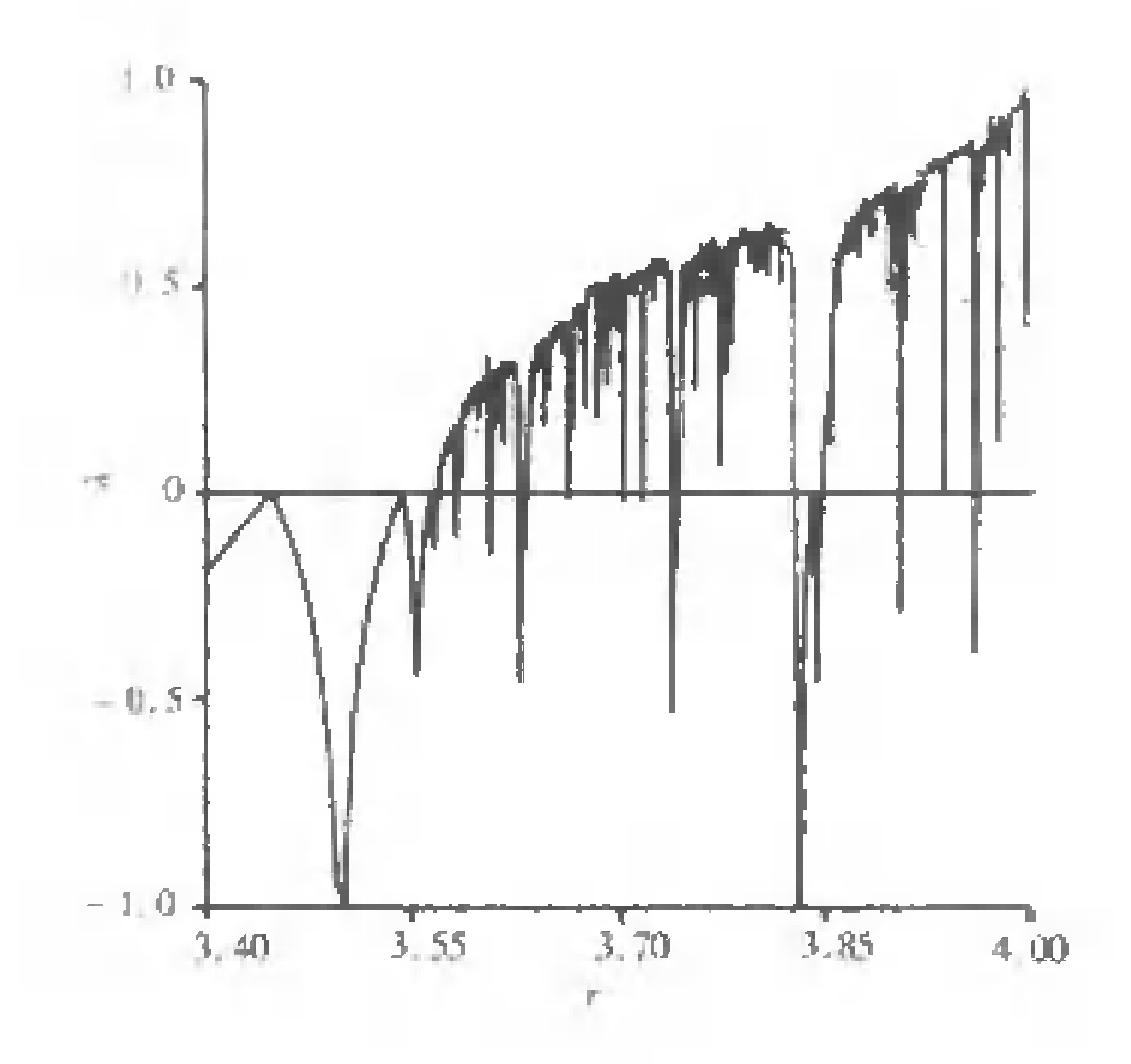


图 3.30 Logistic 映射的 Lyapunov 指数

定义,以及其与混沌吸引子的 Hausdorff 维数估计值之间的关系,这是一个相当复杂的问题.

设 $\psi^t: R^n \to R^n$ 是离散的($t \in Z_+$)或是连续的动力系统.则 $D\psi^t: R^n \to R^{n^2}$,即 $D\psi^t(x)$ 是一 $n \times n$ 矩阵.记$(D\psi^t(x))^T$ 为 $D\psi^t(x)$ 的转置矩阵,从而$(D\psi^t(x))^t D\psi^t(x)$ 是一半正定的对称矩阵.进一步地,我们设当 $t \to +\infty$ 时$[(D\psi^t(x))^t D\psi^t(x)]^{\frac{1}{2t}}$ 有极限.

设

$$T(x) = \lim_{t \to \infty}[(D\psi^t(x)^t D\psi^t(x)]^{\frac{1}{2t}} \tag{3.121}$$

则 $T(x)$ 是一半正定矩阵(实际上,$T(x)$ 基本上是正定的),从而 $T(x)$ 有 n 个特征值$\omega_1(x) \geqslant \omega_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \omega_n(x) \geqslant 0$ 和相应的 n 个相互正交的特征向量$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$,使得

$$T(x)u_k(x) = \omega_k(x)u_k(x) \qquad k = 1,2,\cdots,n \tag{3.122}$$

我们称

$$\lambda_k(x) = \ln|\omega_k(x)| \tag{3.123}$$

为 f 在点 x 处的第 k 个 Lyapunov 指数，也称 $(\lambda_1(x),\cdots,\lambda_n(x))$ 为 f 的局部 Lyapunov 指数

下面让我们从另一个角度来认识 Lyapunov 指数. 记 $V_k(x) = \mathrm{span}\{u_k(x),\cdots,u_n(x)\}$，即以特征向量 $u_k(x),\cdots,u_n(x)$ 为基的 $n-k+1$ 维线性空间，则

$$V_1(x) \supset V_2(x) \supset \cdots \supset V_n(x)$$

任取 $V \in V_k \setminus V_{k+1}$，则必存在实数 $\alpha_k,\cdots,\alpha_n$，且 $\alpha_k \neq 0$，使得

$$v = \alpha_k u_k(x) + \cdots + \alpha_n u_n(x)$$

记 $(\cdot,\cdot)$ 为 R^n 的内积，则

$$\begin{aligned}
|D\varphi^t(x)| &= (D\varphi^t(x)v, D\varphi^t(x)v)^{\frac{1}{2}} \\
&= (v,(D\varphi^t(x)v)^T D\varphi^t(x)v)^{\frac{t}{2}} \approx (v, T^{2t}(x)v)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\alpha_k u_k(x) + \cdots + \alpha_n u_n(x), \alpha_k\omega_k^{2t}(x)u_k(x) + \cdots \\
&\quad + \alpha_n\omega_n^{2t}(x)u_k(x))^{\frac{1}{2}}（当 t 充分大时） \\
&= (\alpha_k^2\omega_k^{2t}(x) + \cdots + \alpha_n^2\omega_n^{2t}(x))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.124}$$

由于

$$\begin{aligned}
\alpha_k\omega_k^t(x) &\leqslant (\alpha_k^2\omega_k^{2t}(x) + \cdots + \alpha_n^2\omega_n^{2t}(x))^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (\alpha_k^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{\frac{1}{2}}\omega_k^t(x)
\end{aligned}$$

且 $\alpha_k \neq 0$，所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln(\alpha_k^2\omega_k^{2t}(x) + \cdots + \alpha_n^2\omega_n^{2t}(x))^{\frac{1}{2t}} \\
&\quad = \ln\omega_k(x) = \lambda_k(x)
\end{aligned} \tag{3.125}$$

这也就是说

$$\begin{aligned}
&\lambda_k(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|D\varphi^t(x)v|, \\
&v \in V_k(x) \setminus V_{k+1}(x)
\end{aligned} \tag{3.126}$$

式(3.126)同样可以作为Lyapunov指数的定义，而且当 $n=1$ 时，这就是一维映射的情形.

注意到对 $\varepsilon>0$ 充分小，$v_1\in V_1(x)\setminus V_2(x)$，其中 $x\in R^n$，则

$$|\varphi^t(x+\varepsilon v_1)-\varphi^t(x)|\approx|D\varphi^t(x)\varepsilon v_1|\approx e^{\lambda_1(x)t}\varepsilon|v_1| \tag{3.127}$$

从而我们有

定理3.15 若对于 $\varphi^t:R^n\to R^n$ 存在集合 $A\subset R^n$，使得当 $x\in A$ 时 x 的第一个Lyapunov指数 $\lambda_1(x)>0$ 时，则动力系统 φ^t 在 A 上关于初值有敏感的依赖性，即 φ^t 在 A 上是混沌的. 若还假设 $L^n(A)>0$，则 φ^t 是混沌的动力系统.

由此可见，要判定系统是否混沌，我们只需了解 $\varphi^t:R^n\to R^n$ 的第一个Lyapunov指数就可以了. 而 φ^t 有 n 个Lyapunov指数，这意味着这 n 个Lyapunov指数必将提供给我们比 φ^t 是否存在混沌更深入的信息. 所以，我们将进一步了解Lyapunov指数的几何意义.

对于 $\varphi^t:R^n\to R^n$，$x\in R^n$ 及其Lyapunov指数 $\lambda_1(x)$，$\lambda_2(x),\cdots,\lambda_n(x)$ 和所对应的 n 个特征向量 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$，我们先取以 R^n 中四个点 $x,x+\varepsilon u_1(x),x+\varepsilon u_2(x),x+\varepsilon u_3(x)$ 为顶点的平行六面体为 W，这里 $\varepsilon>0$ 是无穷小量，则 W 的体积

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(W)&=|((\varepsilon u_1+x)-x)\wedge((x+\varepsilon u_2)-x)\wedge\\&\qquad((x+\varepsilon u_3)-x)|\\&=|\varepsilon u_1\wedge\varepsilon u_2\wedge\varepsilon u_3|\end{aligned} \tag{3.128}$$

这里"∧"为 R^n 中向量的外积. 在 φ^t 的作用下，W 变成 $\varphi^t(W)$，它可视为以 $\varphi^t(x),\varphi^t(x+\varepsilon u_1),\varphi^t((x+\varepsilon u_2),\varphi^t(x+\varepsilon u_3)$ 为顶点的扭曲后的六面体，因此 $\varphi^t(W)$ 的体积

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\varphi^t(W)) &\approx |(\varphi^t(x+\varepsilon u_1)-\varphi^t(x))\wedge(\varphi^t(x+\varepsilon u_2)\\&\quad-\varphi^t(x))\wedge(\varphi^t(x+\varepsilon u_3)-\varphi^t(x))|\\&\approx |D\varphi^t(x)\varepsilon u_1\wedge D\varphi^t(x)\varepsilon u_2\wedge D\varphi^t(x)\varepsilon u_3|\\&\approx e^{(\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\lambda_3(x))t}|\varepsilon u_1\wedge\varepsilon u_2\wedge\varepsilon u_3|\end{aligned}\tag{3.129}$$

由此得

$$\frac{1}{t}\ln\frac{\mathrm{Vol}(\varphi^t(W))}{\mathrm{Vol}(W)}\approx\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\lambda_3(x)\tag{3.130}$$

当然,若 $W_k(x,\varepsilon)$ 是由以 $k+1$ 个向量 $x,x+\varepsilon u_1,\cdots,x+\varepsilon u_k$ 为顶点的 k 维平行方体,则

$$\frac{1}{t}\ln\frac{\mathrm{Vol}(\varphi^t(W_k(x,\varepsilon)))}{\mathrm{Vol}(W_k(x,\varepsilon))}\approx\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\cdots+\lambda_k(x)\tag{3.131}$$

特别地,由于

$$\frac{\mathrm{Vol}(\varphi^t(W_n(x,\varepsilon)))}{\mathrm{Vol}(W_n(x,\varepsilon))}\longrightarrow|\det(\varphi^t(x))|$$

(当 $\varepsilon\to 0$ 时).由此我们得到 (3.132)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|\det(\varphi^t(x))|=\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\cdots+\lambda_n(x)\tag{3.133}$$

由此可见,若 $\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\cdots+\lambda_n(x)<0$ 几乎处处成立,也就是说,动力系统是耗散的.耗散的系统常有吸引集,在该集上,其 n 个 Lyapunov 指数之和小于零.这也就是此集是 L^n 零测集,且其 Hausdorff 维数应小于 n,这很容易使得我们把 Lyapunov 指数和 Hausdorff 维数联系起来.

我们有下面关于不变集之 Hansdorff 维数的估计定理,也称之

为 Kaplan - Yorke 型的维数定理，因为这是著名的 Kaplan - Yorke[1978] 猜测的组成部分.

定理 3.16 设 $\varphi^t : R^n \to R^n$ 是连续可微的动力系统(也可以离散) 设 A 是 φ^t 的不变集，即 $\varphi^t A = A, \forall t$.

若 $\forall x \in A$, φ^t 关于 x 点的 Lyapunov 指数 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_k(x)$ 都存在，则 A 的 Hausdorff 维数有如下的估计式

$$d_H(A) \leqslant k + \sup_{x \in A} \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \cdots + \lambda_k(x)}{|\lambda_{k+1}(x)|} \tag{3.134}$$

其中整数 $k < n$ 适合条件

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \cdots + \lambda_k(x) > 0$$

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \cdots + \lambda_{k+1}(x) < 0$$

$$\forall x \in A$$

关于不变集 A 的上盒维数也有类似的估计式，这里就不叙述了. 上面的定理证明是相当困难的，读者可以在 Temam[1988] 和 Eden - Foias - Temam[1991] 中找到.

在本章的前几节中，我们曾给出过一些非常简单的自相似的分形的 Hausdorff 维数等，这里所遇到的分形集都是非常复杂的集合，已完全没有自相似性可言. 下面作为例子，我们利用定理 3.16 来给出 Henon 奇怪吸引子和 Lorenz 奇怪吸引子的 Hausdorff 维数估计

例 8 考察 Henon 映射

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y - 1.4x^2 \\ 0.3x \end{pmatrix}$$

的 Hausdorff 估计. 由于

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -2.8x & 1 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(Df(x,y)) = -0.3$$

由(3.133)式得

$$\lambda_1(\boldsymbol{u}) + \lambda_2(\boldsymbol{u}) = \ln 0.3, \forall \boldsymbol{u} = (x,y) \in A$$

其中 A 是 Henon 奇怪吸引子,数值计算表明(见 Holdon[1986]),λ_1 在 A 上为 $\lambda_1(\boldsymbol{u}) = 0.4\ln 2$,从而

$$\lambda_2 = \ln 0.3 - 0.4\ln 2$$

由定理 3.16 得

$$d_H(A) \leqslant 1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_2} = 1 + \frac{0.4\ln 2}{-\ln 0.3 + 0.4\ln 2}$$

$$= 1 + \frac{0.4}{-\log_2 0.3 + 0.4} = 1 + \frac{0.4}{1.6} = 1.25$$

即 $d_H(A) \leqslant 1.25$.

例 9 估计 Lorenz 奇怪吸引子的 Hausdorff 维数.

设 $$\boldsymbol{u} = (x,y,z)$$

$$f(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 10/3$$

Lorenz 动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 的轨道 $\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{u}_0)$ 也就是方程

$$\dot{\boldsymbol{u}} = f(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

的解,从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{u}))$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{u}) = Df(\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{u}))D\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{u})$$

注意到

$$Df(u)=\begin{pmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ \rho-z & -1 & -x\\ y & x & -\beta\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{trace}Df(u)=-(\sigma+1+\beta)$$

和

$$D\varphi^t(u)=\mathrm{e}^{\int_0^t Df(\varphi^\tau(u))d\tau}$$

$$\det\varphi^t(u))=\mathrm{e}^{\mathrm{trace}\int_0^t Df(\varphi^\tau(u))d\tau}=\mathrm{e}^{-(\sigma+1+\beta)t}$$

由(3.133)式得

$$\lambda_1(u)+\lambda_2(u)+\lambda_3(u)=-(\sigma+1+\beta)$$

其中 A 是 φ^t 的奇怪吸引子.进一步地,借助于一些技巧得

$$\lambda_1(u)+\lambda_2(u)\leqslant 5.2378,\ \forall\, u\in A$$

由定理 3.16 得

$$d_H(A)\leqslant 2+\sup_{u\in A}\frac{\lambda_1(u)+\lambda_2(u)}{-\lambda_3(u)}$$

$$=2+\frac{5.2378}{5.2378+41/3}\leqslant 2.409$$

这个估计式来自于Eden-Foias-Temam[1991]这也是目前关于 Lorenz 奇怪吸引子的 Hausdorff 维数的最好结果.值得注意的是,在 Procacia 等[1982]的著作中已得到过 Lorenz 奇怪吸引子的信息维数为 2.05,但这两种估计是无法比较其优劣的,因为信息维数总是小于 Hausdorff 维数.

§3.4.8 什么是分形

Mandelbrot 于 1975 年首先给出了分形的定义,一个集合称之

为分形，若其 Hausdorff 维数大于其拓扑维数. 因此 Cantor 三分集，Koch 曲线和 Serpinski 垫都是分形，但这个定义却排除了其他许多明显是分形的集合，如复平面的 Mandelbrot 集 $M = \{c \in c \mid$ 点到 $\{f_c^k(0)\}$ 有界$\}$，其中 $f_c(z) = z^2 + c$，关于 M 的进一步放大的各种图可见 Gleick[1988]，实际上，把 M 的边界点邻近放大足够倍数就可看见一个与 M 本身完全一样的集合. 所以 M 当然是分形，但 M 的 Hausdorff 维数与其拓扑维数是相等的.

在 Feder[1988] 中，曾有这样的定义：一个集合称之为分形，若其整体与其组成部分具有某种自相似性，Feder[1988] 指出这个定义是在与 Mandelbrot 的私人通讯中得知的. 值得注意的是，直线段、正方形、正方体都是严格自相似集，按照以上定义，它们都应是分形，因为尽管这里的“某种相似性”可以多方面去理解，但它至少应包含严格的自相似性，所以，这第二种定义也是不合理的，而且在近年来的各种文献中，特别是近两年出现的大量的分形的论著中，人们都几乎没有采用这第二种定义，不过人们所最关心的分形，或者说狭义的分形，仍然是指第一个定义意义下的分形.

现在人们已逐渐发现，给分形下一个精确的数学定义是不现实的，因为这种定义不是排除掉一些有趣的情形，就是把一些明显为非分形的也包含了进来，事实上，在分形和整形间并没有那种明显的界限，所以我们还是赞同 Falconer[1990] 所持的观点，即给分形下一个如下不明确的定义：一个集合 A 称之为分形，若 A 满足下列中的若干条性质：

i) A 具有精细的结构，即有任意小比例的细节.

ii) A 是如此的不规则，以至它的整体和局部都不能用传统的几何语言来描述.

iii) A 通常有某种自相似的形式，可能是近似的或是统计的.

iv) A 的某种分形维数大于其拓扑维数.

v) 在大多数令人感兴趣的情形下，A 以非常简单的方式定义，或是由迭代产生.

值得注意的是，自然界中的分形都是在一定意义下而言的. 它

有别于数学中的分形，就如在自然界中不可能有真正的直线和圆一样，世界上也不可能有绝对的分形.

以上所讲的只是分形理论中最基本的部分.近来，分形理论发展迅速，许多领域都在其中找到了立足点，关于分形与各学科的关系可见 Mandelbrot 的几本著名的书以及论文集.

§3.5 分形理论的发展——广义维数和广延维数

分形维数是定量地表示自相似的随机形状和现象的最基本的量，但是仅利用分形维数这样一个数字去描述所有的复杂形状和现象，无论如何也是不可能的，因此就产生了扩展分形维数的必要性.扩展分形维数的考虑方法大致有两种：一种是不要把分形维数看作是一个常数，而使其能有赖于观测的尺度，即使在自相似性不成立的那种范围内也能使用；而另一种考虑方法是，在自相似性成立的情况下，为了获得只用分形维数不能描述的信息，要重新引进另外的量.本节讨论 q 次的信息量维数 D_q 和广延维数 D，D_q 又称之为广义维数(generalized dimension)，或扩展维数或 Renyi 维数，Renyi 于 1970 年首先用它描述奇怪吸引子的几何和几率特征.

对于现实中存在的物体，即使说它具有分形的性质，但在它成立的尺度内，必然存在上限和下限，只有在某种被限制的观测尺度的范围内，自相似性才成立，分形维数所具有的意义当然也仅在这个范围内.对此有一种设想是，要使分形维数也能适用于自相似性不成立的那些范围.分形维数的倡导者 Mandelbrot 本人也以“有效维数”这个名词，暗示了这种扩展的可能性.下面就来说明这种考虑方法.首先来考虑一下把线揉成一个球的情况，这个球从远处看上去虽是零维的(点)，但到了近处却成为三维的(球).如再用放大镜看这个球，就成为一维的(线)；把球再进一步放大，看上去就像圆柱状的三维构造.从这个例子也可看出，观察某物体时，能把它看成几维这一问题原来是有赖于观测的尺度.关于依赖于观测尺度的维数，已由少数研究人员对它进行过研究，并且对各种例子作

了定量的评价，下面将介绍其中的一个例子.

分形维数最基本的定义可根据观测的尺度 r 和在此时被观测到的“r”球内点的个数 $N(r)$ 作如下考虑：

$$D = -\frac{\log N(r)}{\log r} \tag{3.135}$$

一般来说，在函数 $N(r)$ 不是非常特殊的函数型(幂函数)情况下，由于该公式的右边不能成为常数，所以不能定义通常的分形维数.因此，考虑把式(3.135)扩展，以便使 $N(r)$ 在非幂型的情况下也能定义分形维数.当把 r 和 $N(r)$ 标绘在双对数图纸上时，式(3.135)中的 D 就表示其斜率，那将是自然的.

$$D = -\frac{\mathrm{d}\log N(r)}{\mathrm{d}\log r} \tag{3.136}$$

这样被扩展了的分形维数，只要 $N(r)$ 是平滑的函数，在任何时候是确定的，所以就不会再在上限或下限问题上操心.当然 $N(r)$ 如为幂型就与普通的分形维数相一致.如反过来求解式(3.136)，就可得到下式

$$N(R) = N(r)\cdot\exp\left(-\int_r^R \frac{D(s)}{s}\mathrm{d}s\right) \tag{3.137}$$

该公式表示以什么样的关系把两个尺度 R 和 r 的观测值 $N(R)$ 和 $N(r)$ 与分形维数联系起来.

那么，现在让我们来看看这种广义分形维数是怎样应用到实际中去的.现在要考虑的是平均行程是有限的随机行走，粒子的平均行程是指粒子从一个碰撞走到下一个碰撞之间的距离的平均值，对气体和金属粒子来说，在0℃和1大气压下约为 10^{-7}m.前面虽然说过数学上的布朗运动轨迹的分形维数是2，但平均行程为有限时的分形维数有可能依赖于观测尺度.如果用比平均自由行程更短的尺度去观测，粒子的轨迹看上去就应该像直线.反之，如果用非常大的尺度去观测，就应该和通常的布朗运动难以区别开来.对一维空间中平均自由行程为有限的随机行走，利用重正化群

的方法,可示得到下面的严密解:

$$D(r) = 2 - \frac{1}{1+\frac{r}{r_0}} \tag{3.138}$$

其中 r_0 是与平均行程成比例的参数.如 $D(r)$ 的图(图 3.31)所阐明的那样,$D(0) = 1$ 和 $D(\infty) = 2$.由此可知,前面所说的直观的预想是正确的(这个 $D(r)$ 值虽然比空间的维数 $d = 1$ 要大,但这是因为这个量不是 Hausdorff 维数,而是所谓的潜在维数 D^*).

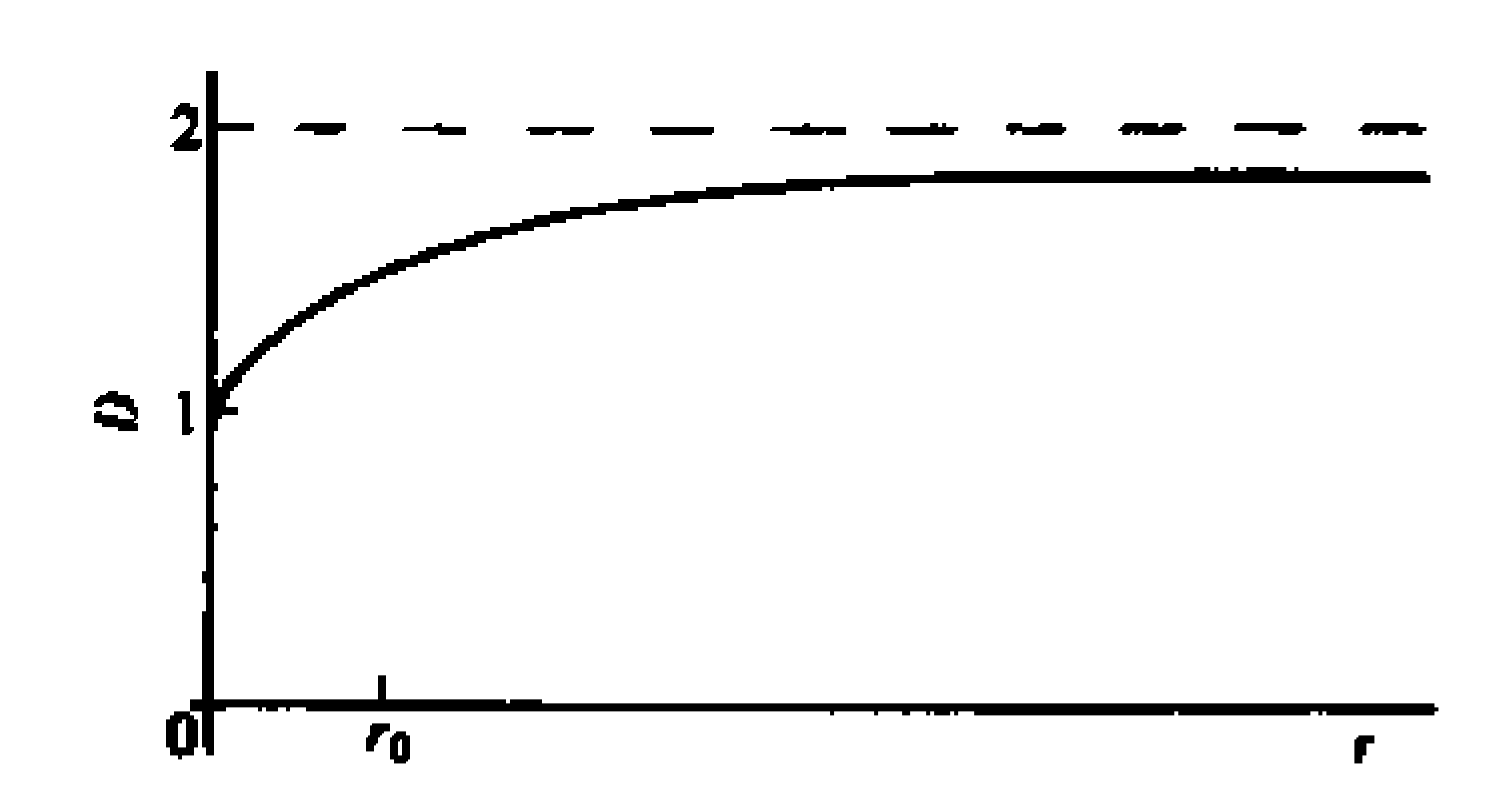


图 3.31　平均自由行程为有限的随机行走的分形维数
r 为观测尺度,D 为分形维数,r_0 为 $D = \frac{3}{2}$ 时的尺度

最近已确认,式(3.138)虽然是相对于一维空间中随机行走的公式,但对三维空间中的随机行走也非常符合.根据式(3.138),可用如下公式给出用单位长度 r 测出的随机行走轨迹的长度:

$$L(r) \propto \frac{1}{1+\frac{r}{r_0}} \tag{3.139}$$

图 3.32 中的点是假设气体原子为刚体球来模拟随机行走的轨迹并测定的 $L(r)$ 的平均值,实线是由式(3.139)给出的曲线,从图 3.32 中看出,在二位数以上的区域内,点与实线非常一致.即使对于实际溶液中微粒的随机行走,式(3.139)也能给出好的结果.对于平均自由行程是有限的并且用通常分形维数不能定义的随机行走,依赖于观测尺度的广义分形维数也是适用的,这对于描述实际的现象是非常有用的.

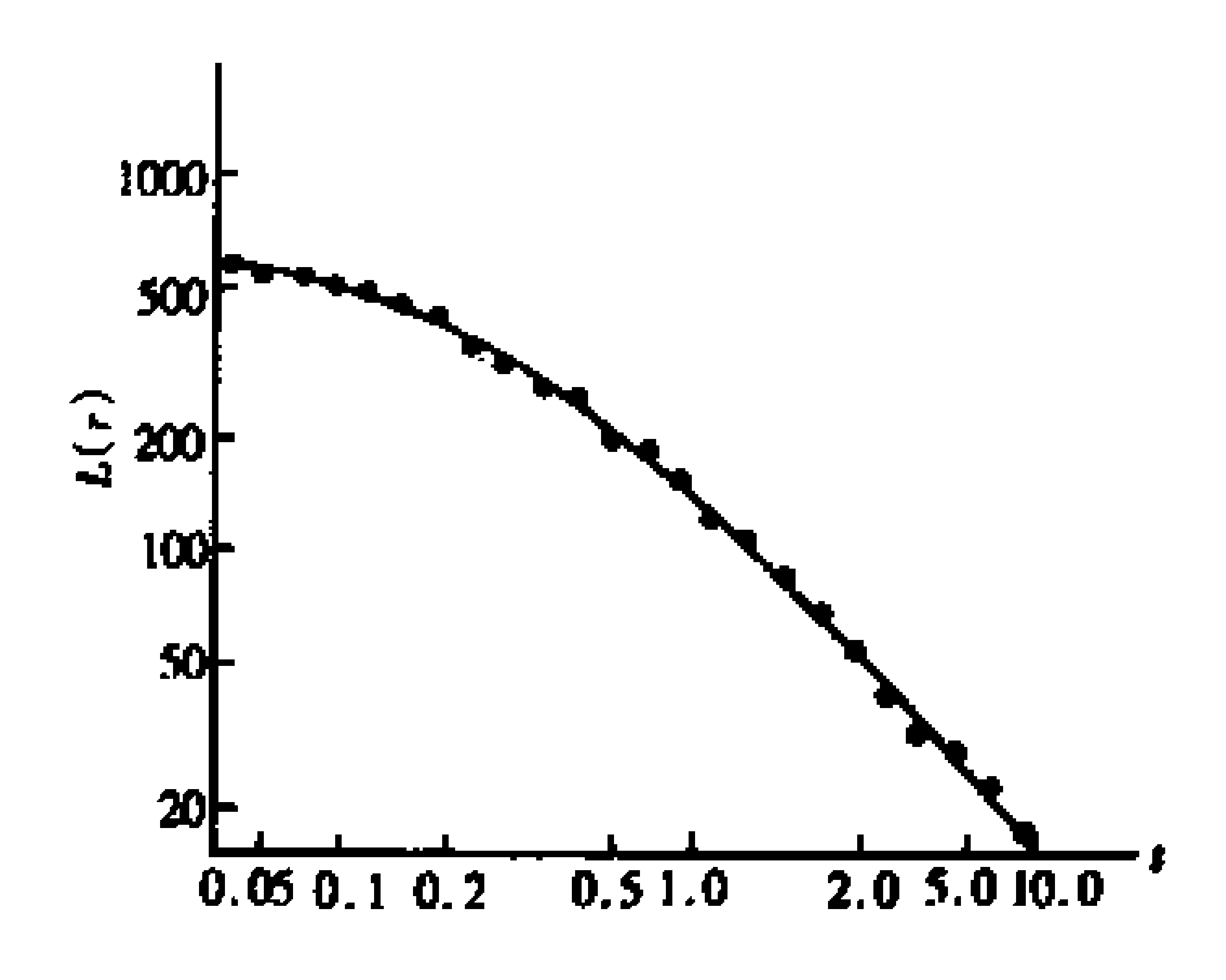


图 3.32　分子的随机行走轨迹的长度 $L(r)$，模拟值(·)和理论值(—)

另外，扩展分形维数的另一个观点，是想用引进高次的分形维数来补充只用分形维数表现不了的信息. 比如，即使知道某个集合的分形维数是 1.3，但仅靠这一点就连这个集合是分散点的集合呢，还是由褶皱不堪的线组成的都不得而知. 有关构成这个集合要素的信息可由拓扑维数 D_T 给出，此维数是比分形维数更基本的量，就如在 3.3 节中所说明的那样，它在取整数值而不作位相变换的基础上是不变的. 关于位相是指给定集合 X 和 Y 时，连续函数 $f: X \to Y$ 是单值对应，逆映射 $f^{-1}: X \to Y$ 也是连续时，X 和 Y 的位相相同. 应该可以不相交也不相切连续地从 X 变形到 Y. 通过把空间适当地放大或缩小，甚至扭转，可转换成孤立点那样的集合的拓扑维数是 0，而可转换成直线那样的集合的拓扑维数是 1. Cantor 集合和 Koch 曲线的拓扑维数分别为 0 和 1 就很明显了. 关于 Sierpinski 集的情况，虽然还不大清楚，但已知为 $D_T = 1$. 分形维数与拓扑维数相比一般要大些或者相等. Mandelbrot 以前把分形定义为 Hausdorff 维数比拓扑维数大($D_H > D_T$)，其含义也是很深的.

在前面已引进的 Hausdorff 维数 D_H 和容量维数 D_C 以及信息量维数 D_q，它们之间是用不等号联系起来的. 如果从分维的"整齐性"出发，希望能用等号把这些量联系起来，但一旦对集合作更详

细分类，就会发现这并不是好的想法.这是因为即使当集合具有同一 Hausdorff 维数，它们的信息量维数也可能不同，而我们可以根据信息量维数，对这些集合进行分类.从这一观点出发，能取不同值的高次分形维数越多，就越便于将相似的集合详细区分开来.下面介绍一个定义无限次的高次分形维数的方法.

假定在 d 维空间中，点呈概率分布.就如定义信息量维数那样，假定把空间分割成边长为 ε 的 d 维立方体，并且假定点进入每个立方体内的概率为 p_i.对任意的正数 $q(\neq 1)$，利用下式定义次数 q 的信息量 $I_q(\varepsilon)$ 如下：

$$I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q}\ln\sum_i p_i^q \tag{3.140}$$

对于这个量，当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$D_q = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_q(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{3.141}$$

现把上式决定的 D_q 称为 q 次的信息量维数.这个量是把信息量维数广义化后的量，这是因为如果考虑 $q \to 1$ 极限时，根据 $p_i^q = \exp(q\ln p_i)$，可以得到

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}\frac{1}{1-q}\ln\sum_i p_i^q &= \lim_{\delta\to 0}\left\{-\frac{1}{\delta}\ln\left(1+\delta\sum_i p_i\ln p_i\right)\right\}\\ &= -\sum_i p_i\ln p_i\end{aligned} \tag{3.142}$$

$I_1(\varepsilon)$ 与普通的信息量一致.另外，不仅如此，当 $q \to +0$ 时，这个量与容量维数一致.这是因为

$$\lim_{q\to +0} p_i^q = \begin{cases}0, & p_i = 0\\ 1, & p_i \neq 0\end{cases} \tag{3.143}$$

所以，$\sum p_i^0$ 只能等于包含点的小立方体的数目 $N(\varepsilon)$.

像上面那样，当 $q = 0$ 时，D_q 为容量维数.当 $q = 1$ 时，D_q 为

信息量维数.而当 $q \geqslant 2$ 且为整数时,如果考虑的 M 个点 $\{x_i\}$ 中相互之间距离不大于 ε 这样的 q 个点的组合 $(x_{i1} x_{i2}, \cdots, x_{iq})$,假定这种点的组合数目为 $N_q(\varepsilon)$,并且如下定义被称为次数 q 的相关积分的量:

$$C_q(\varepsilon) = \lim_{M \to \infty} M^{-q} \cdot N_q(\varepsilon) \tag{3.144}$$

这样,因为 $C_q(\varepsilon) \simeq \exp\{(1-q) I_q(\varepsilon)\}$ 的关系成立,再假设有

$$C_q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\nu_q} \tag{3.145}$$

则

$$\nu_q = (q-1) \cdot D_q \tag{3.146}$$

公式中的指数 ν_q 被称为次数 q 的相关指数.特别是在计算混沌中奇怪吸引子的分形维数时,$\nu_2(= D_2)$ 是经常使用的量.距离不足 ε 的点的总数可以定量地表示随 ε 变化的比例.

q 次的信息量维数 D_q 有两个重要的性质,一个是 q 越大而 D 越小,即通常满足下列不等式,即

$$D_q \geqslant D_{q'}, (q < q') \tag{3.147}$$

根据这个不等式,特别是当 $q = 1,2,3$ 时,下列关系成立,即

$$D_c \geqslant D_i \geqslant \nu_2 \tag{3.148}$$

一般地,Hausdorff 维数 D_H 因满足 $D_c \geqslant D_H \geqslant D_i$,所以 q 次的相关指数 ν_q 一般比 D_H 小或者相等(当点在欧几里得空间 R^d 中均匀地分布时,对所有的 $q \geqslant 0$,为 $D_q = d$).

另一个重要的性质是,当变形是根据可微分的映射产生时,则 D_q 是不变的.如果空间急剧变形达到不可能微分的程度,那么,除了刚才介绍的拓扑维数 D_T 外,其余的量就完全改变了.但是,当空间圆滑地歪扭得不太厉害时,D_q 是不变的.

到目前为止,研究欧几里得空间中集合的维数时,虽然都是以

通常的距离 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 为基础，但通常的距离并不一定对所有的问题都合适．在这种情况下，我们有必要引进一种新的距离，作为一个连结集合中两点间的距离，它不是通常的距离，把它看成为连结两点的边数的最小值而更具有物理学的意义．这是因为被放置在某格点上的电子只能在被连结的边上移动，因此，连结两点的边数越少，就越能飞快地在这两点之间移动．当考虑这样的问题时，利用连结的边数 n，从某点可到达的格子点的数目 $N(n)$ 就是最基本的量．当 $N(n)$ 以 n 的取幂增加时，连结格子点的广延是分形的．这时，把由下式定义的 $\hat{D}$ 称为广延维数

$$N(n) \propto n^{AK \hat{D}} \tag{3.149}$$

像这样在连结的格子点上定义的维数，当然与它填进的空间无关．所以，在平面上描绘的图形的维数超过 2，也是完全可能的．比如，在图3.33 中所表示的被称为 Cayley 树图形的情况下，如果假定 $n \to \infty$ 时，就可确定 $\hat{D} = \infty$．在处理格子体系问题时，广延维数往往具有重要意义．

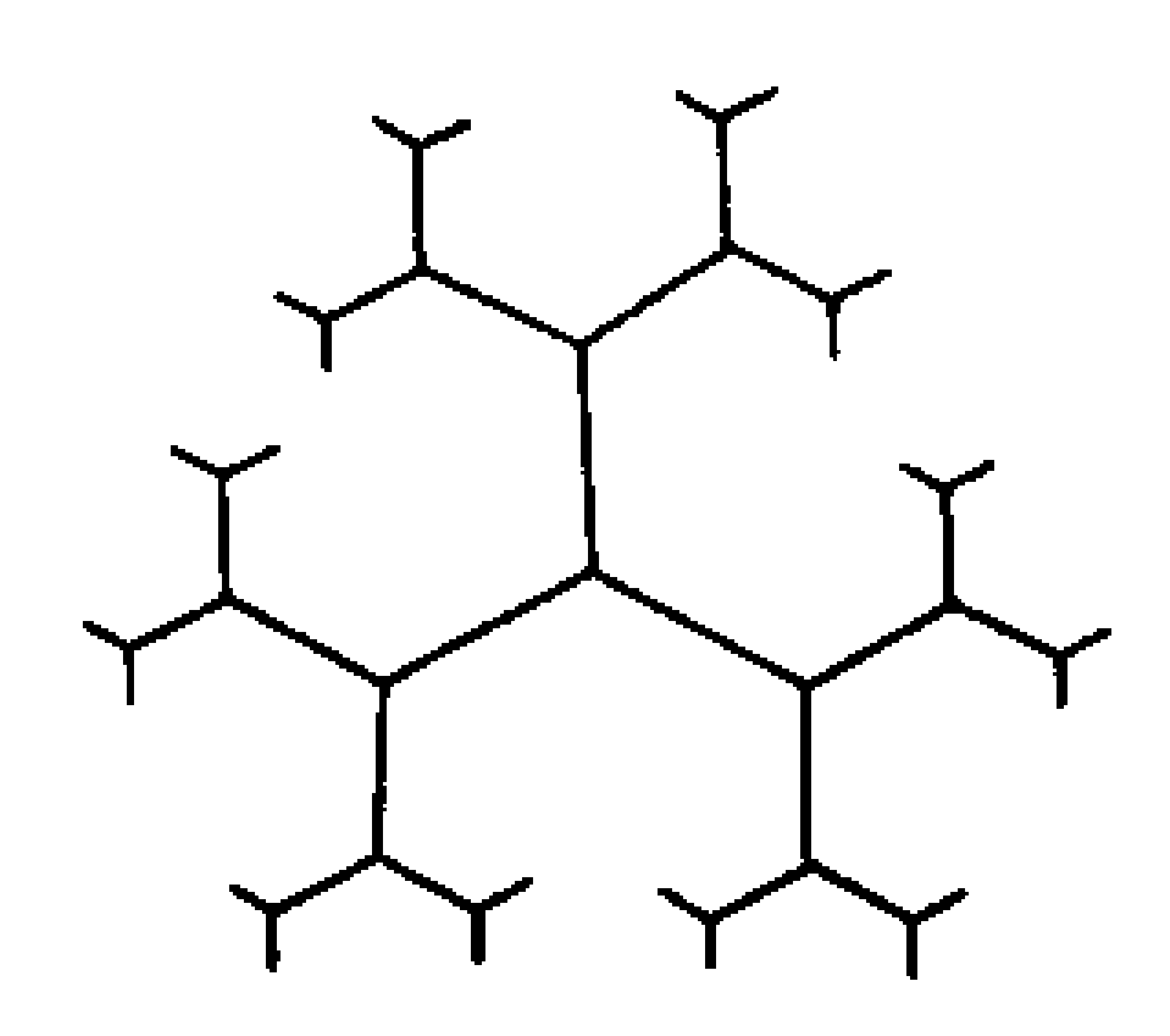


图 3.33　Cayley 树 —— 实际的分支无限地继续不断

在本章前几节中介绍了许多不同定义的维数，有时常把它们笼统地称之为分形维数．下面简略地说明一下这些维数的数值之间的

关系.除了谱维数和广延维数外,其他所有能取非整数的维数都大于 D_T(拓扑维数)而小于 d(欧几里得维数):

$$D_T \leqslant D, D_s, D_H, D_c, D_i, D_q, D_l \leqslant d \qquad (3.150)$$

式中 D 代表分形维数,它没有严格的定义,是能取非整数值维数的代表,常把它与 Hausdorff 维数或容量维数同样看待.对于填满欧几里得空间那样的集合,因为 $D_T = d$,所以这些维数都取同一数值.另外,下列不等式成立

$$D_c \geqslant D_H \geqslant D_i \geqslant D_q \qquad (q > 1) \qquad (3.151)$$

$$D_s \geqslant D_H \qquad (3.152)$$

式中(3.152)的 D_s 和 D_H 不相等是指考虑实数轴上的有理数的集合的时候,有理数的集合是自相似的,而且 $D_s = 1$.但因为有理数是可数集合,所以就有 $D_H = 0$.对此,有理数的容量维数 $D_c = 0$.对此,有理数的容量维数 $D_c = 1$.一般地定义 D_l 时,预计有下列关系

$$D_s = D_c \qquad (3.153)$$

那么,如果把所考虑的集合的闭包(指包含 A 的所有闭集合的全集)作为对象,则下式成立

$$D_s = D_c = D_H \qquad (3.154)$$

当处理实际存在的物体时,因为只考虑闭集合就足够了,所以可认为式(3.154)一般是成立的.因为广延维数 $\hat{D}$ 与被填进的空间完全无关,而仅取决于点的连接,所以,一般与其他维数无关.但是,如果把点只限于 R^d 中的格子点,那么下列关系成立

$$D_2 \geqslant \hat{D} \qquad (3.155)$$

这是因为不管哪一个量都是由在某距离以内点的数目来决定的,所以一般的距离总是比用边的数目定义的距离要小.

最后再看一下潜在维数 D^*. 如果空间维数是二维以上，那么布朗运动轨迹的 Hausdorff 维数就成为 $D_H = 2$，这是大家都知道的，但空间维数在 2 以下也把其中的轨迹维数认定为 2 时，一般就不容易为人们所接受，因此，引进一个新的潜在维数 D^*，使它成为 $D^* = 2$ 就便利多了. 潜在维数可取负值，也可取比空间维数 d 大的值，它与 Hausdorff 维数之间的关系如下

$$D_H = \begin{cases} 0 & (D^* \leqslant 0) \\ D^* & (0 < D^* < d) \\ d & (D^* \geqslant d) \end{cases} \tag{3.156}$$

§3.6 分形理论的发展 —— 多重分形

分形概念揭示了自然界中一大类无规形体的内在规律性 —— 标度不变性. 这些形体包括物理系统的混沌和由非线性动力学控制的海岸线、闪电、云等自然景物. 标度不变性是指这些几何形体在动力学演化过程中或在某一时刻，在一定的标度尺度范围内，其相应的测度不随尺度的改变而变化. 人们通过对各类分形结构的深入研究，已经分别定义了各种分形维数. 分形维数是在分形意义上由标度关系得出的一个定量的数值，但在事实上，它除了标志着该结构的自相似构造规律外，并不能完全揭示出产生相应结构的动力学过程. 近年来的研究结果表明，就分形几何学而言，实际上并不像研究初期所想象的那样，存在着一个普适的分形维数. 人们发现，仅用一个分形维数来描述经过复杂的非线性动力学演化过程而形成的结构显然是不够的. 而且在各个复杂形体的形成过程中，其局域条件是十分重要的，不同的局域条件或者由涨落引起的参量的波动是造成这类形体的形态各异的主要原因之一. 众所周知，在大多数的物理现象中，系统的行为主要取决于某个物理参量(通常是标量，如概率、电位差、压力、浓度等) 的空间分布. 因

此，如果考虑分形体的物理本质，在与分形生长有关的现象中也应存在着类似的某个量的空间分布．为了进一步了解在分形体形成过程中局域条件的作用，人们提出了多重分形（multifractal approach），也称为分形测度（fractal measure），它所讨论的主要是某个参量的概率分布．

多重分形也被译为“多标度分形”，“复分形”等，它被用来表示仅用一个取决于整体的特征度指数（即分形维数）所不能完全描述的奇异概率分布的形式，或者说用一个谱函数来描述分形体不同层次的生长特征，从系统的局部出发来研究其最终的整体特征．Mandelbrot 在 1974 年研究流体湍流时，首先观察到了这种多重标度特性，此后，Grassberger、Hentschel 和 Procaccia 在研究奇异吸引子时又发展了这一概念，并给出了现在通常使用的数学公式．而把这一概念用于实验观测结构的分析是 Frisch、Parisi 和 Benzi 等在 1985 年左右完成的．Halsey 等又较为系统地将这一理论用于研究包括有限扩散凝聚（DLA）集团内的分形生长．

多重分形所涉及的问题是某个参量的概率分布，这点和统计物理的正则分布（具有确定的粒子数、体积和温度的系统处在某微观状态上的概率分布）是类似的．据此，可把多重分形参量与热力学和统计物理有关参量进行类比，从而提供研究多重分形的一种较有效的方法．1986 年以来，有关多重分形理论及其应用的报道渐多，并建立了多重分形的一些热力学公式，但未见其参量与热力学和统计物理参量的对应关系及有关参量物理意义的报道．康承华对此进行了较系统的全面的类比，找出了它们间的对应关系，并阐明了它们的物理意义．

（1）描述多重分形的参量

多重分形描述的是分形概何体在生长过程中的不同层次和特征．现把所研究的对象分为 N 个小区域，设第 i 个小区域线度大小为 L_i，分形体生长界面在该小区域的生长概率为 P_i，不同小区域生长概率不同，可用不同标度指数 a_i 来表征．

$$P_i = L_i^{a_i} \qquad i = 1,2,3,\cdots,N \tag{3.157}$$

若线度 L_i 趋于零，则式(3.157)可写为

$$a = \lim_{L\to 0} \frac{\ln P_i}{\ln L_i} \tag{3.158}$$

若(3.158)表明了 a_i 为分形体某小区域的分维，称为局部分维.其值大小反映了该小区域生长概率的大小，若实验测出 P_i 即可求出 a_i.

多重分形用 a_i 表示分形体小区域的分维，由于小区域数目很大，于是可得一个由不同 a_i 所组成的无穷序列构成的谱并用 $f(a)$ 表示之. $f(a)$ 和 a 是描述多重分形的一套参量. $f(a)$ 又被称为奇异谱.我们也可从信息论的角度选择另一套描述多重分形的参量.

把式(3.157)两边各自乘 q 次方并取和得

$$\sum_i^N P_i^q = \sum_i^N (L_i)^{a_i q} = X(q) \tag{3.159}$$

q 次信息维 D_q 的定义为

$$D_q = \lim_{L\to 0} \frac{1}{q-1} \cdot \frac{\ln X(q)}{\ln L} = D(q) \tag{3.160}$$

q 和 D_q 就是描述多重分形的另一套参量，这在 §3.5 节中已经讨论过了.这两套参量间的联系为 Legendre 变换

$$D_q = \frac{1}{q-1}[qa - f(a)] \tag{3.161}$$

或

$$f(a) = qa - \tau(q) \tag{3.162}$$

其中 $\tau(q) = (q-1)D_q$. 由式(3.161)知，若已知 a 及其谱 $f(a)$，则可求出 D_q. 由式(3.159)与(3.160)可见，若实验测出 P_i 也可求得 D_q. 若求得 D_q，则 a 可由下式求出

$$a(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\tau(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}[(q-1)D_q] \tag{3.163}$$

再利用式(3.161)可求出 $f(a)$.

式(3.161)和(3.163)是研究多重分形很有用的公式.

(2) 多重分维和广义熵函数

在统计物理中,有玻耳兹曼关系

$$S = K \ln \Omega \tag{3.164}$$

式中 $K = 1.38 \times 10^{-23} J/K$,称为玻耳兹曼常数,$\Omega$ 称为系统的微观状态数.

1988年柯摩托(Kohmoto)引入了广义熵函数 $Q(\varepsilon, a)$,其定义为

$$Q(\varepsilon, a) = \frac{1}{n} \ln \Omega(\varepsilon, a) \tag{3.165}$$

式中 ε 是对应线度 L_i 的标度指数. $L_i = e^{-n\varepsilon_i}$,$\Omega(\varepsilon a) d\varepsilon da$ 是多重分形指数位于 $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ 和 $(a, a + da)$ 内填充球数. $f(a)$ 和 $Q(\varepsilon, a)$ 的联系为

$$f(a) = \lim_{L \to 0} \frac{nQ(\varepsilon, a)}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \tag{3.166}$$

式(3.166)建立了广义熵函数和多重分维 $f(a)$ 的联系.

比较式(3.165)和(3.166)可知,若 $\Omega(\varepsilon, a)$ 越大,$f(a)$ 也越大,这说明研究对象越粗糙、越复杂、越不规则、越不均匀.因此,$f(a)$ 的物理意义是研究对象粗糙程度、复杂程度、不规则程度、不均匀程度的度量.

信息维 D_i 和信息熵 S_H 的联系为

$$D_i = \lim_{L \to 0} \frac{\ln S_H / C}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \tag{3.167}$$

式中 C 为常数,L 为线度(测量码尺).

比较式(3.166)和(3.167)可知,D_i 和 $f(a)$ 对应,S_H 和 $Q(\varepsilon,$

a）相对应.信息熵 S_H 是统计物理熵 S 的推广，而统计物理熵 S 是信息熵 S_H 的特例，因此称 $Q(\varepsilon,a)$ 为广义熵函数是很合适的.

比较式(3.166)和(3.167)还可知，D_i 是 $f(a)$ 的特例.事实上，由式(3.161)可知，$q=0$ 时，$D_q=D_0=f(a)$；若 $q=1$ 时，$f(a)=a=D_1$.因此多重分维 $f(a)$ 是简单分维 D_0 和 D_1 的推广，D_0 和 D_1 是 $f(a)$ 的特例.

由式(3.166)可知，多重分形理论中的 $f(q)$ 相应"熵"的量，因为熵函数 $Q(\varepsilon,a)$ 是热力学熵（或统计物理熵）的推广.

（3）q 次信息维和广义自由能

$f(a)$ 和广义熵函数 $Q(\varepsilon,a)$ 相对应，下面将看到 q 次信息维 D_q 和广义自由能 $G(q)$ 相对应.

在统计物理中，计算配分函数是非常重要的.若已知配分函数，所有重要热力学量均可求得.正则分布的配分函数 Z 和自由能 F 的联系为

$$F=-\frac{1}{\beta\ln Z} \tag{3.168}$$

式中 $\beta=\frac{1}{KT}$（K，T 分别为玻耳兹曼常数和热力学温度）.

在多重分形理论中，定义配分函数 $X(q)=\sum_i p_i^q$，定义广义自由能 $G(q)$ 为

$$G(q)=-\frac{1}{nq}\ln X(q) \tag{3.169}$$

利用式(3.160)，(3.162)与(3.169)可得

$$\tau(q)=D_q(q-1)=\lim_{L\to 0}\frac{nqG(q)}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \tag{3.170}$$

式(3.170)表明，$\tau(q)$ 或 D_q 和广义自由能有联系.

在热力学和统计物理中最基本的热力学函数是内能 U、熵 S

以及物态方程，但引入辅助热力学函数(如焓、自由能)后，对解决某些问题尤为方便.同样，在多重分形理论中，由于 D_q 包含了分形理论所涉及的全部维数，同时由于 D_q 容易测量，若测得了 D_q 值，就可通过式(3.163)得到 $a(q)$，进而由式(3.161)得到 $f(a)$.因此多重分形理论中，某些问题使用 q 与 D_q 来描述也是方便的.

(4) 多重分形参量 a，q 和正则系统能量 ϵ_s，温度 β

在多重分形理论中，利用式(3.157)及配分函数 $X(q)$ 的定义可得

$$X(q) = \sum_i p_i^q = \sum_i \left[\left(\frac{1}{L_i} \right)^{-a_i} \right]^q \tag{3.171}$$

在统计物理中，正则分布的配分函数 Z 的定义为

$$Z = \sum_s e^{-\beta\epsilon_s} = \sum_s (e^{-\epsilon_s})^\beta \tag{3.172}$$

式中 $\beta = \dfrac{1}{KT}$，ϵ_s 为正则系统处于第 S 状态的能量.

比较式(3.171)与(3.172)可知，多重分形参量 a(标度指数)和正则系统的能量 ϵ_s 相对应，多重分形的参量 q 和正则系统的 β 相对应.对式(3.168)和(3.169)确切地说 β 应和 nq 相对应.再据式(3.164)和(3.165)，可见 n 与 $1/K$ 对应，因此 q 应和温度 T 的倒数相对应.

的确，在多重分形理论中，一维映像的内能 $U(q)$ 可表为

$$U(q) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\partial \ln Zn(q,g)}{\partial nq} \tag{3.173}$$

式中 g 为一维映像 $X_{k+1} = g(X_k)$ 的函数参量，Z_n 为配分函数.

在统计物理中，正则系统内能 $U(\beta)$ 表为

$$U(\beta) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \tag{3.174}$$

式中 $\beta = \dfrac{1}{KT}$，Z 为正则系统的配分函数.

比较式(3.173)与(3.174)，nq 确和 β 相对应.

(5) $f(a)$ 突变和一级相变(熵突变)

在热力学中，一级相变的特征是：相变时两相的化学势连续，但化学势的一阶偏导数不连续(突变)，即在某一临界温度 T_c 处，熵 S 有突变.

在多重分形理论中，所谓相变是指系统发展到一定程度后，$f(a)$ 不连续.此时有一临界值 q_c.对一维映像，在 $q_c = 1$ 处，熵 S 有突变.

在多重分形理论中，所谓相变是指系统发展到一定程度后，$f(a)$ 不连续，此时有一临界值 a_c.对一维映像，在 $q_c = 1$ 处有

$$f[a(q)] = \begin{cases} 1, & q < 1 \\ 0, & q > 1 \end{cases} \tag{3.175}$$

式(3.175)说明在 $q_c = 1$ 处，$f(a)$ 有突变，据式(3.165)说明广义熵函数 $Q(\varepsilon, a)$ 也有突变，这种情况和热力学中熵突变是类似的，这就是多重分形理论中的一级相变.

由上面的讨论可得如下三点结论：

① 多重分形理论的参量与热力学和统计物理参量有对应关系.

② 把多重分形理论与热力学和统计物理进行热力学类比，可对多重分形的参量物理意义有较深刻的理解与体会.

③ 对多重分形进行热力学类比，为进一步分析分形体的特征提供新的途径.

综上所述，多重分形描述的是一个具有标度特性的分形几何体在生长过程中不同层次的特征.每一个不同的层次用不同的参量来表示，这些不同的参量构成一个集合.为了在数学上对这样的集合在分形体上的分布进行定量描述，多重分形理论假设所讨论的对象的每一个层次都具有标度性.因此，可以将研究的对象分成不同线度的小区域并将具有生长概率的那些区域用特征标度指数 a 来表征，这样就得到了一个由不同的 a 组成的集合.

为了理解这样一个集合的物理意义，可以考虑一个在自然界

中形成的分形体的实际情况．如以海岸线为例，两段完全相同的海岸线是不存在的，因此，可以理解，在我们所选取的研究对象上的两个相同大小但不同位置的小区域中的情况是各不相同的，因而用来描述它们的参量 a 也不一样．此外，由于这样的小区域的数目通常是很大的，从而由这些 a 所组成的集合可以看作是由一个无限的序列构成的，这一个序列构成一个谱 $f(a)$，它的性质反映了所研究的问题的某种有区别的特性．

在具体研究一个分形体的生长特性时，必须将 $f(a)$ 与可观测的量相联系．对于生长现象，容易想到，生长概率或其他定义在结构上的具有概率性质的某种测度，如归一化的质量、电荷等是一个可以观测到的量，而且它也决定了所划分的小区域内的标度指数．如果将生长概率作为可观测量，但它并不能直接与 $f(a)$ 相联系，因为 $f(a)$ 只表征了 a 的奇异值所在集合的差别，因而它只与 q 次信息量维数 D_q 相联系．由式(3.159)和(3.160)可知，由实验测出生长概率 p_i，即可求得 D_q．再由式(3.163)求出 a，由式(3.161)求出 $f(a)$．

对于一个分形体的演化过程，如 DLA 生长，主要取决于其“活跃区域”，亦即其生长的前沿部分．在一个真实的生长过程中，这些活跃区域的局域条件是各不相同的．图 3.34 是 DLA 凝聚体的 D_q 曲线和 $f(a)$ 曲线．

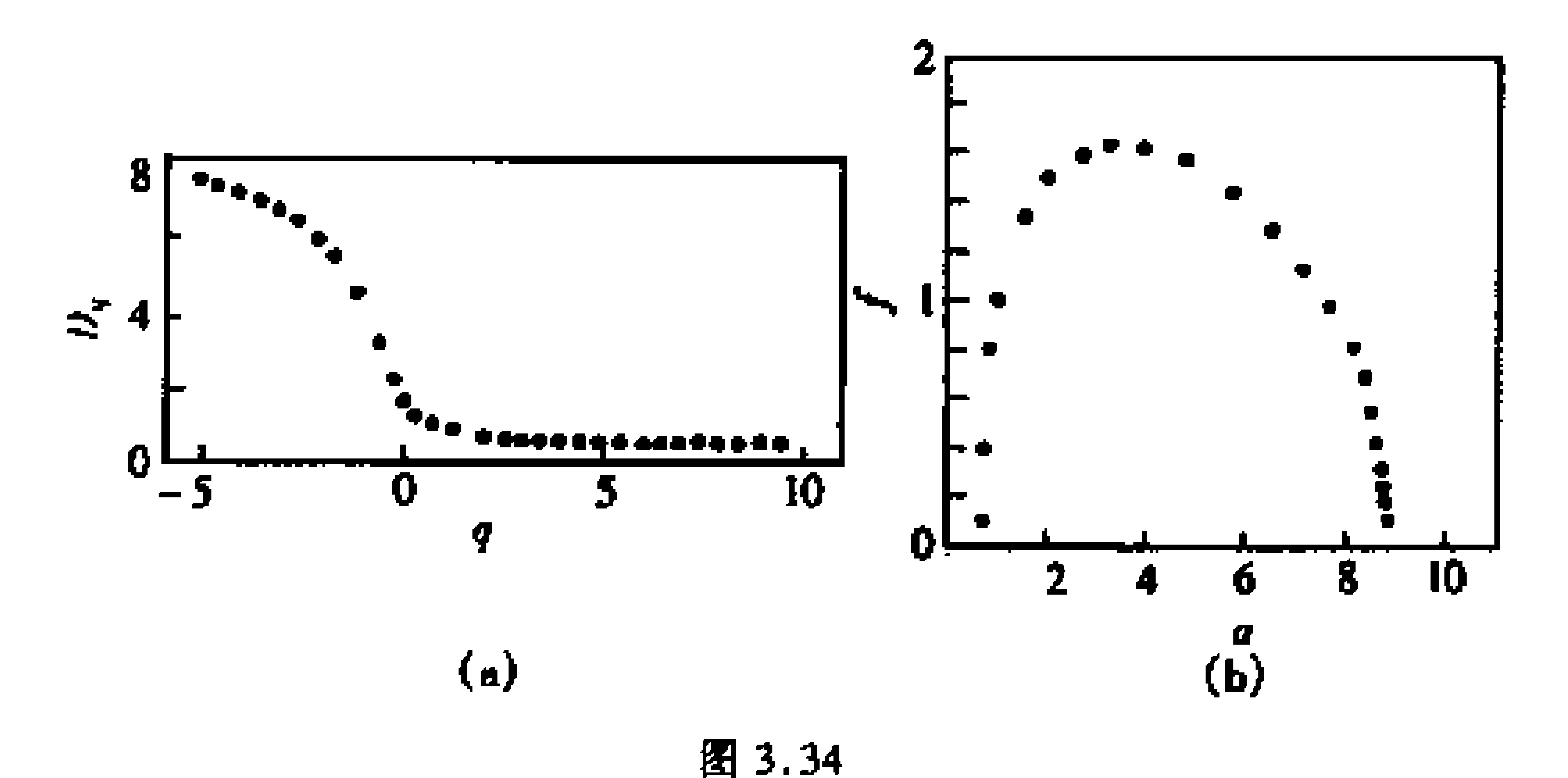


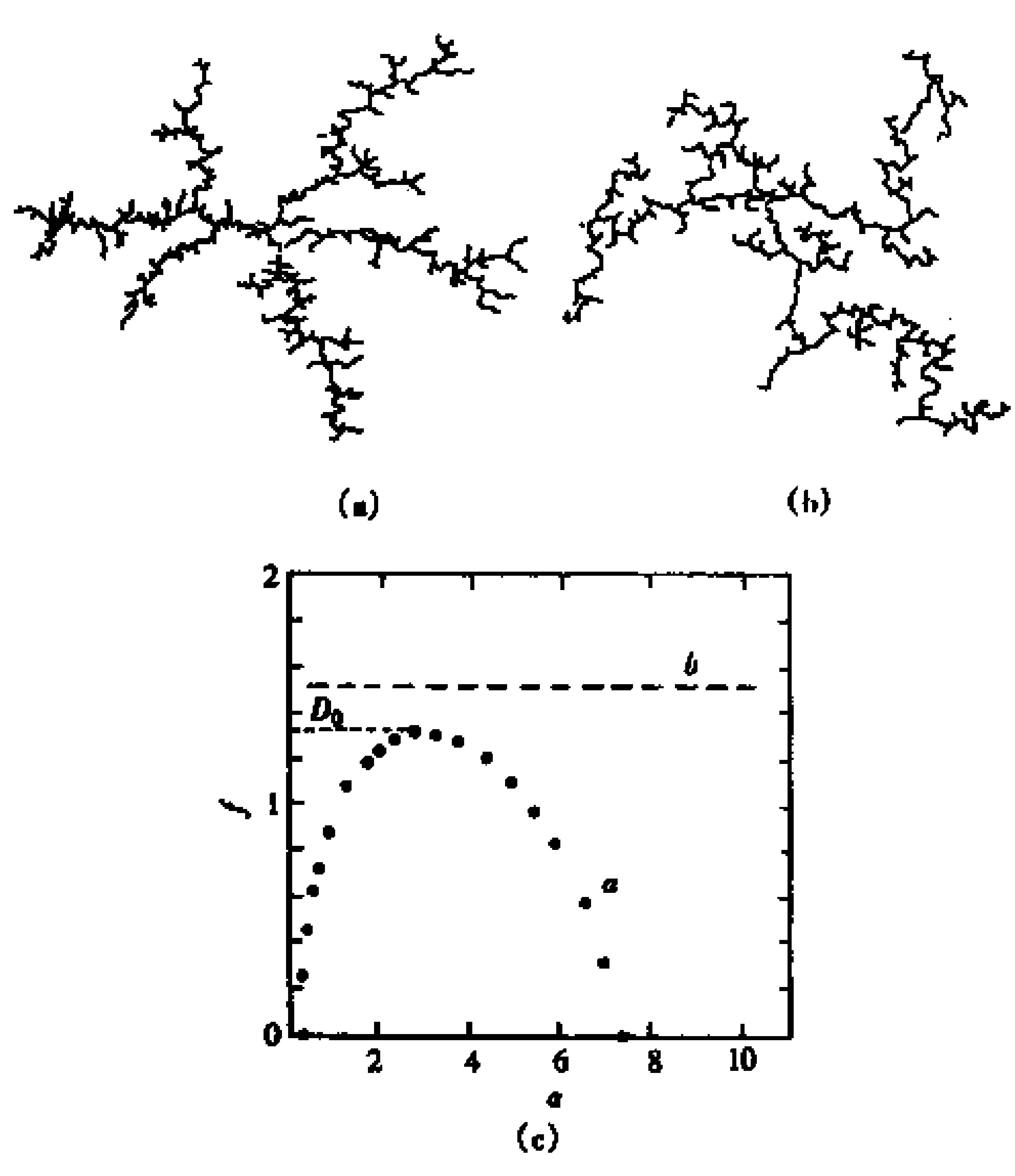
图 3.34

(a) DLA 凝聚体的 D_q 曲线

(b) DLA 凝聚体的 $f(a)$

一般地，$f(a)$ 是一个凸曲线，其峰值 $f(a_0)=D_0$，就是通常所说的分形维数．在曲线的末端处斜率为无穷大，而 $f(a)=a$ 的值为 D_1，即信息维数．

多重分形理论在描述分形体的几何特征时的意义，特别明显地表现在当单个分形维数对所关心的问题的描述失效时．例如，当两个分形体的分形维数在数值上十分相近而其几何形态却大不一样时，单标度的分形理论显然无能为力．下面以 η 模型（$\eta=2$）和 Boter－Jullien 模型所获得的分形集团为例（参见图 3.35）．η 模型即广义 DLA 模型，按照这个模型，在集团任一周界点 X 处的生长概率正比于 Laplace 场的梯度，即



(a) η 模型和(b) Botet－Jullien 模型产生的分形体；

(c) 与(a) 和(b) 所示分形体相对应的多重分形谱

图 3.35

$$P_\eta(x) \propto |\Phi_n(x)|^\eta \qquad (3.176)$$

η 模型的分形维数依赖于参量 η.

Botet - Jullien 模型是以稳定(平衡)的方式来产生凝聚集团的,η 模型却是非平衡的.从图 3.35(a) 和(b) 中可以清楚地看到,这两个分形集团的几何特征具有相当大的差别,但它们的分形维数却是几乎相同的.上面已经指出,它们的形成机制是完全不同的,因此单标度分形理论在本例中是不能有区别地描述这两个模型产生的分形集团.

但是,从图 3.35(c) 中可以看到,在这两个分形集团的多重分形谱上却清楚地反映了它们的差别.由 Botet - Jullien 模型得到的集团的屏蔽区和生长区的面积是相当的,即被屏蔽的点和生长点的比接近于 1,从而这个集团几乎是无屏蔽地生长的,因此它应当是“平衡态”的性质.这里的“平衡”与“非平衡”的物理意义之一是其生长概率分布为均匀或不均匀.

第四章　分形与混沌理论的应用

分形与混沌理论是20世纪80年代科学思想和方法的一个突破，分形与混沌理论中的结构自相似概念，在信息论、控制论和系统论的巨大冲击之下，迅速发展到形态、功能、信息、时间等方面，升华为一种新的科学方法论．它是一种辩证的思维方法和认识方法，它与近年来产生的耗散结构、突变论和协同学，在许多方面协调一致，又与系统论相辅相成，形成互补之态．

现代系统论认为，整体“大于”其孤立部分的总和，整体的性质和规律只存在于其组成各要素的相互联系、相互作用中．整体具有其组成部分在孤立状态时所没有的新性质，从而揭示了宏观的整体规律．

分形论认为，分形内部任何一个相对独立的部分，在一定程度上都应是整体的再现和相对缩影，人们可以通过认识部分来认识整体．但是分形元只是构成整体的单位，与整体相似，并不简单地等同于整体，整体的复杂性远远大于分形元．更重要的是，分形理论指出了分形元构成整体所遵循的原则和规律，是对系统论的一个重要补充．

从分析事物的视角来看，分形论和系统论体现了从两个极端出发的思路，系统论从整体出发来确定各部分的系统性质，从宏观到微观考察整体与部分间的相关性，而分形论则是从部分出发来确立整体的性质，沿着从微观到宏观的方向展开，系统论强调部分对整体的依赖性，而分形论则强调整体对部分的依赖性，二者的互补构成了完整的辩证思维方法．

分形几何升腾为分形论，它的应用范围大大拓广了，人们观察到了自然界、社会和人类思维活动中广泛存在的分形现象，认识到了分形的普遍性．

在自然科学的各个研究领域里，人们运用分形论，从数理化、天地生到医工农等领域都获得了许多新认识和新进展，如物理中的湍流与相变、化学中的高分子链、催化剂表面、凝胶、天文学中的星团分布、宇宙大尺度结构、地学中的渗流、地貌演化、地理中的河流与水系、医学中人体组织结构(如血管、肺、心脏等的分形描述)、材料的损伤断裂、石油开采中的掘进…….

懂得分形的社会科学家和经济学家们观察到社会和经济活动中表现出的自相似现象，并用分形论来思考和研究社会活动中的问题，懂得分形思想的语言学家，运用分形论重新审视语言与写作，如词频分布、写作过程中的中心与层次的嵌套，社会科学中应用分形论获得的新认识，真是举不胜举.

思维科学是研究人的有意识的思维的特点、规律、历史发展和人工模拟的科学.用脑思考脑，用思维求索思维，并不是陷入了自我相关的悖论，而正是分形的体现.在古代、近代和现代，人类的思维都有这样的特点，莫高窟的1尊佛像，身上还刻有15000尊小佛像，佛中有佛；一个寿字竟由100个形态各异的寿字组成，寿中有寿；M.C.埃舍尔的版画“鱼和鳞”，不仅是鱼中有鳞、鳞中有鱼的嵌套结构，而且表现了鱼的补集又是鱼的互嵌韵律与形式美，体现了局部与整体的相似性.这些例子说明，人类的思维活动中存在着分形的规律.

有一些实验证明，大脑是按全息方式工作和分散存贮信息的，其道理就像激光全息照片一样，这正是分形论的精髓，每一个局部都是整体的缩影和再现.

分形论在科学思想和方法、认识论上产生重要作用的例子还有很多.概而言之，分形论的提出，对科学的认识和方法论有下述深远意义：分形论揭示了整体与部分之间的内在联系，找到了从部分过渡到整体的媒介和桥梁，说明了部分与整体之间的信息“同构”；分形与混沌的普遍性和密切联系，打破了学科间条块分割的局面，使各个领域的思想家团结到一起，为描述非线性复杂系统提供了简单的几何语言，使科学家对系统的思维方法从线性进展到

非线性,并与系统论来互补,揭示了系统多层面、多视角、多维度的联系方式,从一个新的层面深化和丰富了局部与整体之间的辩证关系,为人们认识世界提供了一种新的方法论,使人们得以从局部认识整体,从有限认识无限,从非规则认识规则,从混沌认识有序.

分形与混沌动力系统理论进一步丰富和深化了唯物辩证法关于普遍联系和世界统一性原理.分形论从一个特定层面直接揭示了宇宙的统一图景,而分形与动力系统可以共同对世界物质统一性从时态与历时性两个维度上展开说明:动力系统理论说明,自然界中蕴含着历史的演化与嬗变的信息;另一方面,分形元与分形系统之间普遍的信息同构关系编织了一张世界统一的网络.分形理论在生物学、地球物理学、物理学和化学、天文学、材料科学、计算机图形学、系统科学、经济学、语言学与情报学等领域都有着广泛的应用.下面我们就分形理论在几个方面的应用作一简介.

§4.1 分形理论在地球物理学中的应用

关于海岸线的形状是分形并可用随机 Koch 曲线来进行模拟这一点,已是大家所熟悉的了.下面来看一下河流的情况.实际上河流也是典型的分形构造.图 4.1 是亚马逊河的主流及支流分布图,由图中不难看出,河流弯曲和分支的状态不论从主流还是支流来看都是相似的.在河流地貌学,有个称之为 Hack 法则的经验法则,即主流长度 L_m(km) 与到达此地点的流域面积 $A(\text{km}^2)$ 之间存在如下关系式

$$L_m = 1.89A^{0.6} \tag{4.1}$$

A 的指数不是 0.5 就证明主流是分形曲线.(4.1) 又可写为

$$A^{1/2} \propto L_m^{1/1.2} \tag{4.2}$$

根据由测度关系求维数的方法可知,河流的主流的分形维数为 1.2.日本名古屋大学分形研究会在对日本和世界各条河流进

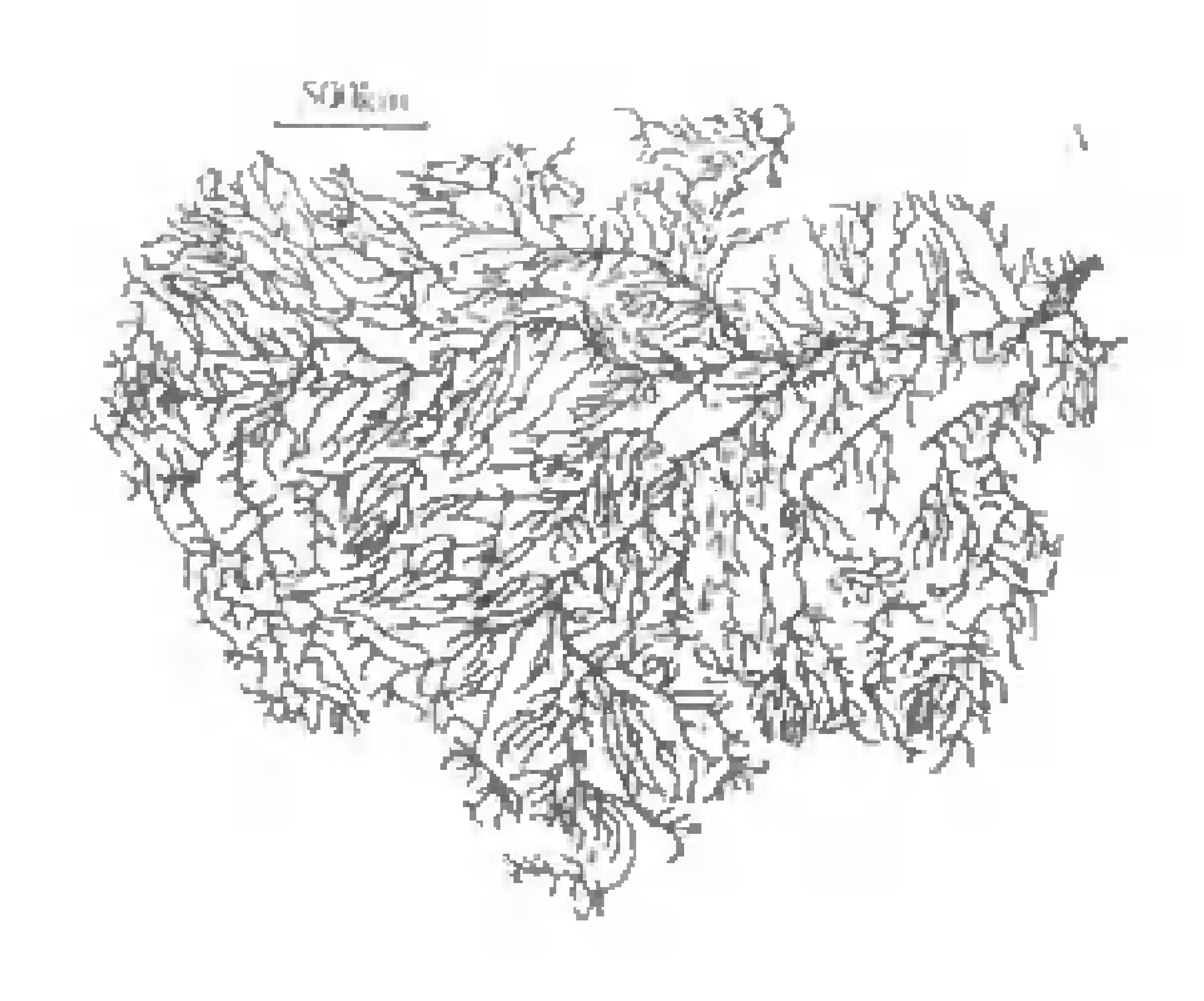


图 4.1　亚马逊河的分布图

行研究后得出结论,河流的主流的分形维数在 1.1 ~ 1.3 之间.

主流的分形维数求出以后,再来看包括支流在内的整条河流的维数为多大.对亚马逊河的分布(图 4.1) 采用 Sandbox 法,用间隔为 r 的格子把平面分割成边长为 r 的小正方形,数出至少包含一个点的正方形的个数 $N(r)$,画出 r 与 $N(r)$ 的双对数图,如图 4.2 所示.图中各点大致排列在一条直线上,表明 $N(r)$ 与 r 的关系满足

$$N(r) \propto r^{-D} \tag{4.3}$$

直线的斜率即为其分形维数 D,测得 D 约为 1.85.对沙漠中的尼罗河,用同样方法求得分形维数大约为 1.4.这两个不同的维数值定量地表明,多雨地区的河(如亚马逊河) 支流多,少雨地区的河(如尼罗河) 支流少.

从河水流量的时间变化也可发现分形特性,从尼罗河一年最低水位变动的资料推定的分形维数大约为 $D = 1.1$.因考虑河的流量与降水量成比例,那么从流量的时间变化是分形来看,是否意味着气候变化也是分形呢?这是一个很有意义的研究领域,有待人

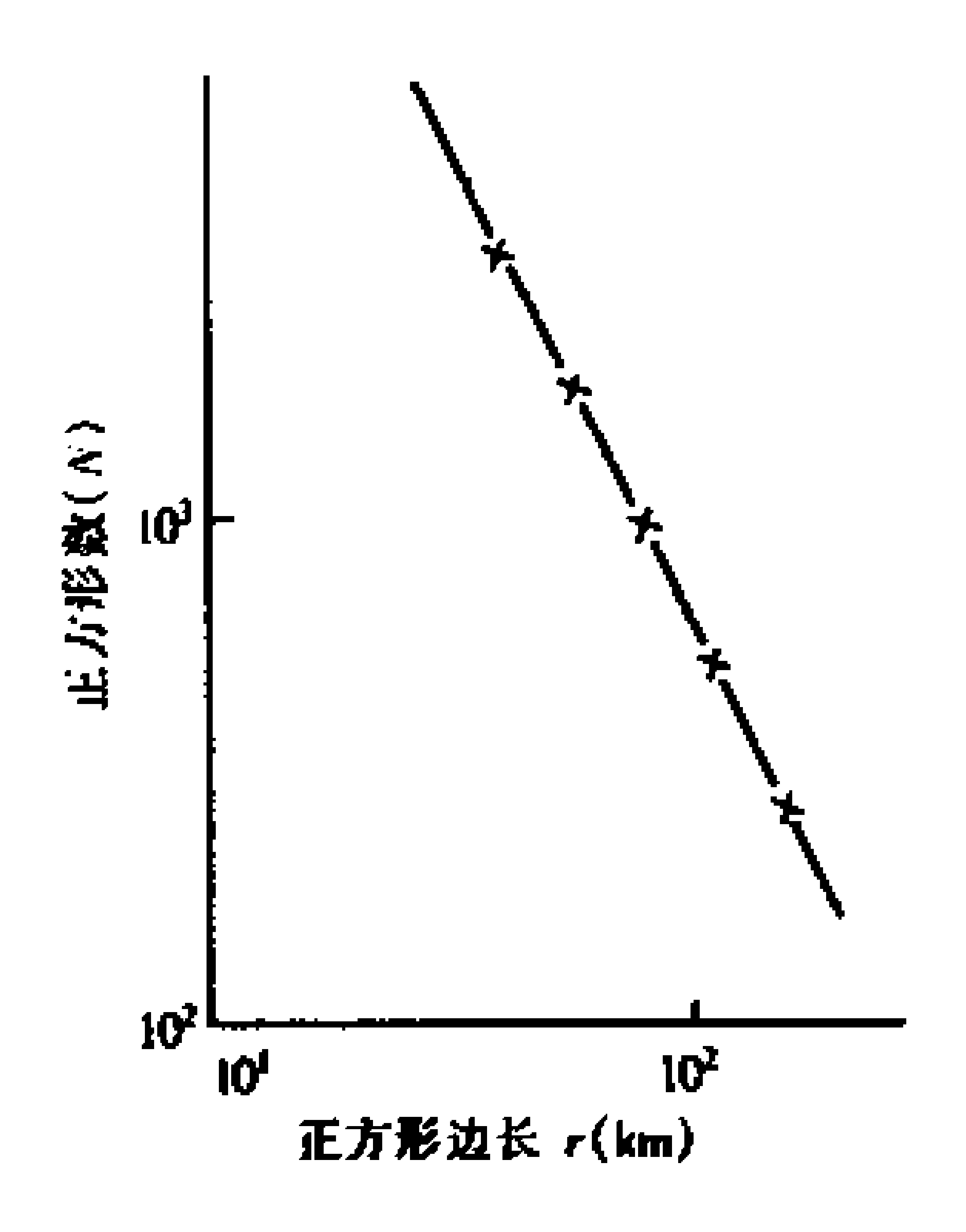


图 4.2　包覆的正方形个数 $N(r)$ 与 r 的双对数坐标图

们去探索.英国物理学家 Hurst 经 60 余年在埃及对尼罗河进行水文测量工作,发现水量变化与传统水位统计有偏差.长期经验使他发现,尼罗河流域的干旱不是传统的水文统计所设想的那样,是一种随机现象,而是干旱越久,就越可能持续干旱.这一发现的意义为 Mandelbrot 充分肯定,并称之为 Hurst 现象.

Mandelbrot 等还对 Hurst 现象作了理论证明,确认他所创立的"自相似"模型可以应用于水文现象的研究,并将水文过程两种特有现象称为 Noth 效应和 Joseph 效应.Noah 效应意味着不连续性,即极端的降水可能确实是非常极端的;Joseph 效应意味着持续性,即强弱降水的时间可能持续得相当长.他们证明 Joseph 效应就是 Hurst 现象的表现,诸如降水、温度、树木年轮、冰川纹泥以及地震频率、太阳黑子、河流的流向等一系列地球物理现象,都符合 Hurst 现象.资料表明,河湖水位的平均 Hurst 数为 0.68,平均分维 $D = 1.32$,它们都与 Koch 曲线的分维($D = 1.26$)很接近.这些研究工作表明,自然现象也具有长程相关性.

地震的预测预报是个古老而至今尚未解决的大难题.关于地

震的震级与发生频率，有一个称之为古登堡 - 里希特(B. Gutentberg - C.F.Richter) 公式的经验法则. 根据这一法则，地震震级 M 与发生比 M 还大的地震的次数 $N(M)$ 之间，有下列关系

$$\log N(M) \propto - bM \tag{4.4}$$

上式简称 G - R 公式，式中的统计参数 b 就是“地震 b 值”，$b \simeq 1$. 上式表明，震级 M 变小一级，发生地震的次数大约增加 10 倍. 在日本，$M \geqslant 6$ 的地震每年大约发生 7 次，$M \geqslant 5$ 的地震 70 次 / 年，$M \geqslant 4$ 的地震每为 700 次 / 年. 太小的地震虽然观测不到，但根据以上关系式，若把 $M > 1$ 的地震进行平均，则每分钟约发生 1 次左右.

众所周知，震级与地震释放出来的应变能的对数成比例. 在式(4.4) 中，若用地震能量 E 代替震级 M，可得下面的幂分布式:

$$N(E) \propto E^{-2b/3} \tag{4.5}$$

因能量不是具有长度测度的量，所以不能称此指数 $2b/3$ 为分形维数，但此式却暗示着地震现象与分形具有密切的关系.

分形理论已经应用于地震研究的领域，人们正研究地震的能量分维、时空分维、地震前兆的分维等问题. 下面先来讨论地震 b 值. 对式(4.4) 可以写成如下形式

$$\log N = a - bM \tag{4.6}$$

再引入近代地震学家古登堡等人给出的关于地震波的能量 E 与震级 M 之间的关系

$$\log E = \alpha + \beta M \tag{4.7}$$

当 E 以“焦耳”为单位时，一般取 $\alpha = 4.5$，$\beta = 1.5$.

如果将地震的能量视为标度，地震能量的容量维数 $D_c = b/1.5$，地层断层长度的自相似分维 $D_s = 2b$，由此可见，地震值与分维之间，有着极其密切的联系.

再来看地震的时空分维. 如果把每次地震看作一个“点事件”，

则地震在时间轴上的投影就和 Cantor 集合有些类似，这就启发人们研究地震时间分布的分维．同样，地震在地球表面的投影（即震中分布）与天空上星罗棋布的星星一样，也类似于某种分形，也可以研究它们空间分布的分维．

目前，测算地震时间分维多采用“标度变换法”，即选取一时间尺度 ε 将整个时间区间划分为若干个时段，统计其有震（指起始震级 M_0 以上的地震）时段数 $N(\varepsilon)$，然后改变 ε 的大小，再统计一个新的 $N(\varepsilon)$．依次类推，由一系列的 ε 值及其相应的 $N(\varepsilon)$ 值，在双对数坐标上画出 $\log\varepsilon - \log N(\varepsilon)$ 图．图 4.3 是几种情况下 $\log\varepsilon - \log N(\varepsilon)$ 示意图，实际地震的分布往往介于泊松（Poisson）分布与随机 Cantor 集合之间．

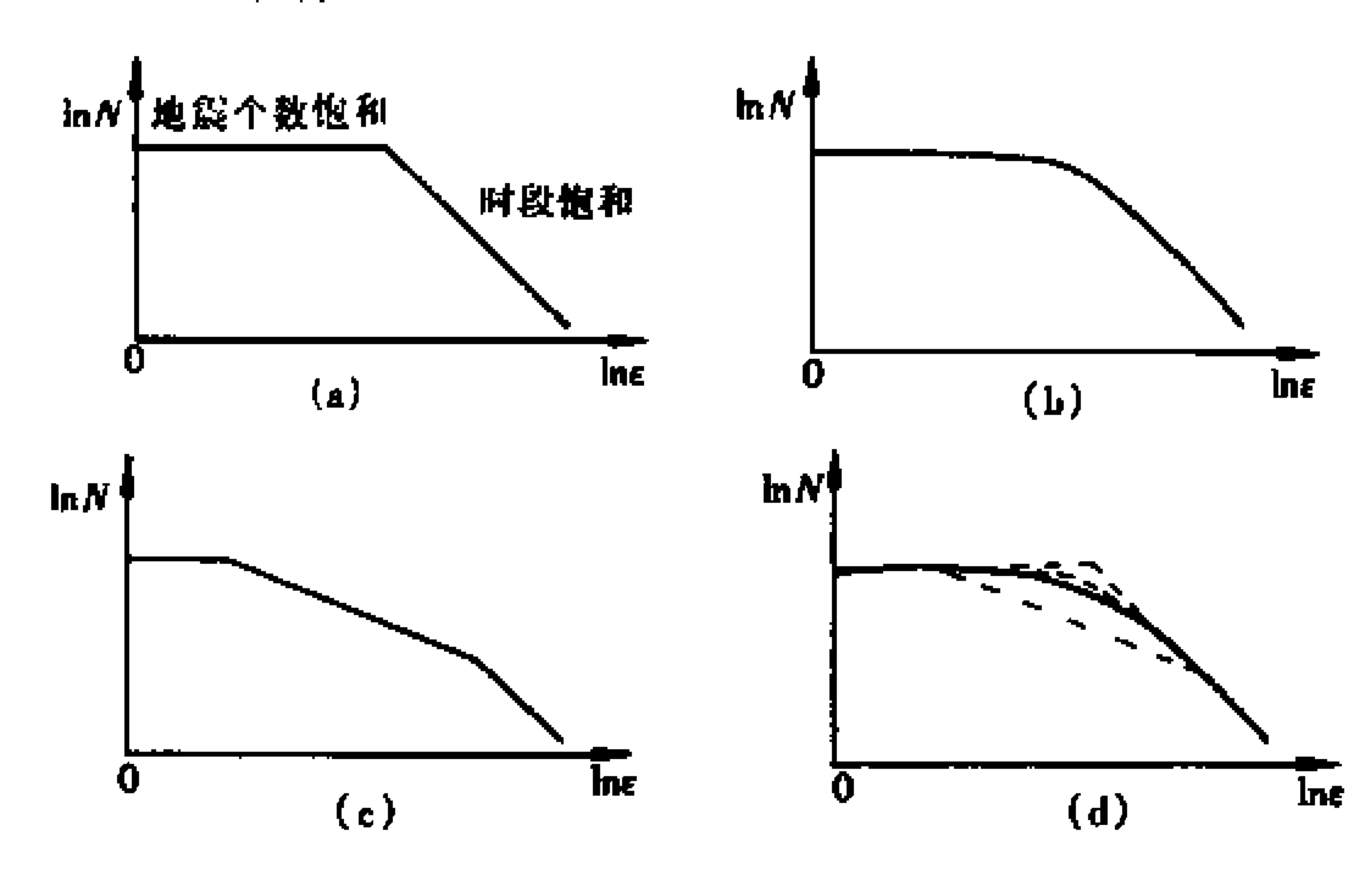


图 4.3　几种情况下的 $\ln\varepsilon - \ln N(\varepsilon)$ 示意图

(a) 等间距分；(b) 泊松分布

(c) 随机 Cantor 集合；(d) 实际地震分布

由于在有限地区、有限时间范围内，地震个数是有限的，因而在 ε 足够小时，每个时段最多只有一次地震，这里，即使 ε 取得更小，$N(\varepsilon) \equiv n$（n 为地震总次数），即出现“地震个数饱和”，这一段曲线的斜率为 0；而在 ε 足够大时，每一个时段都至少有一次地震，

所有的时段都是有震时段，$N(\epsilon) \equiv N$（N 为时段总数），曲线的斜率为 1，称之为“时段饱和”. 在这两个饱和段之间，$\log\epsilon - \log N(\epsilon)$ 线性关系好的一段，就是“无标度区”，其斜率在 (0,1) 间，就是地震的时间分维 D_0.

测算地震的空间分维的方法也与此类似，只不过这里划分的不是 1 维的时段，而是 2 维的小方格（不考虑地球球面的影响和震源深度）.

我国已经有一些地震工作者对地震的时空分维进行了研究，他们发现，在大地震发生前，中小地震的时间分维和空间分维都比较低，而大地震后余震的时、空分维都比较高.

不过，问题并非如此简单. 实践证明，在很多情况下，上述“无标度区”内 $\log\epsilon - \log N(\epsilon)$ 的关系往往并不是一段直线，而是一条向上凸的曲线. 换句话说，此时的分维 D_0 不再是一个常数，而是标度 ϵ 的函数 $D_0(\epsilon)$.

高安秀树（1986 年）提出了“广义分维”的概念，即将分维 D 扩展为标度 ϵ 的函数 $D(\epsilon)$

$$D(\epsilon) = -\frac{d[\ln N(\epsilon)]}{d[\ln\epsilon]} \tag{4.8}$$

由此看来，需要引入广义分维来研究地震的时间分布.

对于地震的时间分维，洪时中等研究了几种极端情况：

① 等间距分布. 此时上述的“时段饱和段”与“地震饱和段”将连接在一起，无标度区的宽度为 0，不存在自相似性.

② 有限的随机 Cantor 集合. 在这种情况下，地震的时间分布在一定层次内有严格的自相似性，是一种多层次嵌套的成丛分布. 若地震的总次数为 n，各层次的相似比为 r，每一层次内有震时段数为 N，则分维 $D_0 = \ln N/\ln r$，嵌套层次 $K = INT[\ln n/\ln N]$（此处 INT 为取整函数），无标度区宽度 $W = r^k$. 在无标度区内，$\log\epsilon - \log N(\epsilon)$ 为一条直线.

③ 泊松分布. 在排除余震和震群的影响后，泊松分布可作为

地震分布的初级近似．这时，地震时间分布的广义分维 $D_0(\varepsilon) = 1 - \lambda \cdot \varepsilon \cdot e^{-\varepsilon\lambda} / (1 - e^{-\varepsilon\lambda})$，这时，$\log\varepsilon - \log N(\varepsilon)$ 呈一向上凸的曲线．

实际地震的分布往往介于随机 Cantor 集合与 Poisson 分布之间．看来，研究实际地震分布对 Poisson 分布的偏离，以及这种偏离对广义分维值的影响，也许是值得探索的一个方向．

分形理论在地震科学中的另一个应用方向是研究岩石破裂的过程．有趣的是，自然界中许许多多与破碎有关的现象，都具有很好的自相似性．

这些年来应用重正化群方法研究岩石破裂已经取得了一些成果．假定岩石由许多小立方体所组成，每一个立方体破碎的概率为 P_c，则碎块分布的分维 $D = \log(8P_c)/\log 2$，即分维与尺度无关，仅仅与单元立方体的破裂概率 P_c 有关，证明了破碎过程就是分形形成的过程．

同时，还研究了两种破裂模式：坚固单元柱体模式（Pillar of strength model）和软弱面模式（Weakness model）．在坚固单元柱体模式中，临界概率 $P_c = 0.896$，分维 $D = 2.84$；在软弱面模式中，临界概率 $P_c = 0.490$，分维 $D = 1.97$．无论在哪种情况下，单位立方体的破裂概率如果小于临界概率 P_c，破裂都不会发展，不致引起整体的破裂；一旦超过了临界概率，就会发生突变，导致整体的突然破裂．这些模式还说明了，分维是破裂方式的灵敏量度．无疑，这些研究对于震源物理是很有意义的．

特别值得注意的是，在对岩石模拟实验中得到非常类似的结果．声发射活动与天然地震活动符合得很好．这的确说明，大地震前地震活动的规律确实是从无序走向有序．

当然，问题并非如此简单，对于地震问题的复杂性，很可能单重分形并不一定能完全刻画它的复杂性，因此，人们提出应用多重分形探讨地震的复杂性．Hirabayashi 等人研究了加利福尼亚、日本和希腊等地区的地震活动的多重分形特征．通过计算 q 次得出的

信息量维数$D_q - q$曲线表明，地震是多重分形的，他们发现日本的地震是最不均匀的，但加利福尼亚的地震的非均匀程度在几个地区中却是最低的. 而$D_q - q$曲线在每一个地区都显示出明显不同的两种类型：缓变与陡变型. 陡变对应极不均匀的分形，它出现在发生大震时的地震活跃期. 朱令人等研究了渤海和唐山地震活动的多重分形特征，他们发现大震孕育的不同阶段，多重分维谱$f(a) - a$曲线的顶点是右偏的. 他们认为端点值的急剧下跌可能是一种很有预报意义的前兆现象. 国内学者还提出了一种新的客观确定分形"无标度区"合理范围，能成功地区别统计分形与完全随机的图像的一种比较理想的方法.

总而言之，虽然目前尚不能用非线性微分自治方程定量描述地震活动的时、空、强、弱变化，但是地震孕育过程的复杂机理还是可以用非线性动力学探索的. 特别是如何从测震学的实际资料中提取地震时间序列中或多或少地隐藏着参与未来大地震发生有关的信息，或从中找到可能蕴藏着参与未来系统突变的痕迹. 如何应用分形和混沌理论定量描述地震活动的时空复杂性，寻找大地震发生的临界行为等一直是人们探索地震预测行为的主攻方向. 近年来，人们在地球物理学和地震学获得的较重要的结果使其应用分形学探索地球科学充满信心. 尽管目前地球物理学家还不能预测地震的发生，也不甚了解其具体的演化过程，但是，他们正在探索这一切.

§4.2 分形理论在计算机图形学中的应用

分形理论能为自然界中存在的各种景物提供逼真的描述.

这些景物形态复杂、不规则，而且显得十分的粗糙，使得采用传统的几何工具进行描述遇到了极大的困难，而分形模型却能很好地描述自然景物，因为自然界中的许多实际景物本身大体上就是分形，或者反过来说，按照分形几何方法构造的形体非常像许多自然景物. 在计算机上进行的绘制自相似集的几个试验，已经能够

产生自然界中存在的物体的令人惊奇的非常好的图案.图4.4是羊齿叶和青草分别在4个和6个仿射变换(映射)下的不变集.图形明显地表现出了自相似性和自仿射性.所以将分形几何学应用于自然景物生成,即自然景物模拟,可以获得很逼真的图像.其他的例子还有气势雄伟的海岸风景和风光瑰丽的山区风光等.

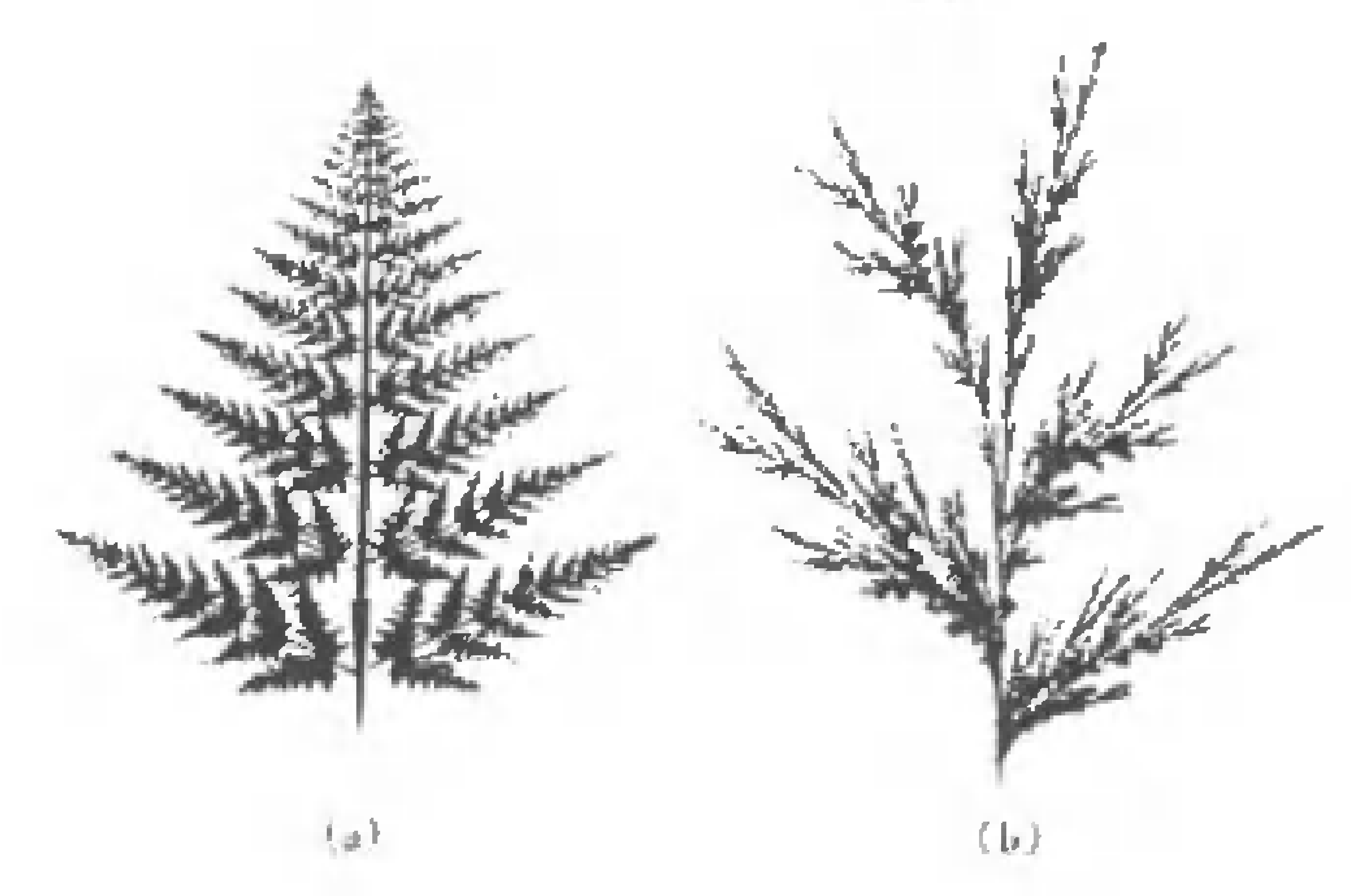


图4.4 羊齿叶(a)和青草(b)分别在4个和6个仿射变换下的不变集

除了对自然景物的模拟以外,分形几何学还可以应用于生物、医学图像、卫星图像等各种图像信息提取和识别,以及电视和通讯中的图像处理和传输,因而形成了分形几何学与计算图形学相结合的一个新的研究领域,并且已经从理论研究进入了应用阶段.

仿射变换就是一种实现几何变换的算法,它可以按比例放大或缩小图形,使图形旋转或位移,有时甚至于使图形产生畸变.用一组为数不多的仿射变换就能够画出如图4.5所示的Sierpinski三角形那样引人入胜的作品.事实上,任何图形都可以通过一系列仿射变换重新绘制出来,关键在于选择什么样的仿射变换来作图.

对诸如三角形或叶形之类的图形作仿射变换,就是把组成这些图形的点转移到新的位置上,在这个过程中,原来的图形可以被平移、按比例放大或缩小、旋转和拉伸.如果对一个三角形作仿射

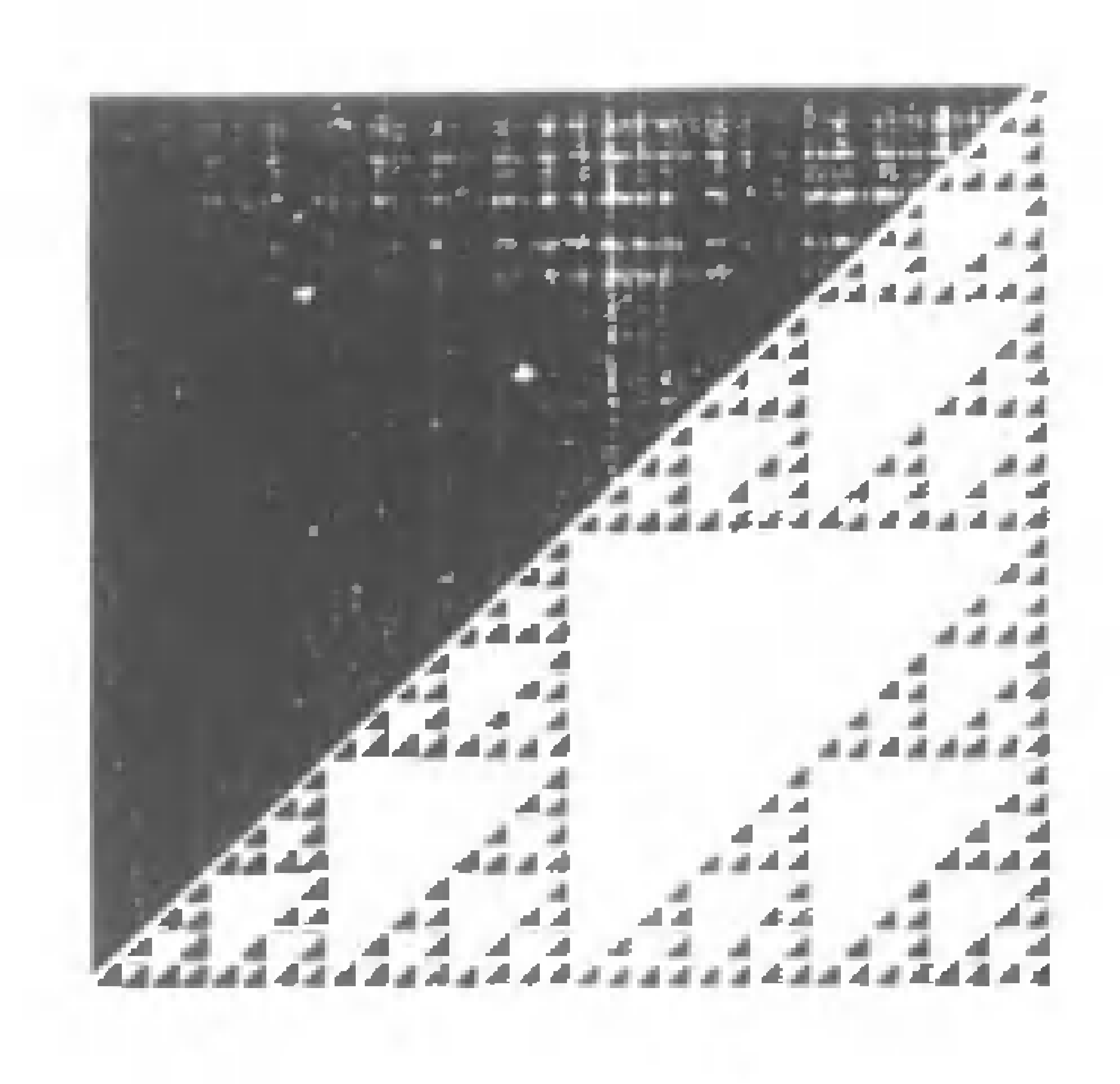


图 4.5　Sierpinski 三角形

变换，我们便能够在这个三角形的左边作出另一个缩小了的三角形，如果再对这个缩小了的三角形作同样的仿射变换，就可以作出第三个更小的三角形，此三角形相对于第二个三角形的大小的位置关系相同.反复地应用相同的仿射变换，就能够得到依次产生的一连串逐渐收缩至无穷小的三角形.

如果对一个图形进行无穷多次的仿射变换，那么得出的图形就具有自相似性，即图形的局部被放大后看上去与总体图形相似.因此，应用一系列仿射变换能够作出自相似图形，也就是现在通称的分形图形或分形.

在所有的仿射变换中，用于移动平面上图形的点的公式都具有相同的形式.初始的位置可用 x 和 y 两个坐标来确定.对初始点作仿射变换后，新点的位置用 (x',y') 确定.点的变换公式为

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{4.9}$$

式中符号 a,b,c,d,e,f 为确仿射换特征的数.当 $b = 0.5, c = -0.5, a = d = e = f = 0$ 时，此时仿射变换的变换公式为

$$\begin{cases} x' = 0.5y \\ y' = -0.5x \end{cases} \tag{4.10}$$

如果对一个三角形内大量的点都用上式作仿射变换，那么就可以发现一个变换规律，即整个三角形沿顺时针方向旋转了90°，同时其边长也缩小到原来的三角形的一半.如果 e 和 f 不为0，而为1，则变换出来的三角形不仅产生旋转和收缩，而且将向上向右各平移一个坐标单位.

由于这种类型的变换会使任何点集内的点之间的距离发生收缩，所以被称之为收缩变换，这种变换不改变图形的形状.当反复不断地应用若干变换公式时，这些公式就构成了一个迭代函数系统.

要确定一个迭代函数系统作用于诸如三角形这样一类图形，只需对三角形的三个顶点作变换，然后用线段把三个新顶点连接起来，就得到了经变换所产生的三角形.但是，对轮廓是由许多点才能确定的不规则图形，就行不通了，此时解迭代函数系统的公式需进行繁琐的算术运算.为此，Barnsley 提出了一个对即使是很复杂的图形，也能够高效率地作多次变换的好办法，即由一系列仿射变换按随机顺序对一个初始点反复映射所得出的点最终将"填满"一定的区域.图4.6是迭代函数系统产生出蕨叶形图像的示意图，可以用来说明这个方法步骤.开始时的图形是三片锯齿状的叶子和代表叶柄的直线线段，其中顶端的那一片叶子面积最大，另外二片的大小基本相同[参见图4.6(a)].对这四部分分别采用一个仿射变换，总共进行了10000次按随机顺序的变换后，一幅精美的、栩栩如生的蕨叶图像就呈现了出来，如图4.6(d)所示.当然，在10000次的变换中，并不是完全随机的.顶端的那片叶子面积最大，因而里面的点被变换的概率最大，这部分的变换次数与其面积占总的面积的比例成正比；而叶柄两边的二片叶子的面积基本相同，因而它们的变换次数也大致相同，它们的变换次数也是与各自的面积成比例的.由于叶柄的面积相比之下最小，因而其变换次数

也是最少的.

值得注意的是,与蕨叶相关的四种变换把蕨叶基本轮廓变成了四个区域,这四个区域近似于把轮廓围绕的面积分成四部分.Barnsley 把这种再划分出的图形叫作"接贴图".Barnsley 等已经发现,只要尽可能准确地复制分形的轮廓,相应的迭代函数系统制作出的分形复制图就越精确.

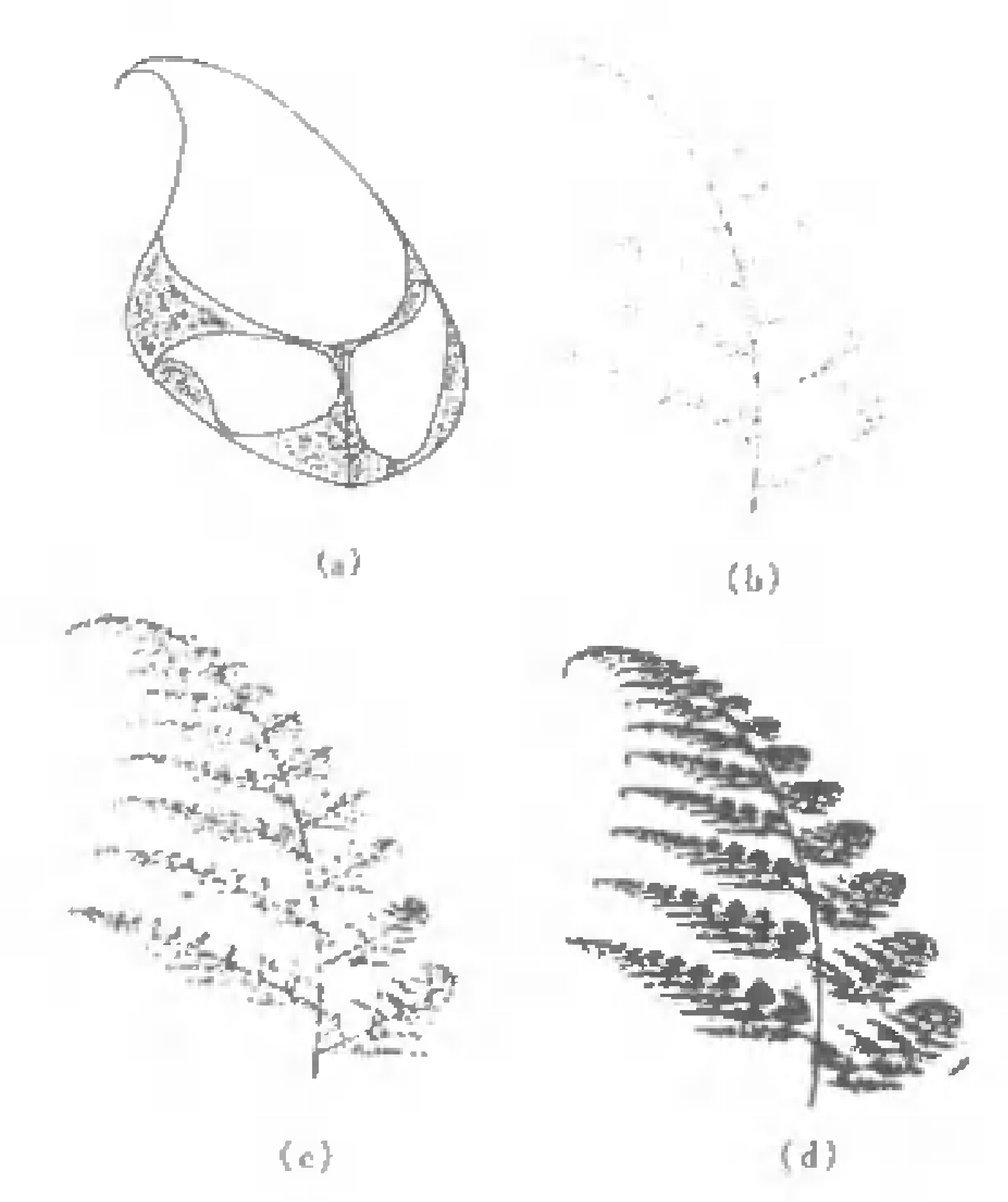


图 4.6　迭代函数系统产生出的蕨叶形图像

就图形的创作来说,几乎所有的分形都能借助于某一个迭代函数系统绘制出来.以图 4.5 所示的 Sierpinski 三角形为例,这个三角形的中心部位被挖掉了一块小三角形,于是留下了三个小三角形,自然这三个小三角形每个的中心也被挖掉了一块三角形.有三种仿射变换参与了这个 Sierpinski 三角形的制作过程,这些仿射

变换出自由三个方向上相同的全等直角三角形组成的一个拼贴图，这些直角三角形之间留下了一个空隙，此空隙也是直角三角形，且与拼贴图的直角三角形一样大．这三个直角三角形中的每一个都与一个特定的仿射变换相关联，最终的图案(图 4.5) 所示的只是经过有限步后得出的图案，实际上完全充满了各种尺寸的看得出形状的三角形空隙．

复制 Sierpinski 三角形的迭代函数系统算法如下：算法的开头是将坐标 x 和 y 置于 0，然后，将三个主要的运算步骤反复进行 10000 次．第一个步骤是随机地从三组仿射变换方程中选出一组．第二个步骤是对点的当前坐标(x,y) 施行所选定的仿射变换，也就是说求出 x 和 y 的新的值．第三个步骤是作一个检查以确定是否已经进行了 10 次迭代．

这个算法如果再补充一项功能则适用于任何一个迭代函数系统．由于某一仿射变换被选中的频率必须按照它将覆盖的区域在整个图形中所占的比例来确定，所以算法必须按一定的概率选择各个仿射变换的公式．那么，作出 Sierpinski 三角形的仿射变换公式究竟是怎样的呢?前面已经介绍了这类仿射变换公式，并且还提到了 6 个确定变换特征的系数．Sierpinski 三角形的仿射变换公式的系数如下表所示：

a	b	c	d	e	f
0.5	0	0	0.5	0	0
0.5	0	0	0.5	0	1
0.5	0	0	0.5	0.5	0.5

表中的三行数字分别为参与 Sierpinski 三角形绘制的三组仿射变换公式的系数．

由上表可以看出这三组公式对图形将会产生什么样的变换效果．

首先，它们会使任何几何图形缩小一半，只不过第一个公式是使图形朝原点收缩，而第二个和第三个公式则是在使图形收缩的

同时还分别把图形向右移动一个单位和半个单位.这样,最初的三角形就被变换为三个小三角形,而这三个小三角形随后被同样变换成三个更小的三角形.

通常情况下,为了把一幅风景画存储到计算机文件中,需要用成千上万位信息.例如,一幅图像可以是大小为 300 × 300 的像素点阵,每个像素需要好几位信息来规定它的灰度或颜色.因此,用普通的一个像素一个像素地存储图像的方法来存储一幅图像,可能需要占用一百万位甚至更多的存储容量.当然,用标准的信息压缩技术可以对这样的图像数据进行压缩而使它只占用较少的存储空间.但是,用迭代函数系统来压缩信息量时,其压缩比可望达到1/500,甚至更少.这一压缩方法的关键在于存储迭代函数系统而不是存储迭代函数系统所绘制的图形.

这一方法的原理如下.把直接取自照片或电视摄像机的计算机图像转换成迭代函数系统时,图像被分解成许多大大小小的互相连续的小块,这些小块的灰度(或颜色)是基本不变的.这样,拼贴图中的小块便是从大量的标准仿射变换公式中,选择出与它们相应的仿射变换公式的依据.例如,如果某一仿射变换可以作为正在建立的迭代函数系统中的一个十分有用的成分,这样,在某些计算机上就能以高于每秒 30 幅图像的视频速率再现出生动真实的画面.

§4.3　分形理论在经济学中的应用

古典经济学由于不能很好地说明经济现实而出现了危机,混沌现象、奇怪吸引子的发现以及非线性动力学向经济学的渗透,对古典经济学提出了挑战,从而产生了混沌经济学.R.H.Day,M.Boldrin 和 L.Montrucchio 提出了经济系统出现混沌的条件.陈平首次找到了维数 1.5 左右的货币奇怪吸引子.Mandelbrot 研究了市场价格的变化,得出了价格变化的标度律,他利用标度律首次研究了很多商品的价格、某些利率、19 世纪的证券价格,在研究了 60

年棉花价格的变化后，得出其分维值 $D \simeq 1.7$. Fama 研究了近期证券价格的变化. Roll 研究了利率的变化.

下面先讨论收入分配的分维及其与基尼系数的关系. 意大利经济学家 Pareto 发现，各国的经济制度虽然不同，但收入分配却有共同的规律，它可以写成

$$N = N_0 X^{-b} \qquad (b > 0) \tag{4.11}$$

其中 N_0 为人口总数，X 为收入水平，N 为收入不少于 X 之人数，用标度律可以得出收入分配的分维

$$D_f = b \tag{4.12}$$

收入水平 X 是一个随机变量，由式(4.11)可得 X 的分布函数为

$$F(X) = (X_0^{-b} - X^{-b}/(X_0^{-b}) - X_n^{-b}) \tag{4.13}$$

其中 X_0, X_n 分别为最低、最高收入水平，即 $X_0 \leqslant X \leqslant X_n$. 由此可得 Lorenz 曲线

$$L(P) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln X_0 - \ln X_n} \{\ln[X_0^{-1} - P(X_0^{-1} - X_0^{-1})] - \ln X_0^{-1}\} \\ \qquad\qquad (b = 1) \\ \dfrac{1}{X_n^{1-b} - X_0^{1-b}} \{X_0^{-b} - P(X_0^{-b} - X_n^{-b})^{(b-1)/b} - X_0^{-b}\} \\ \qquad\qquad (b \neq 1) \end{cases} \tag{4.14}$$

基尼(Gini) 系数是描述收入分配平均程度的一个指标，它的定义式为

$$G^R = 2\int_0^1 [P - L(P)]dP \tag{4.15}$$

由式(4.11) ～ (4.15)，我们可以得到基尼系数 G^R 与分维 D_f

的关系为

$$G^R=\begin{cases}1+\dfrac{\ln X_n^{1/2}-\ln X_0^{-1/2}}{(X_n^{-1/2}-X_0^{-1/2})(X_n^{-1/2}-X_0^{-1/2})}+\dfrac{2X_0^{1/2}}{(X_n^{1/2}-X_0^{1/2})} \\ \qquad\qquad (D_f=1/2) \\ 1+\dfrac{2[X_n^{-1}(\ln X_n-1)-X_0^{-1}(\ln X_0^{-1}-1)]}{(\ln X_0-\ln X_n)(X_0^{-1}-X_n^{-1})} \\ \quad+\dfrac{2\ln X_0^{-1}}{\ln X_0-\ln X_n} \qquad (D_f=1) \\ 1+\dfrac{2D_f}{2D_f-1}\dfrac{X_n^{-D_f}}{X_0^{-D_f}-X_n^{-D_f}}+\dfrac{2D_f-2}{2D_f-1}\dfrac{X_0^{1-D_f}}{X_n^{1-D_f}-X_0^{1-D_f}} \\ \qquad\qquad (D_f\neq 1/2)\end{cases} \tag{4.16}$$

当 X_0 较小，而 X_n 较大时，由式(4.16)得出如下近似表达式：

$$G^R\approx\begin{cases}1, & D_f\ll 1 \\ 1/(2D_f-1), & D_f>1\end{cases} \tag{4.17}$$

我们从式(3.150)、(3.151)可以得出如下结论：第一，它们给出了收入分配分维值的经济含义，当收入分配越集中，即 G^R 越大时，则分维值 D_f 越小；反之，当收入分配比较平均时，即 G^R 较小时，则对应的分维值 D_f 越大，因此收入分配的分维值 D_f 反映了收入分配的平均程度. 第二，它们提供了一种基尼系数的简便方法. 通常采用的统计方法求基尼系数比较困难，而且误差较大；而估计分维值 D_f 却比较容易，求出了分维值 D_f 的估计值以后，就可以用式(4.16)或(4.17)计算基尼系数 G^R.

Montroll 等研究了美国1935年至1936年的收入分布. 已知在大范围内收入分布服从对数正态分布，所谓对数正态分布，是指取对数后服从正态分布. 图4.7就是把美国1935年至1936年的收入分布标绘在对数正态图表纸上. 图的纵轴表示收入(美元)，横轴表示累积概率，点若呈直线排列，那么其分布就表示对数正态分布.

从图中可明显看出，除了 1% 高收入者以外的各点，几乎都呈直线排列，收入分布确实服从对数正态分布. 例如，收入在 3000 美元以下者，占全部统计对象的 90% .

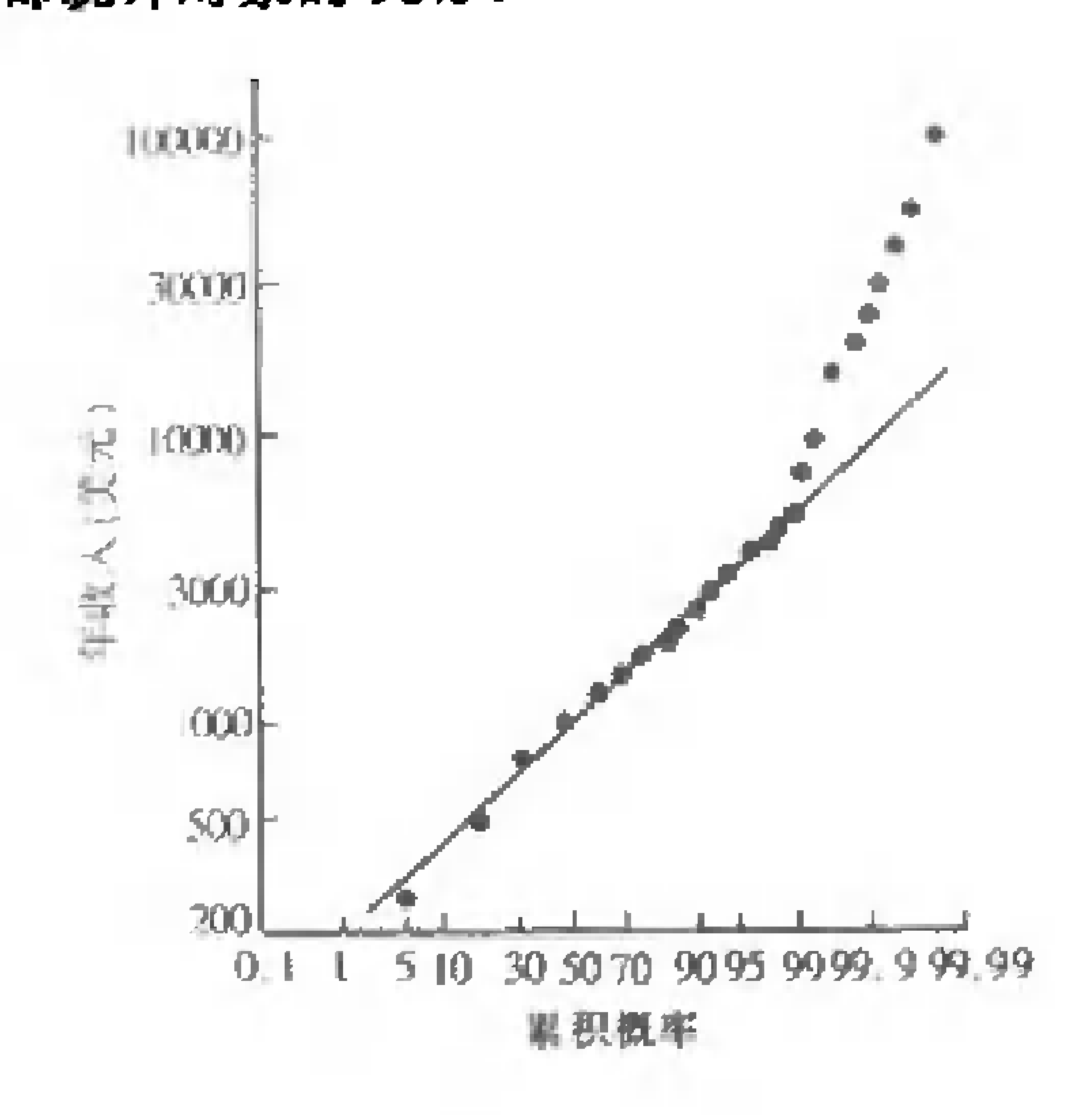


图 4.7　美国一年(1935 ~ 1936 年) 收入的分布

对离开对数正态分布占 1% 的人的分布进行详细调查后，发现为如下的幂分布：

$$P(X) \propto X^{-1.6} \tag{4.18}$$

这一分布型不外乎是迄今多次出现的分形分布.

收入分布最有趣的可能是无产者和资产者的分布型有明显的区别. 也就是，无产者的收入是对数正态分布，而资产者的收入则服从分形分布.

对数正态分布只有在所考虑的现象能够分解为独立现象的概率的积时才会经常出现，这被认为是由于下述情况的原因. 例如，某人的成功概率 P_0 可由此人具有一定才能的概率 P_1，有好的上级的概率 P_2 和机遇好的概率 P_3 等概率的积表现出来，故

$$P_0 \doteq P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots\cdots \tag{4.19}$$

两边取对数，即可得到下式

$$\log P_0 = \log P_1 + \log P_2 + \log P_3 + \cdots \qquad (4.20)$$

每个 P_i 如果独立取有限值，根据中心极限定理，右边接近高斯分布．因此，P_0 分布可成为对数正态分布．

因为资产者的资产超过某一程度时，其收入主要取决于投资，所以就不能依照上述设想．它可能直接反映下面讨论的股票价格变动中所说的钱的分形性而决定这些人的收入．

另外，收入的分布型受到国家经济状态的影响，但有关这方面的资料却是很难得到的．

下面再讨论股票价格的变动．股票价格的变动图虽经常可在报纸上看到，但因价格涨落得非常厉害，而且完全是随机的，因此使人感到几乎无规律可循．但若从统计学观点分析这一变动．就会发现有很好的规律．下面是 Mandelbrot 发现的两个法则：

（1）每个单位时间的股票价格的变动分布，服从于特性指数 $D \simeq 1.7$ 的对称稳定分布．

（2）单位时间不论取多大或多小，其分布也是相似的．也就是说，适当地改变尺度，就可成为同样的分布．

关于稳态分布，只讨论与分形有关的一些性质．若把单位时间 T 之间的股票价格变动 x 的分布密度记为 $P(x)$，则下述关系式成立：

$$\int_x^{\infty} P(x')\mathrm{d}x' = \int_{-x}^{-\infty} P(x')\mathrm{d}x' \propto x^{-D} \qquad (4.21)$$

此关系式表示股票价格变动的大小分布为分形．例如，一天的股票价格变动在 x 元钱以上的次数，比 $2x$ 元以上的变动次数多 $2^{1.7} \simeq 3.2$ 倍．

不难理解，金钱是有分形性质的．比方对小孩（或穷人）来说，1 元是个不太大的数字，但 100 元就会被看成巨款了．对大富豪来说，1 万元也算不上什么财产，但 100 万元也可能被看作巨金．可是从国家预算来看，就连 1000 万元也是个微不足道的数字．以股票

买卖为例,不论是哪一方,只是交易的位数不同,而买卖决断的方法是相同的.由于股票价格是由自相似变动的重合所决定,所以可把股票价格变动大小的分布看作分形.

法则(2)表示股票价格变动在时间上也是分形.一天的股票价格变动图与一年的股票价格变动图相比,不同的只是股票价格的尺度,而对变动情况则很难加以区别.

Mandelbrot 的这些法则,虽然经验证明很符合实际资料,但到头来它只是个统计法则.这点必须注意,若想用它来预测明天的股票价格是不可能的.从股票价格变动图表的功率谱的调查来看,已知为 f^{-2} 型.这与布朗运动相同,每天的变动与过去无关地摆动着.也就是说,股票价格只取决于每天的交易情况,即使调查过去资料也并无多大意义.有句话说,外行人买股票一般没有好结果,这就是买股票难的原因所在.因此,如果深深陷进去的话,由于金钱的分形性,就会被金额的价值所麻痹,当发觉的时候可能已背上了巨额的债(当然股票业者在复杂的股票变动和社会态势上能找出微妙的相关,并用来预测股票的价格).

§4.4 混沌电路中的分形

§4.4.1 混沌电路

混沌电路的定义有多种方式.假设读者已熟悉传统的线性电路分析,这里我们采用系统在初始暂态已衰减到零的稳态响应的频率特性来定义混沌电路.

我们已知熟知的传统线性电路分析的稳态响应有:

1. 直流稳态:在状态相空间,所有轨道接近于一个平衡点.

2. 周期响应:系统输出收敛于一个与输入信号具有相同频率的周期波形,即 $\omega_0 = \omega_i$.

3. 谐波响应:系统的输出频率为输入信号频率的正整数倍,即 $\omega_0 = n\omega_i$,(n 为大于 1 的正整数).

4. 子谐波响应:系统的输出频率为输入信号频率的分数倍,

即 $\omega_0 = p\omega_i$,(p 为真分数,$0 < p < 1$).

5. 准周期响应:系统输出由与基频的不可约周期分量所构成.如 $x(t) = \sin\omega t + \sin\sqrt{2}\omega t$ 为准周期信号.

以上五种电路均包含着离散频谱的输出.现在已经发现,许多非线性器件与非线性电路能够呈现一种远比上述五种响应更为复杂的响应,即输出连续频谱.

定义 4.1 一个由确定性运动方程所描述的确定性电路,由直流或确定性输入信号所激励,其输出波形中包含一段或多段连续频谱,那么称此电路为混沌电路.

应当强调的是,混沌电路丝毫不带有随机因素.这是混沌与噪声的本质区别.虽然由随机因素引起的噪声也往往包含着连续频谱,但它不是混沌.

一般地,一个非线性电路,其状态方程用 n 个一阶微分方程组表示:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.22}$$

其中,$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 为 n 的维向量.

如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ 以显式包含着时间变量 t,那么称此电路为非自治电路;否则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 不包含时间变量 t,称之为自治电路.非自治电路包含着时变交流电源或时变元件;自治电路不包含时变元件,处于零输入或直流电源作用下.一个电路,如果包含 n 个储能元件则称之为 n 阶电路.

实验与分析表明:

1. 一个小于三阶的自治电路所呈现的最复杂性态是周期振荡.构成混沌的自治电路必须是三阶或三阶以上.

2. 一阶非自治电路不可能构成混沌(它相当于一个二阶自治电路).构成混沌的非自治电路至少必须是二阶的.

§4.4.2 蔡氏电路与双蜗卷输出

蔡氏电路是一个典型的混沌电路.它是一个三阶自治互易电

路，如图 4.8 所示. 其中的两端非线性电阻器由三段分段线性电阻所组成，如图 4.9 所示，其实现电路如图 4.10 所示.

蔡氏电路的状态方程为

$$
\begin{cases}
c_1 \dfrac{\mathrm{d}vc_1}{at} = G \cdot (vc_2 - vc_1) - g(vc_1) \\
c_2 \dfrac{\mathrm{d}vc_2}{at} = G \cdot (vc_1 - vc_2) + i_L \\
L \dfrac{\mathrm{d}i_L}{at} = - vc_2
\end{cases}
\tag{4.23}
$$

其中，$g(vc_2)$ 如图 4.9 所示的分段线性函数.

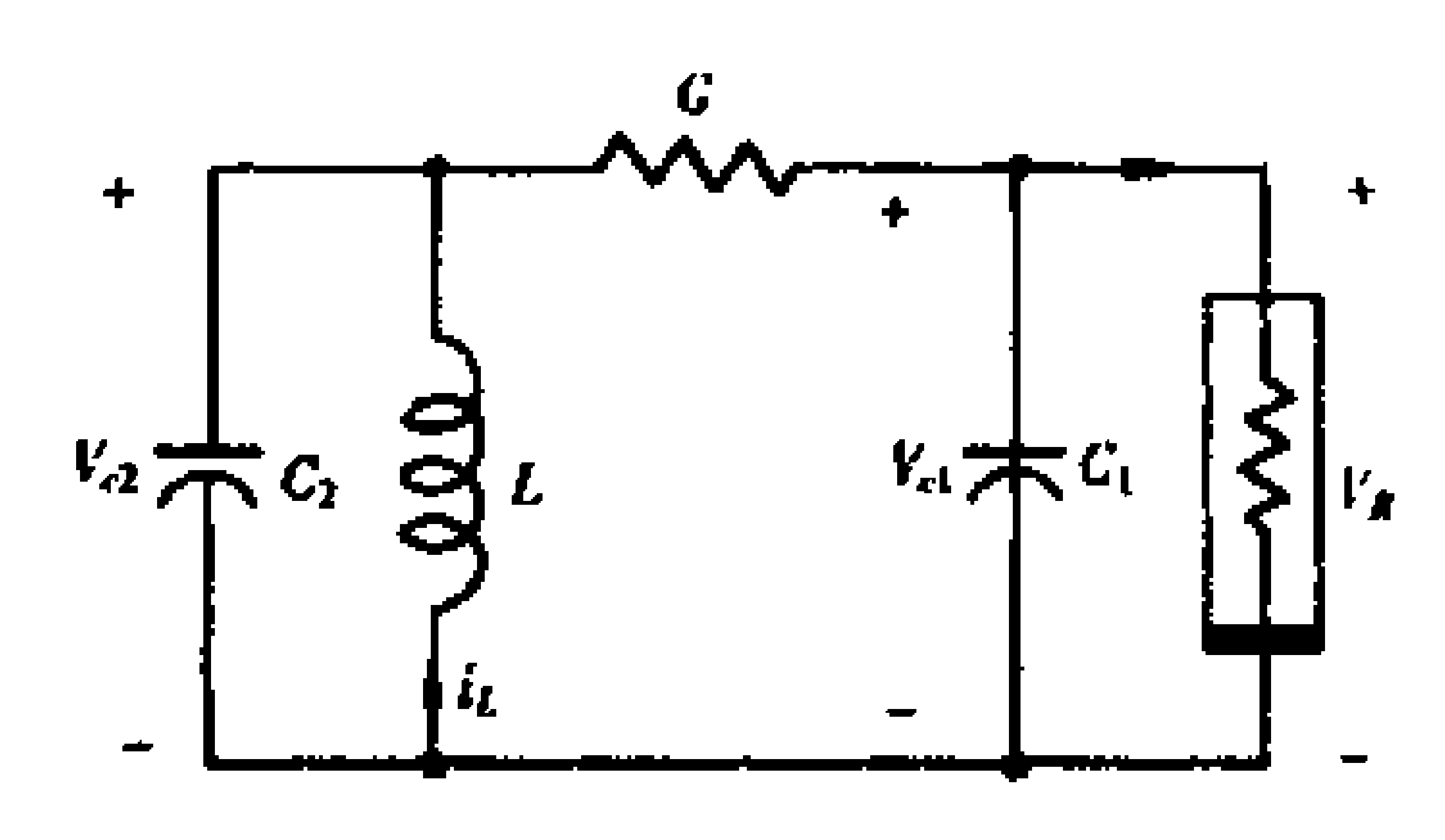


图 4.8　蔡氏电路

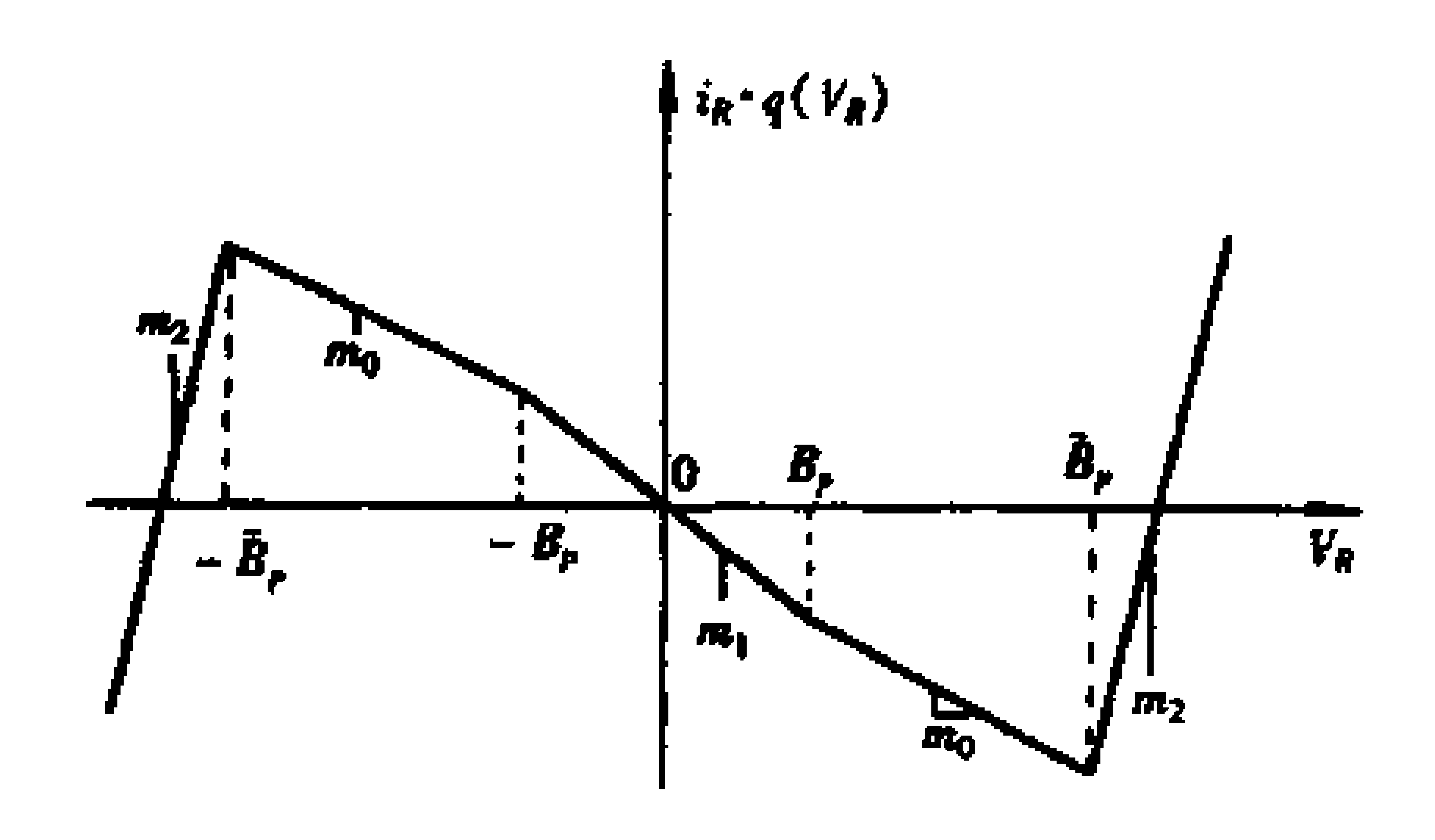


图 4.9　非线性电阻工作特性

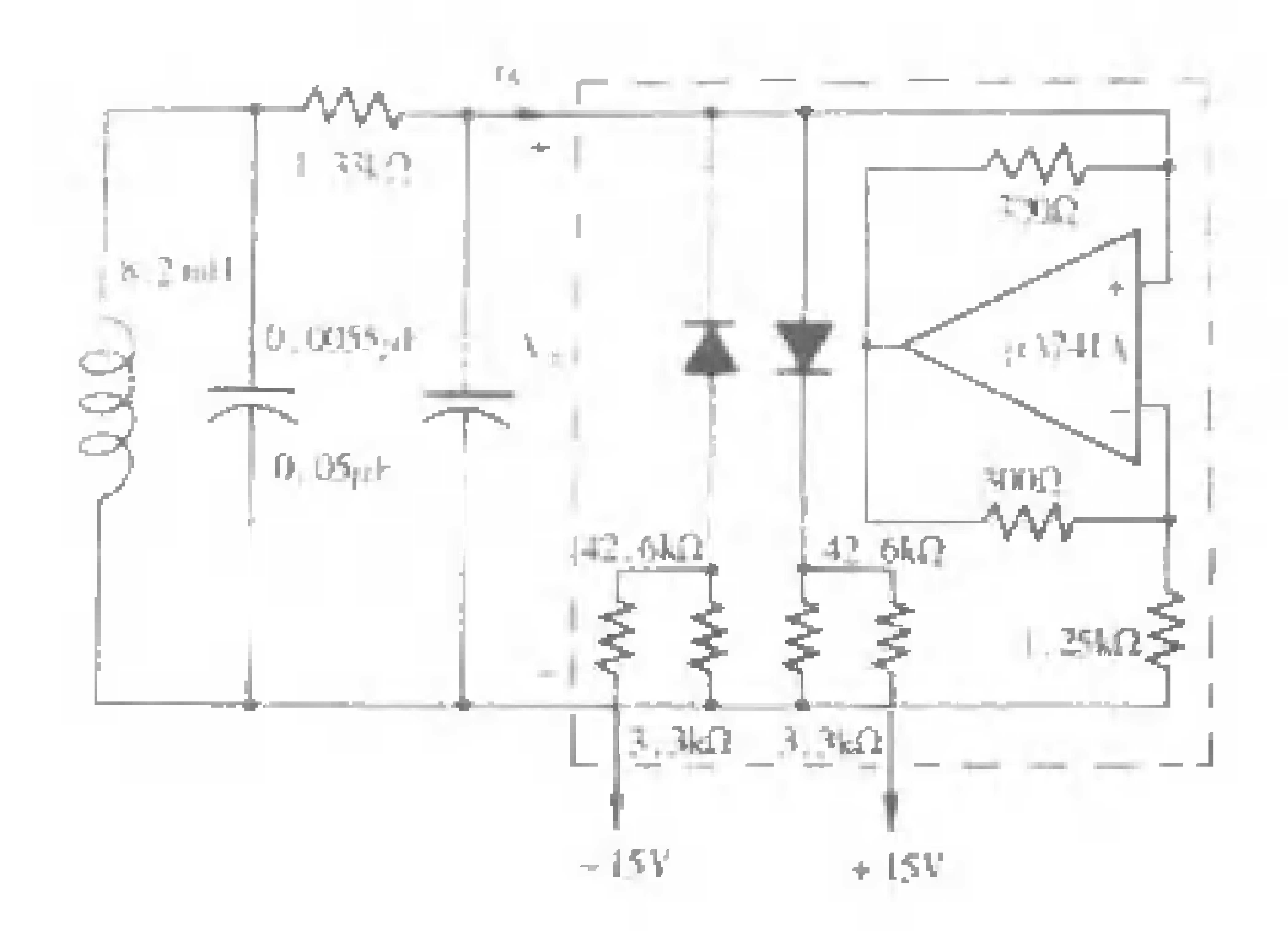


图 4.10　蔡氏电路之实现

在实验中，取 $c_1 = 4050\text{pF}$，$c_2 = 0.1\mu\text{F}$，$L = 7.3\text{mH}$，$R = 1.5\text{k}\Omega(G = 1/R)$.

$m_0 = -0.5, m_1 = -0.8, m_2 = 5, B_p = 2.5\text{V}$ 及 $B_p = 7.5\text{V}$

对于三个状态变量 vc_1, vc_2, i_L 中的任意两个变量，可以在示波器上观察该电路的稳态输出投影图，如图 4.11 所示，蔡氏电路的输出呈双蜗卷状．它既不是周期解，更不是噪声，而是一个混沌吸引子，其功率谱呈连续频谱，如图 4.12 所示．

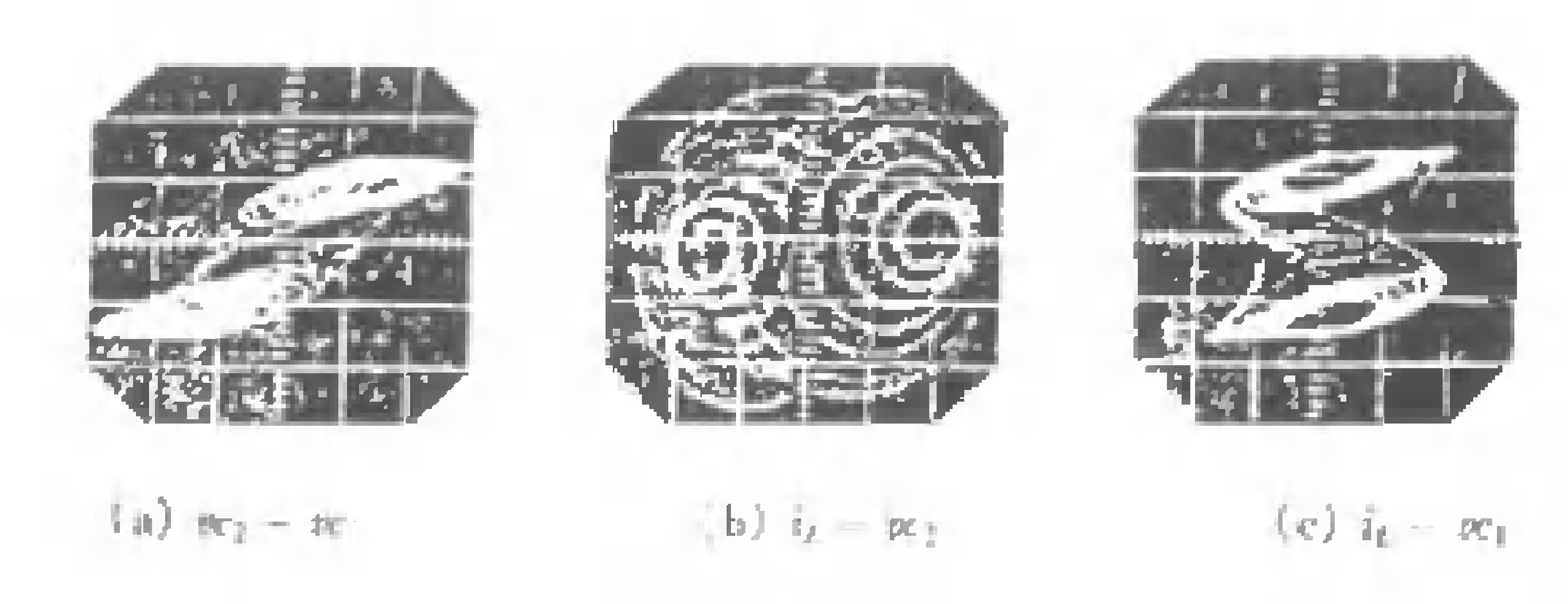
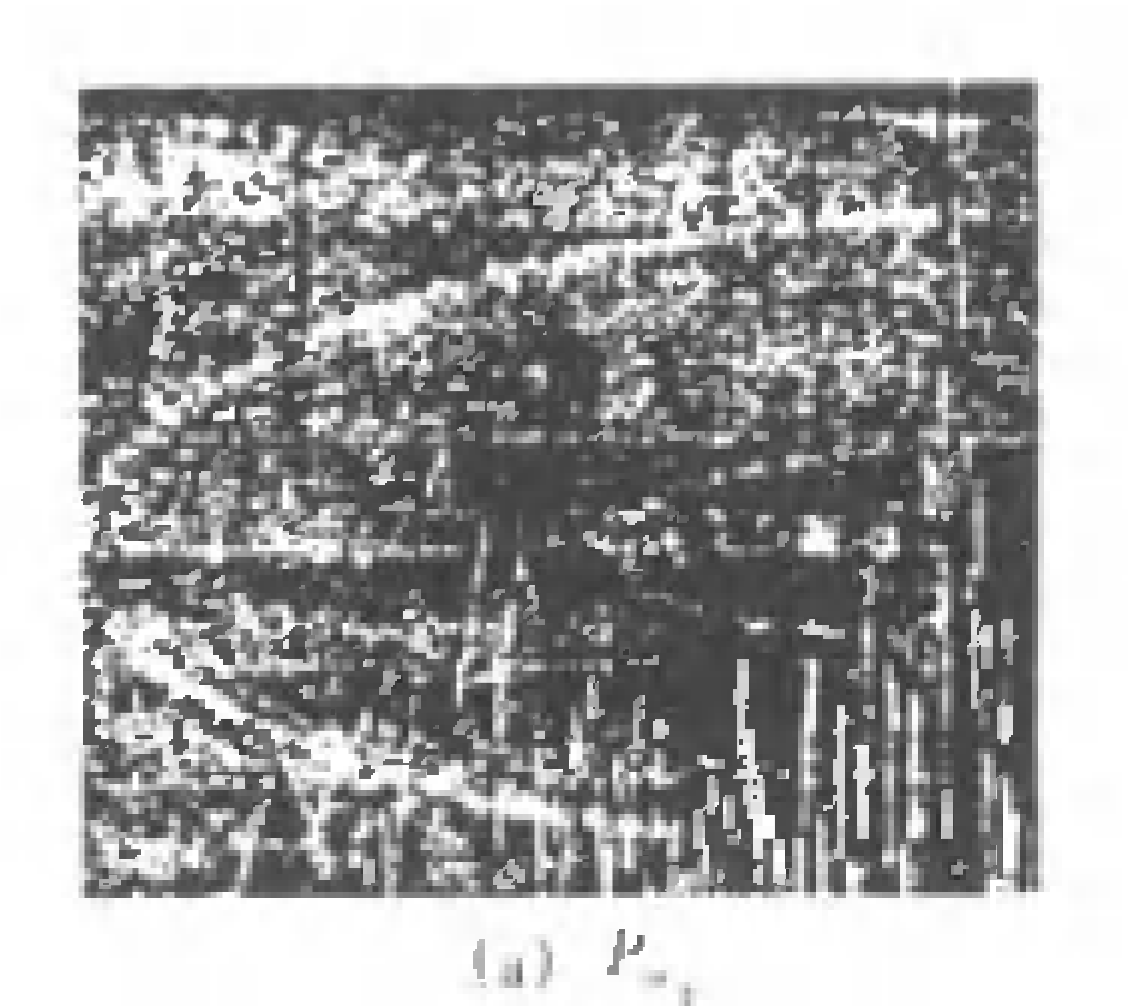
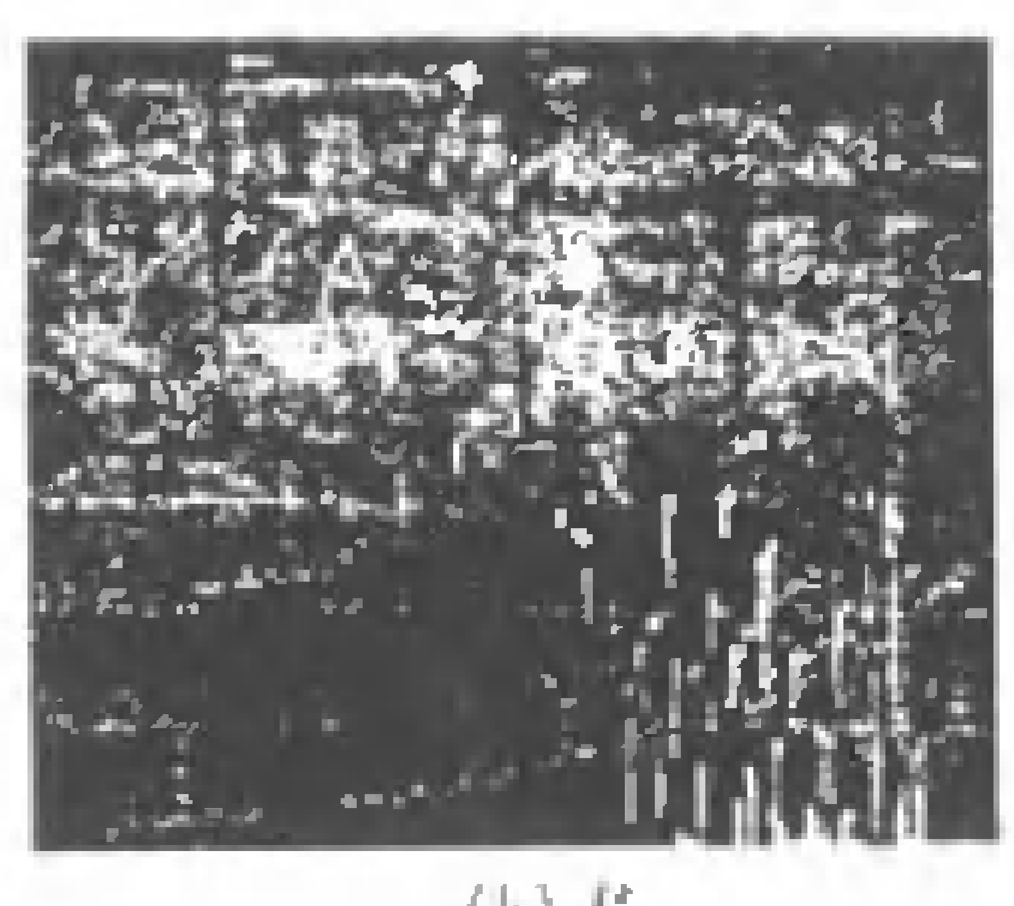


图 4.11　双蜗卷吸引子的投影图



(a) P_{x_1}



(b) P_{x_2}

图 4.12　蔡氏电路输出的功率谱

§4.4.3　非线性电路的离散化

为了进一步研究双蜗卷吸引子的混沌特性，这里将电路状态方程加以离散化，以便进行数值分析.

这里采用 Runge-Kutta 方法.

令　$\Delta t = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \{a_1 F(x_i, t_i) + a_2 F(x_i + b_1 F(x_i, t_i), t_i + b_2 \Delta T)\} \quad (4.24)$$

其中，a_1，a_2 及 b_1，b_2 的选择有多种方式：

1. $a_1 = 1, a_2 = 0$，则

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot F(x_i, t_i) \quad (4.25)$$

2. $a_1 = a_2 = 1/2, b_1 = \Delta t, b_2 = 1$，则

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \{1/2 F(x_i, t_i) + 1/2 F(x_i + \Delta t \cdot F(x_i, t_i), t_{i+1})\} \quad (4.26)$$

3. $a_2 = 1$，则

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot F(x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot F(x_i, t_i), t_i + \frac{\Delta t}{2}) \quad (4.27)$$

对于蔡氏电路，采用式(4.25) 加以离散化，取 $\Delta t = 0.04$，即

得迭代动力方程：(记 v_{c_1} 为 U，v_{c_2} 为 V，i_L 为 I)

$$\begin{cases} U_{i+1} = \left(1 - \dfrac{\Delta t G}{c_1}\right) U_i - \dfrac{\Delta t}{c_1} \cdot g(U_i) + \dfrac{\Delta t G}{c_1} V_i \\ V_{i+1} = \dfrac{\Delta t G}{c_2} U_i + \left(1 - \dfrac{\Delta t G}{c_2}\right) V_i + \dfrac{\Delta t}{c_2} I_i \\ I_{i+1} = -\dfrac{\Delta t}{L} V_i + I_i \end{cases} \tag{4.28}$$

用向量形式表示：

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{f}(x_i), \quad \boldsymbol{x} = (U, V, I) \tag{4.29}$$

其中，$g(U)$ 仍为图 4.9 所示的分段线性函数，也可方便地取为

$$g(U) = a_0 U\left(\frac{a_1{}^2}{3} U^2 - 1\right) \tag{4.30}$$

在计算机模拟仿真时，取

$$\frac{1}{c_1} = 9, \frac{1}{c_2} = 1, \frac{1}{L} = 7, G = \frac{1}{R} = 0.7$$

以及 $m_0 = -0.5, m_1 = -0.8, B_p = 1, \dot{B}_p = 3, m_2 = 5$(或者 $a_0 = 0.8, a_1 = 0.1$).

系统关于状态变量(U, V, I)的稳态输出的平面投影图如图 4.13 所示(数据如表 4 - 1 所示).这里有两个稳定吸引子.一个在外圈，是稳定周期轨道 p_s；另一个在里面，呈双蜗卷状，是混沌吸引子 c.稳定周期轨道 p_s 的吸引域为$A(p_s)$，混沌吸引子 c 的吸引域为 $A(c)$；它们的公共边界 $J = \partial\{A(p_s)\} = \partial\{A(c)\}$.整个 R^3 空间被 J 划分成内、外两部分.当初始状态 x_0 落在 J 的外部时，迭代点序列 x_i 被吸引到稳定周期轨道P_s 上去；当初始状态 x_0 落在 J 的内部时，迭代点序列 x_i 被吸引到混沌吸引子c 上去.J 的作用类似于复动力学中的 Julia 集，称为广义 Julia 集.但也不完全一样，

例如，在 J 上存在一条不稳定的周期轨道 P_J．通常，这个不稳定(鞍形)周期轨道 P_J 不能在示波器观察到，而且由于 P_J 不是斥性周期点之闭包，也不能由 f 的逆向迭代得到，它只能通过一种称为“击中法”来寻找其初始点．

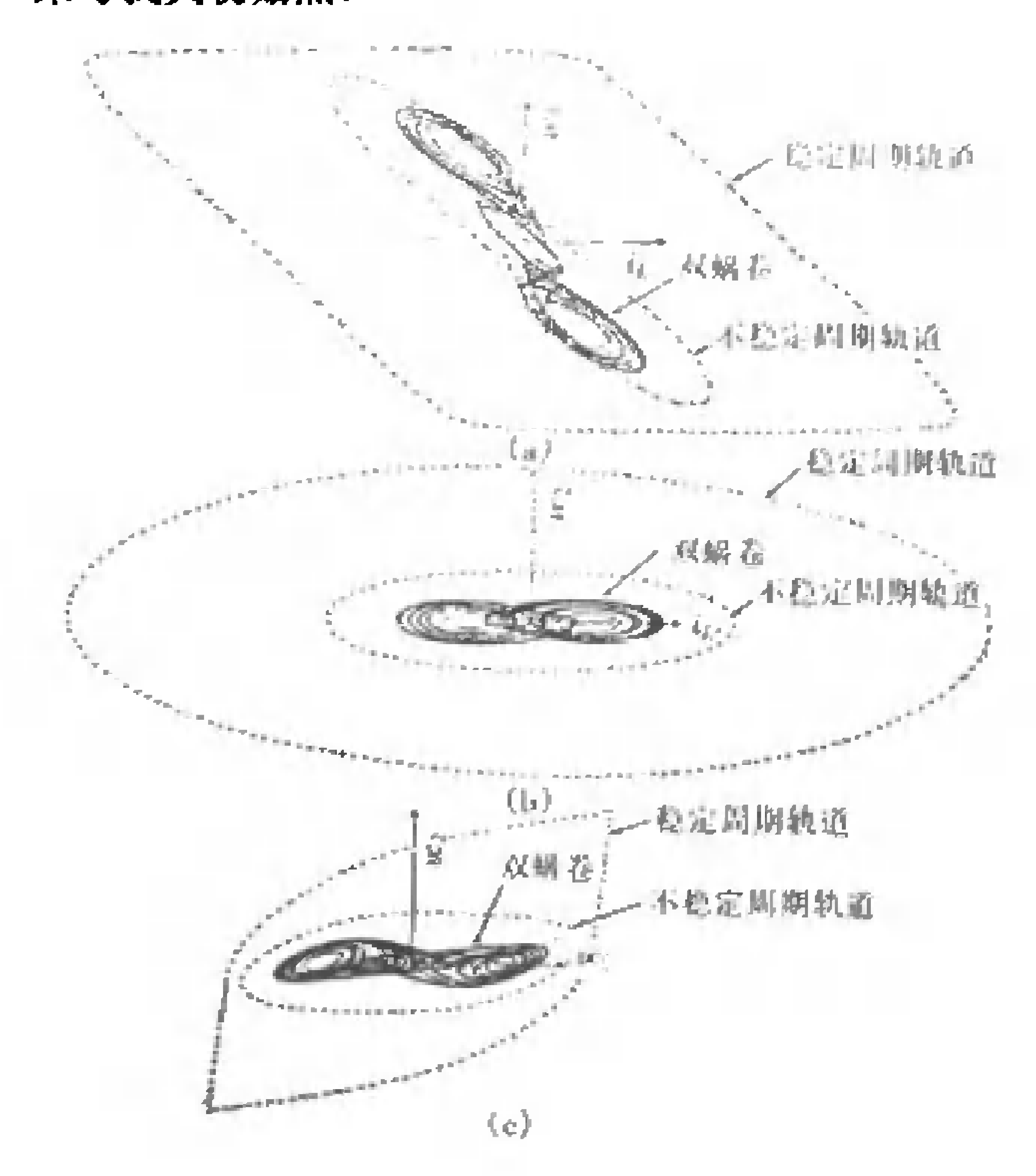


图 4.13　稳定周期轨道、混沌吸引子与不稳定周期轨道的投影图

表 4－1　蔡氏电路实验初始数据及输出状态

初始条件	$v_{c1}(0)$	$v_{c2}(0)$	$i_L(0)$	周期 T
稳定周期轨道 P_S	−3.08832	−1.0423	6.93155	2.87
混沌吸引子 C	0.15264	−0.02281	0.38127	∞
不稳定周期轨道 P_J	2.532735	1.285458×10^{3}	−3.367482	3.54794

图 4.14 是 Poincaré 截面.图中的封闭曲线是吸引域的边界 J 与截面截交时的截线(不是轨道).其内部有混沌吸引子穿过截面时留下的点集,较稠密;其外部有几点由稳定周期轨道穿过截面时留下的点.

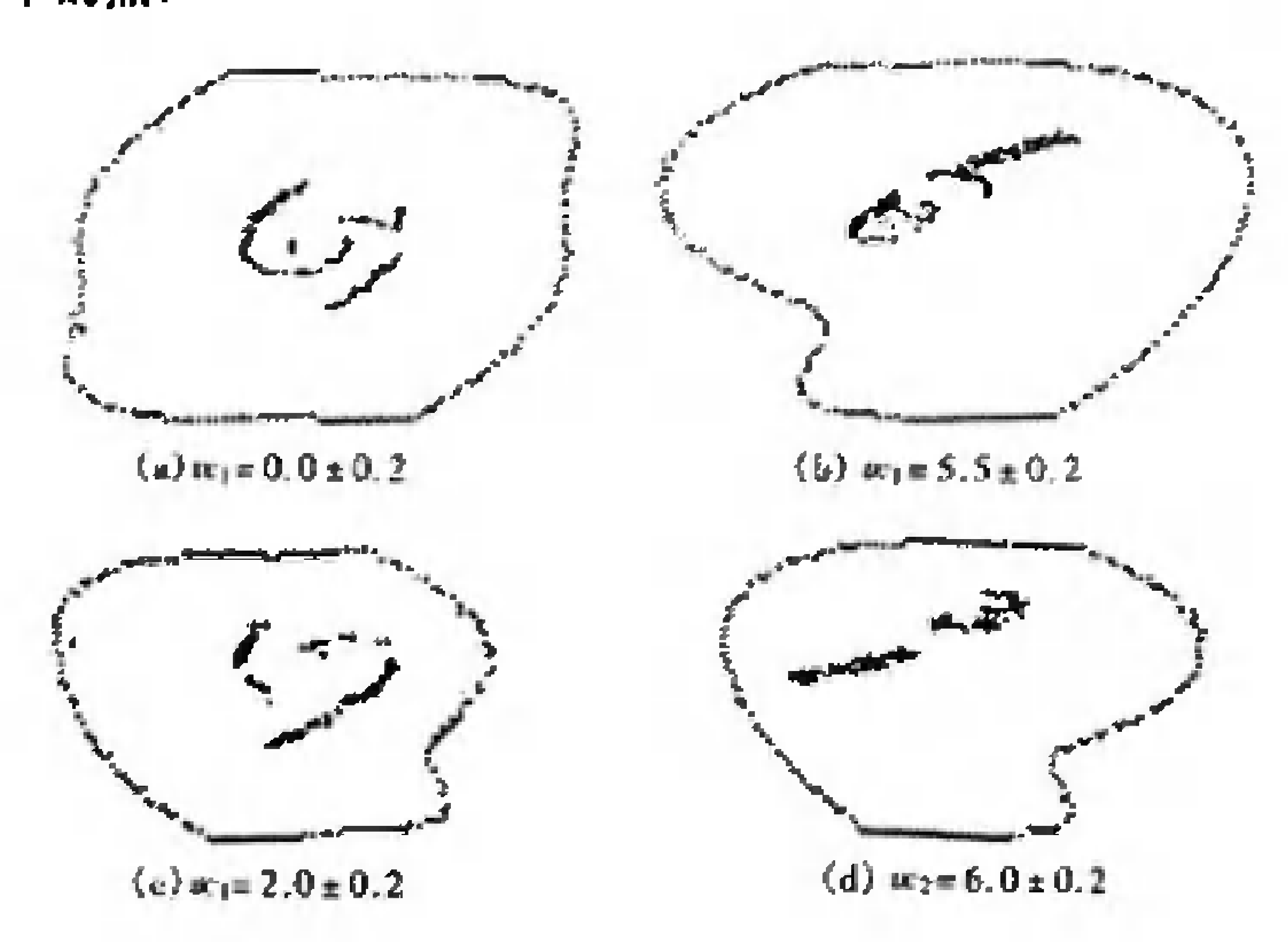


图 4.14　Poincaré 截面(wc_1 为常数)

当系统参数(c_1, c_2, L, G) 发生变化时,蔡氏电路的动力学性态虽较复杂,但仍有规可循.

1. 保持混沌吸引子不变,系统参数范围如下:

$8.29 \leqslant 1/c_1 \leqslant 10.44$,当 $1/c_2 = 1, 1/L = 7, G = 0.7$ 时;

$0.47 \leqslant 1/c_2 \leqslant 1.36$,当 $1/c_1 - 9, 1/L - 7, G - 0.7$ 时;

$5.92 \leqslant 1/L \leqslant 7.91$,当 $1/c_1 = 9, 1/c_2 = 1, G = 0.7$ 时;

$0.48 \leqslant G \leqslant 0.76$,当 $1/c_1 = 9, 1/c_2 = 1, 1/L = 7$ 时.

2. 产生混沌的机制:

在保持 $1/c_2 = 1, 1/L = 7, G = 0.7$ 条件下,改变 c_1,轨道呈现出依次逐步变化的进程.$1/c_1 = 4.5$ 为单曲线相当于稳态时为不动点,$4.5 < 1/c_1 < 5.0$ 为蝌蚪形,$5.0 < 1/c < 5.5$ 为环形,而

后是双圈周期、四圈周期、多重周期，$1/c \approx 8.29$ 为单蜗卷，$8.29 \leqslant 1/c \leqslant 10.44$ 为双蜗卷混沌吸引子，继后 $1/c > 10.44$ 又是叶形周期、卷叶形周期. 于是，便有与一维的逻辑斯谛映射相类似的情况：周期加倍导致混沌，周期 - 混沌 - 周期地交替出现.

§4.5 混沌的诊断与判据

本节内容对于医学实验数据的处理有很大的重要性，一旦实验结果涨落明显似乎规律不明，而手中并无数学模型，这正是大多数实验生物学家面临的情况. 如何区别混沌与噪声呢？

过去，FFT 可把看来无规则的涨落处理为频域上的图形，对于真正周期来说频域图上是一个尖峰，而似乎连续的一片则正是表现了非周期的振荡. 尖峰也在基频与次谐波之不同，那似乎连续一片；像带样的，似乎并无可见的构造. 可见，常规的 FFT 无法区别噪声与混沌，因为真正的噪声应当是一条平坦的带.

多年临床应用脑电图证明目力观测是有用的. 关键在于用目力去看倍周期，可以凝视振幅也可以凝视周期. 下面我们围绕振幅来叙述，而读者可以想到围绕周期的方法是类似的.

如果出现交替出现的高低振幅，或者是某些反复出现的由不同高度的振幅组成的图形(例如癫痫中的放电，会出现高振幅的尖波，在过了约 30 秒后，这些尖波成群夹着一个慢波)：这种图形揭示某一种痉挛性的有结构的阵发性过程，这时可以稍稍变动着参数(例如时间) 去看有无把周期加倍，或减半的现象，如果是这样，就意味着沿着倍周期(即加一倍周期性) 的方向正是指向出现混沌的地方.

但是不一定必然如此，因为系统未必由倍周期而再一次倍周期而积累成为混沌，有时会突然出现混沌(格里波基)，也可以经过间隙性形式. 有时，用目力看不到倍周期分岔却有混沌存在，也许原因是参数变动范围不凑巧(即用目力看时凝视那一小段的头与尾选得不合适).

一旦看出倍周期，则可以计算参数至倍周期累积处的收敛率 Δ，看看是否为 Feigenbaum 数. 当然，做起来并非是件易事，可能每次倍周期之间的参数值距离下降得太快，于是无法计算 Feigenbaum 数. 为了估算其极限值这是不够的，甚至可以算出 Δ 也没有诊断混沌的价值，因为非 Feigenbaum 分岔也可导致混沌，所以下不了结论.

如果一旦发现你面对的数据全是一序列无明显规则的峰，那么第一件要做的事就是去看递次的振幅之间有没有什么函数关系，即绘出一张"递次振幅图"，所得曲线可以是一条很明确的曲线也可以是一大堆无结构的点.

(1) 如果有一条明确的线，结论：存在混沌，而且它来自二对一，三对一 …… 的映射.

(2) 如果虽非一条明确的线，但也有些规律，是一种结构，则原动力系统类似于(6.1) 式那样的 Henon 映射，当然也是混沌.

(3) 如果全无结构，它可能是混沌，也可能是噪声.

实验家常常面对这样的情况，仅能在许多自变量中测一个自变量(脑功能自变量很多，如果仅测脑电图便是如此). 理想的情况是同步测出一切自变量的时间序列，这有利于重建动力系统.

这里介绍两种从一组时间序列重建一个多维吸引子的动力学模型的方法：

(1) 递次计算 $\dot{x}(t)$，$\ddot{x}(t)$…，这是用计算数学方法很容易地由原时间序列 $x(t)$ 算出. 而后在 n 维相空间里去画出来(1980 年 Packard 等). 在实际上是把 $\dot{x}(t)$、$\ddot{x}(t)$ 与 $x(t)$ 画在一起成为一个三维空间的图也就可以了. 这在一般微机上均可实现，有现成的三维图像软件. 利用这个方法要求数据光滑，一般正常的脑电图在一般的 *AD*/*DA* 板上取样也就可以得到，特殊情形要密集取样，以确保数据光滑.

(2) 选定一个固定的时间滞后量 T，不断递次在 m- 维空间里去画出 $x(t)$，$x(t+T)$，$(x+2T)$，…，$x(t+(m-1)T)$ 个坐标所决定的一个 m 维空间内的一点，T 的选定并不太关键，如果你

猜想，你所面对的动力系统含有 N 个自变量，你所得的这种图，只要 $m > 2N + 1$，那么都可得到同样性质的图像性质（Takens 1981）. 在实际工作中 m 常用得很小，也就解决了诊断混沌的问题.

条件是，在继续增加 m 的值时，图形中不表现结构的增加. 图 4.15 就是用这种技术诊断判定了著名的化学反应伯洛乌索夫 - 扎波金斯反应内的混沌，在这里用的 m 只不过是 3. 对于所得的 $x(t)$、$x(t+T)$、$x(t+2T)$ 所画出的相图，我们用一个垂直于纸面的平面，像在图 4.15B 的虚线所画的位置切下去，看一看这个庞加莱截面上，表现轨线穿过的点所构成的图像，这就是图 4.15C. 可见这 Poincaré 截面显示一个薄片样结构，由这个图上一点位置 $P(N)$ 作横坐标，$P(N+1)$ 即后一个点的位置做纵坐标，这样便得到离散映射，可以断定混沌的存在，这个计算所选定的 T，在图 4.15A 中用 H 来标出，即 τ.

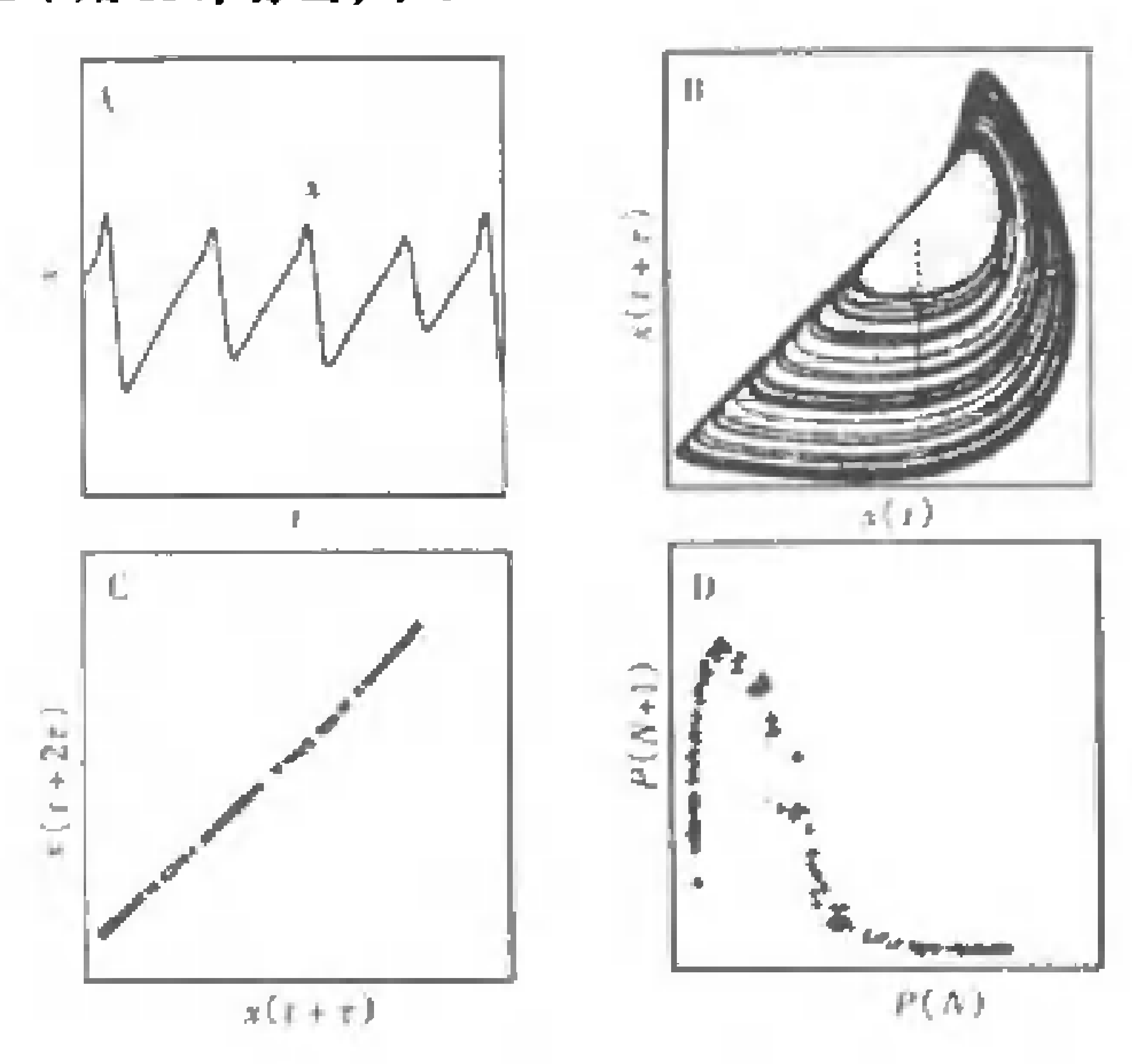


图 4.15　伯洛乌索夫　扎波金斯基反应中的混沌吸引子，x 是用溴离子电极所测溴离子浓度，(A) 是时间序列，(B) 是三维相图二维投影，(C)、(D) 见正文

§4.6 兴奋性细胞中的混沌

不论是植物还是动物，都有巨型兴奋性细胞，在电生理学家手中已经研究了几十年.大量实验有待于解释，因为它们是巨型的细胞可以插入微电极去研究，实验中一定是看见过多次混沌现象，可惜没有理论上的进步，混沌动力学尚未发展起来所以看到也不理解.

有一种淡水藻，叫丽藻，又名降藻，常用的是柔曲丽藻(nitella flexilis)，用它的节间丝细胞可以看到使用周期刺激时，它的电位变化.一旦周期刺激的频率很慢，可以看见频率捕捉现象.一旦周期刺激频率加快一些，可以看到出现周期了，证明混沌的存在，这在图 4.16(a) 与(b) 中显示得很清楚.

使用闪频相图来处理这两组(a) 与(b) 不同的数据，可以得到(c) 与(d)，而在(d) 中，应用 Li-Yorke 定理可断言混沌存在，而(b) 这个图中的曲线(反应曲线)，也就是告诉我们什么样的时间序列是混沌.这在脑电图中，心律不齐的心脏中是常见的，实验数据还揭示通向混沌经过了间歇阶段.

利用另一种海洋产的软体动物 onchidum verruculatum 的神经原及起搏神经原，也可以做类似的研究，图 4.17 是此时的闪频相图.针对非周期振荡可以得出与 4.16 图中的 4(d) 相似的结果证明其混沌之存在.可见也是通过闪歇历程而进入混沌的，在大乌贼的轴突中也得到其实相同的结果.

日本的 Hayashi 等在丽藻等实验中因他们用了混沌动力学从而做出了成功的说明.

日本的 Aihara(1994) 更进了一步.他们一面用实验，一面用在神经膜电位上已确立的 Hodgkin-Huxley 方程加周期扰动项来做计算机模拟得到了相符的结果.

数字模拟可以确知通向混沌之路是多条的，既可以是倍周期分岔也可以是间歇式的，用闪频相图可以看到吸引子.这图并不给

出简单的单值的曲线，却给出了Henon映射那样的一个分形结构.可以断言这里的图不可能给出一维传递函数.

不做实验而在数学上对Hodgkin-Huxley方程加扰动项也是一种很好的研究方法.Holden等(1984)及Jensen等(1983)计算了最大李氏指数为0.11ms^{-1}是混沌频率，说明发散率很慢，这有生物学意义——神经现象是可以用这个方法来继续研究的.

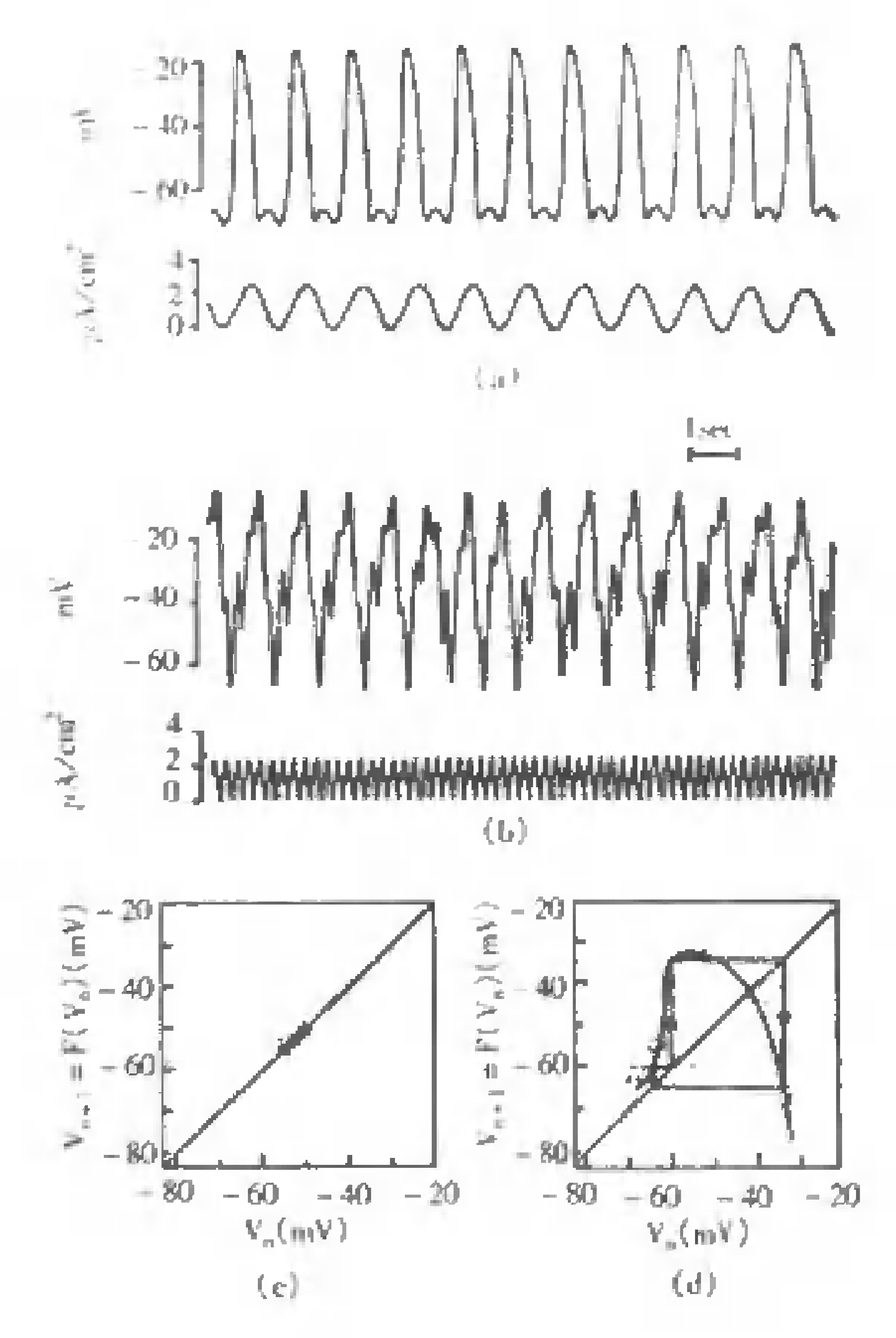


图4.16 (a)与(b)中上一条是巨型节间细胞(丽藻)的电位变化，每条下的一小条是输入的周期刺激，全是正弦波 (a)中表现了频率捕捉，即同步，(b)中则表现了混沌(c)是(a)的闪频传递函数，(d)是(b)的闪频传递函数，其做图法专取峰值.前一峰做横坐标，后一峰值做纵坐标，(d)中箭头指出了周期3的存在

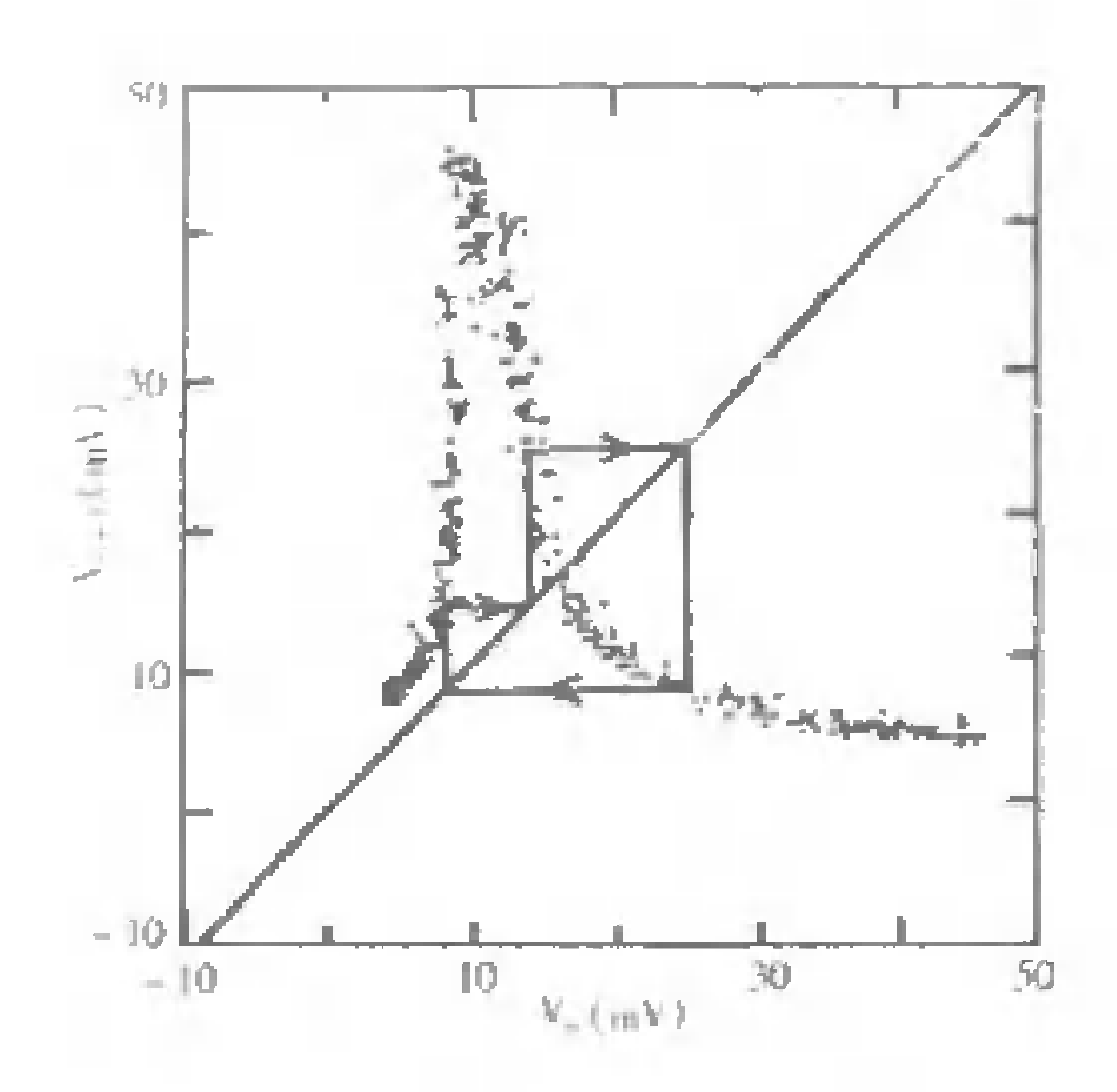


图 4.17　对软体动物 Onchidium 巨形神经原用周期变化的电流刺激，把所得混沌反应作闪频传递函数图．此图做法与图 16(c) 及图 16(d) 相同．箭头处为周期 3 的地方 (Hayashi 1982)

研究各种药物诱发神经膜电位的混沌是混沌药理学的热门课题．蜗牛是一个好的实验材料，一种池塘蜗牛 lymnea stagnalis 有一个特大神经原可供记录，在 K^+ 阻断药、惊厥药 TEA 及 4 氨基吡啶作用下可见由倍周期而至混沌，结论是膜本身有非线性性质．1984 年 Chay 曾用数学模型模拟此情形，此时可一开始就出现周期了，钙离子在这个领域中居领先地位；用这个模型可见多值的曲线峰显于递次振幅图中．由于广大冠心病患者使用钙离子阻断药出现异速搏停，这一项研究面临重大实用价值．

分泌胰岛素的胰岛里有 β 细胞，它也有电位可以记录，也用 Hodgkin-Huxley 方程加扰动项，这是由于细胞内钙离子的摄入受葡萄糖的控制，Chay 1985 年证明存在混沌：钙离子浓度 C 可以有一维映射

$$C_{n+1} = F(C_n) \tag{4.31}$$

表现混沌性态，这与糖尿病的病理，治疗学有很大的关系，早在 1976

年 Meissner 就记录出混沌不规则电位，因无理论知识而视而不见！垂体与下视丘之间的混沌动力学有实用价值 —— 垂体移植.

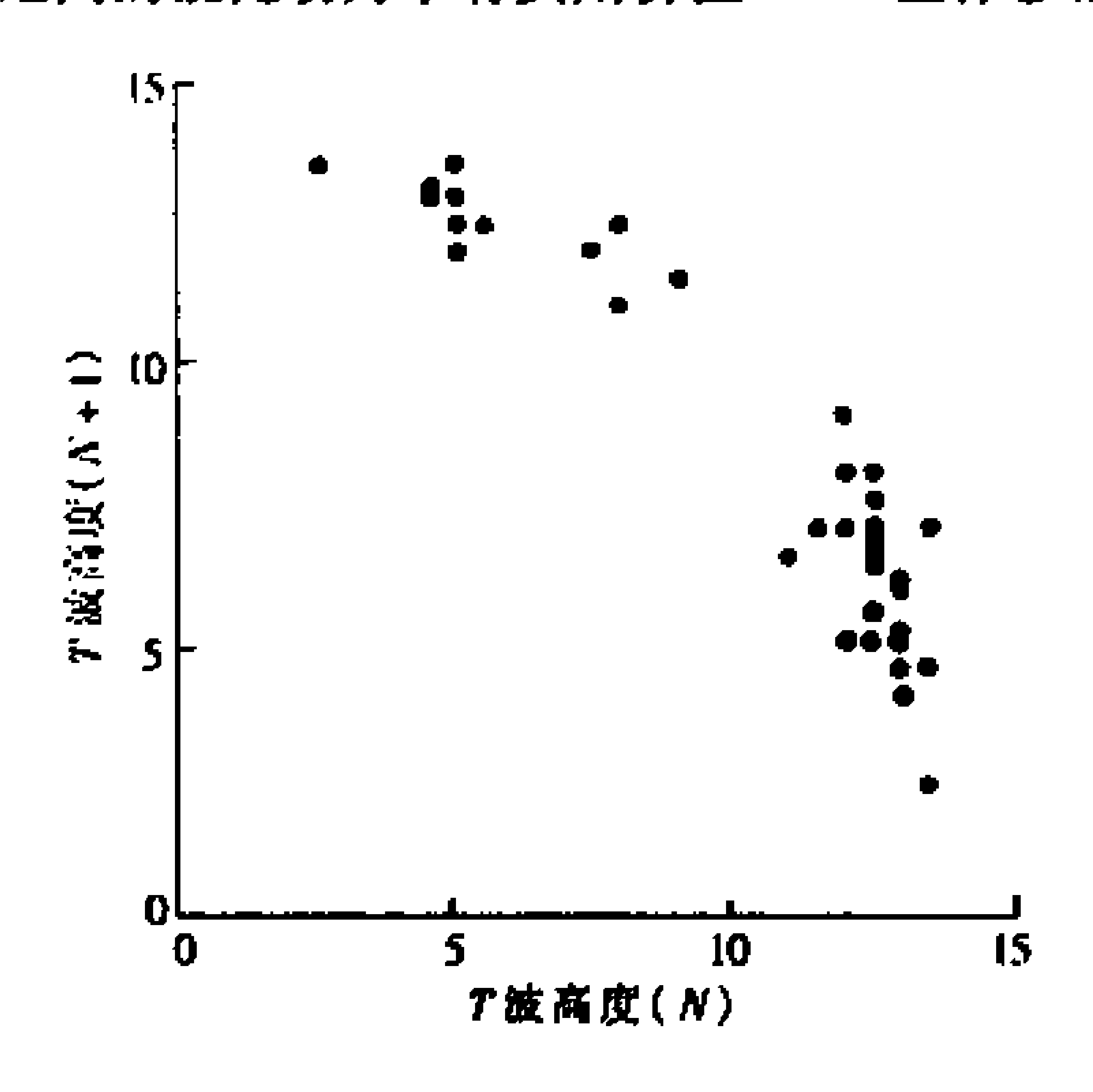


图 4.18　一支用正肾上腺素处理的狗 48 次心脏搏动中 T 波高度的递次振幅图

§4.7　心脏搏动中的混沌

医学界正处在混沌研究的热潮之中，自 1977 年 Mackey 与 Glass 倡导之日起，已蓬勃发展至今. 1984 年 Ritzenberg 等用正肾上腺素静注，使狗麻醉，记录心电图可得到周期逐次多重化. 针对 T 波可绘制递次振幅图，如图 4.20，可见相邻两次搏动的 T 波高是相关的.

显然在这个图中并无明确的一维映射. 如果硬要把它看成是一维映射，那么它便是不像那些不逆的，而是可逆的. 总之并无混沌的证据！这种研究结果怎么办？再进行一种试验！

使用鸡胚心脏培养于玻璃器皿之中，Glass 在 1984 年使用周期电脉冲刺激，或单一脉冲刺激. 如此，可得因扰动电脉冲重新调整自发心肌细胞搏动的扰动周期长度，此长度称为“扰动之瞬间，

收缩处于何相位"的函数，这样可得Poincaré图，见图4.19.利用这个图可以研究周期脉冲的重新调整效应的机制，这有十分广泛的生理学与病理学的意义.他开辟了心律不齐数学的先河.

在周期扰动的冲击之下，可以发生如下现象；在周期扰动不断增加频率的历程中有：

(1) 锁相；

(2) 倍周期；

(3) 不规则的动力性态.

这种把单一脉冲扰动的结果与周期扰动的结果联系在一起研究很值得效法.例如，可以移植于神经系统的研究中.

图4.19是用单一脉冲扰动胚心肌细胞的相位的庞加莱图，而图4.20则是周期扰动的反应，表示于时间 t_s 的历程中，其中 A 是实验结果，B 是由图4.19算出的结果，C 是其中的一段；它有复杂动力学性态.

有时，Poincaré迭代出现倍周期却不导致混沌，分岔序列逆转而再度出现极限环；尽管此时扰动频率继续增加.

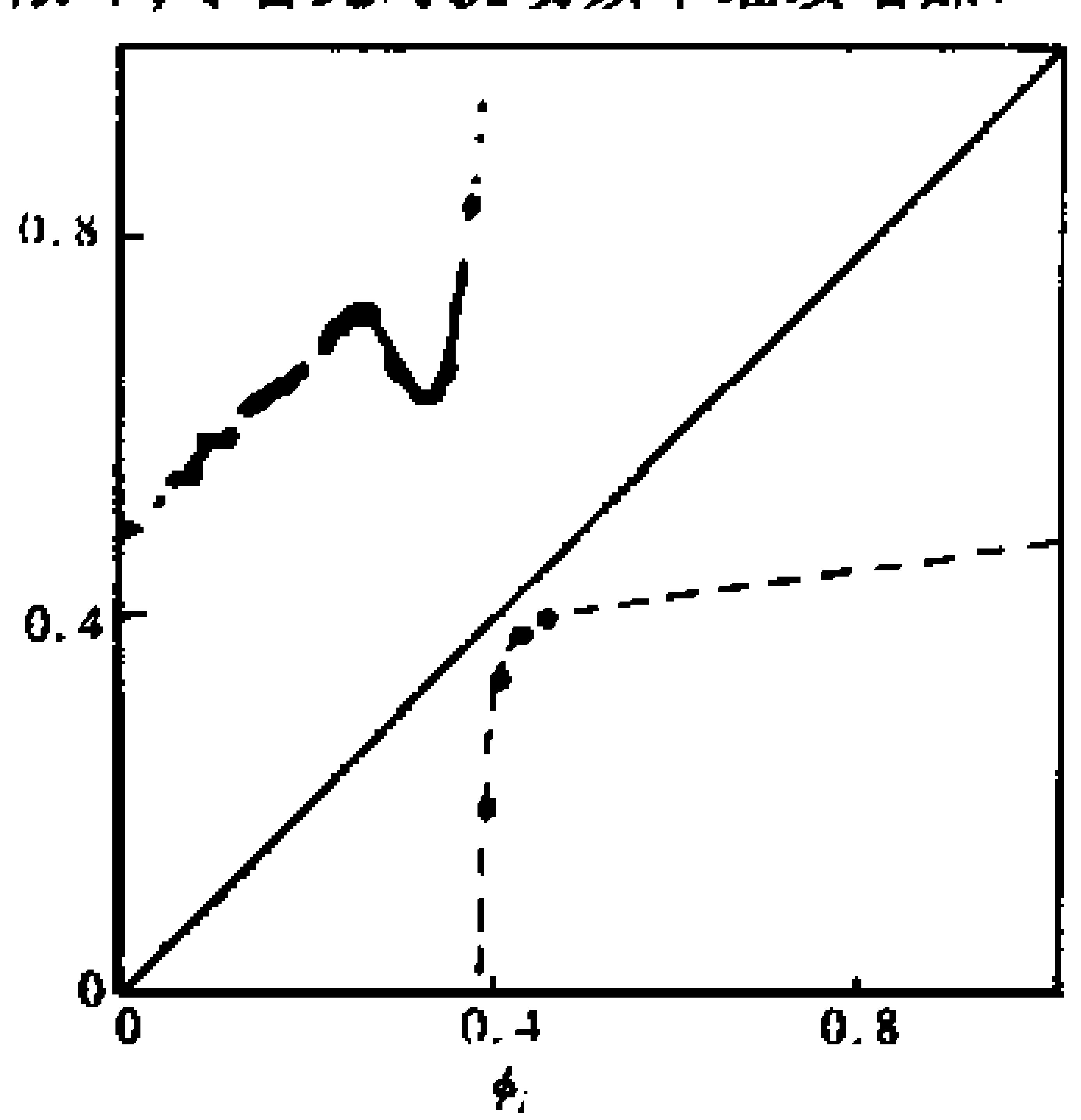


图4.19 单脉冲扰动鸡胚心细胞的Poincaré图.ϕ 的计算方法是以自发的周期为1；有了单脉冲扰动之后，落入这个1中的造成扰动发生的时间占1的零点几(Guevara，Glass等1981)

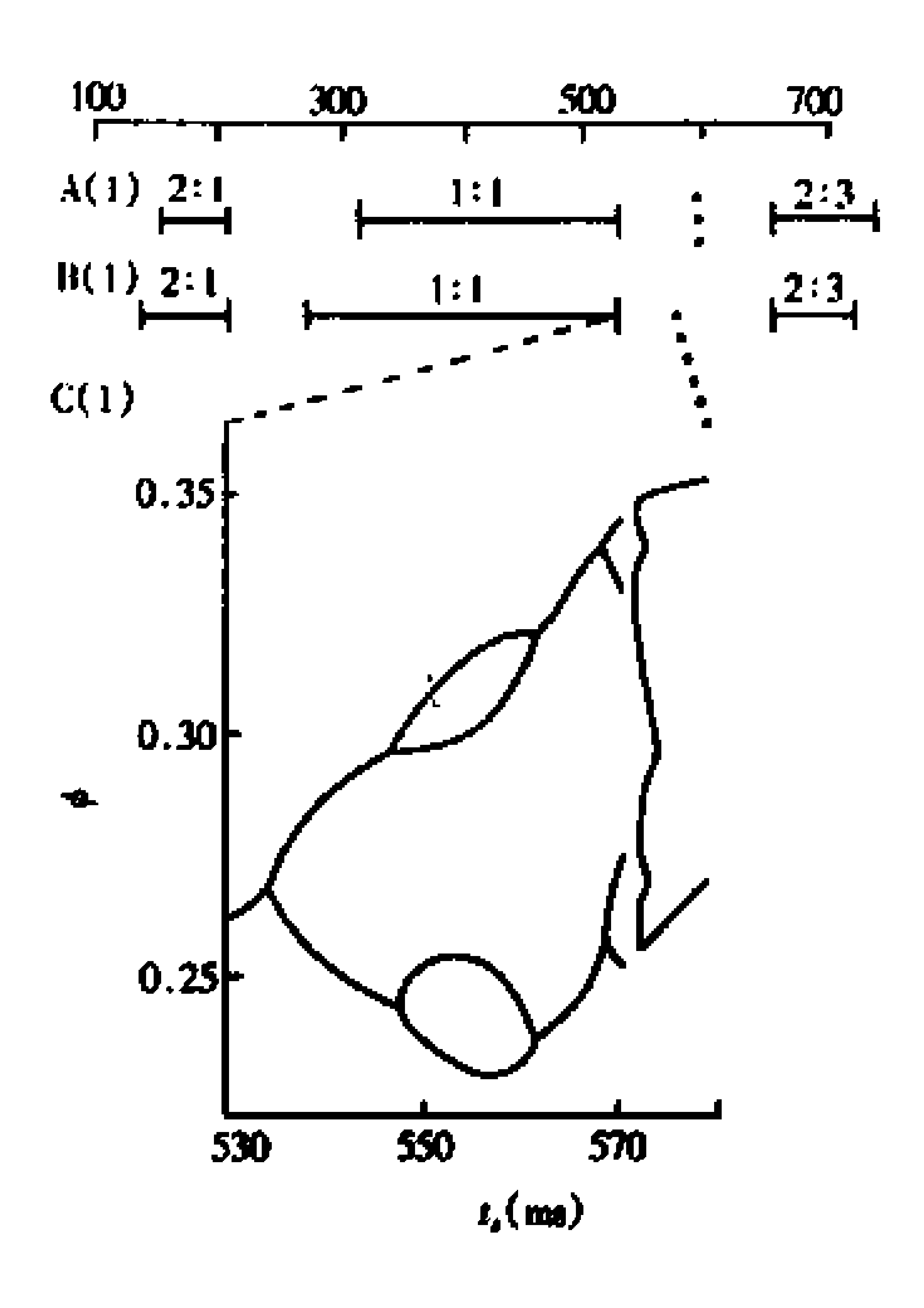


图 4.20 周期扰动的反应

心脏电生理的理论中最完美的模型是 1977 年 Beeler-Reuter 微分方程组($B-R$ 方程组).它可以表现在恒定刺激之下实验中所表现的反应.这个微分方程组有些像 Hodgkin-Huxley 方程.也是用钳电压实验作为根据.由膜离子流作为讨论的基础,$B-R$ 方程组是由八个非线性微分方程所组成. 1984 年 Jensen 等研究了 $B-R$ 方程在正弦波刺激作用下的反应,他们发现了锁相与非周期有序性,功率谱表现带状,揭示混沌的存在.针对一个非周期解,他们算了相当于微分方程数目的全套李氏数,最大李氏数为 0.004ms^{-1}.这完全肯定了混沌的存在.似乎,随刺激频率变化,倍周期导致混沌.

§4.8　流行病的混沌动力性态

传染病因有两大类．一类是较大的寄生虫引起的，如外寄生昆虫和寄生蠕虫．另一类是比较小的如病毒、细菌、原生动物．这一类型常以年计的周期爆发，例如腮腺炎与水痘；在纽约有可靠的记录，从 1928 ~ 1972 年，表示于图 4.21．巴提摩尔也有麻疹的记录，它不是一年一爆发却是二三年来一次，在过去都用随机过程来说明这种流行病学中的不规则动力学性态(Andersn 1982)．

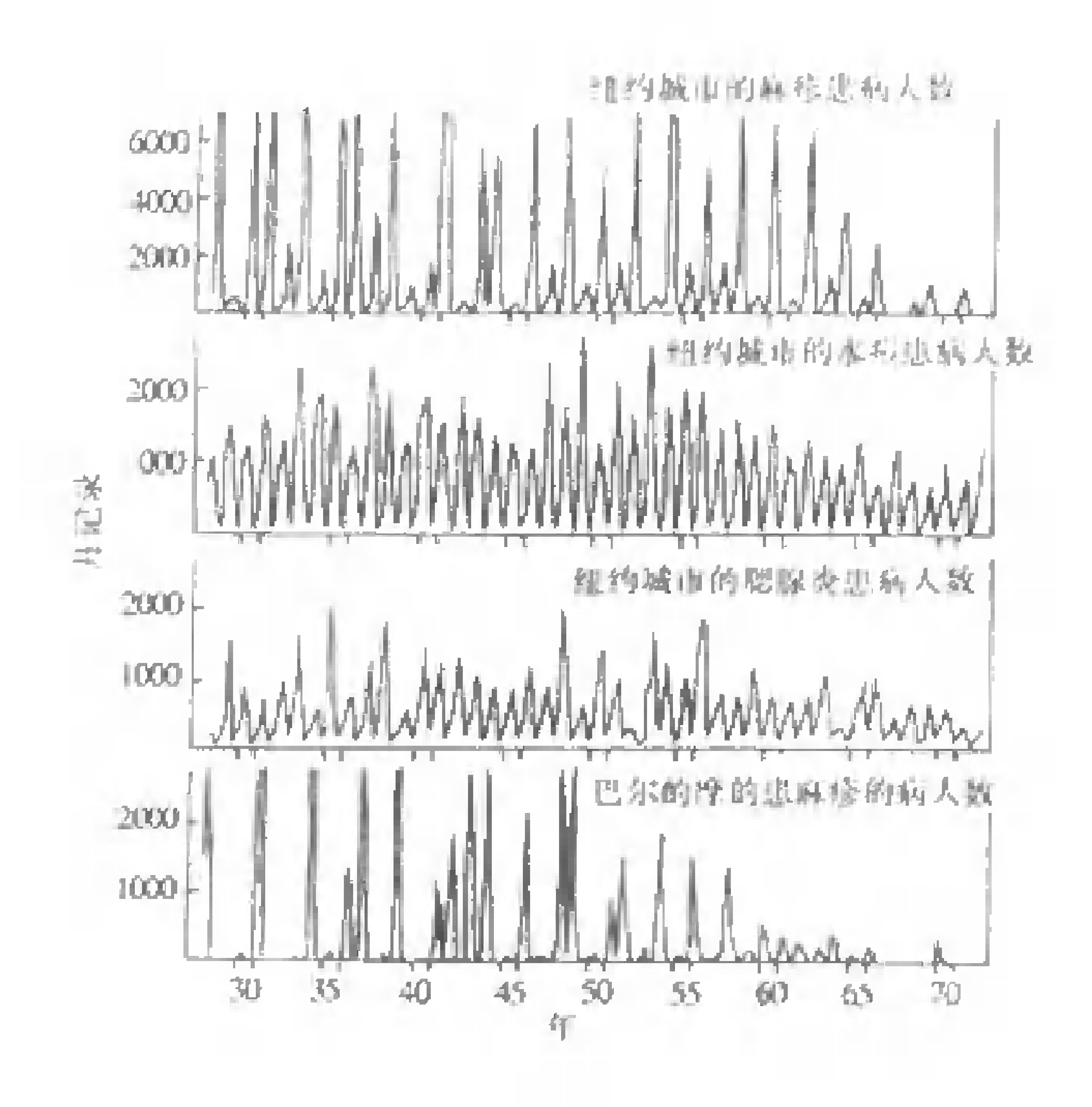


图 4.21　麻疹、水痘、腮腺炎发病的逐月记录(1928 ~ 1972 年)

但在 1985 年 Schaffer 等，用 §4.5 中的数学方法去研究有了新发展．

仍然用这个数据，可以做出 $N(t)$、$N(t+h)$、$N(t+2h)$ 来画出相图. N 就是(病例数)/月. h 是选2或3月，作为时滞，如此可得图 4.22 与图 4.23.

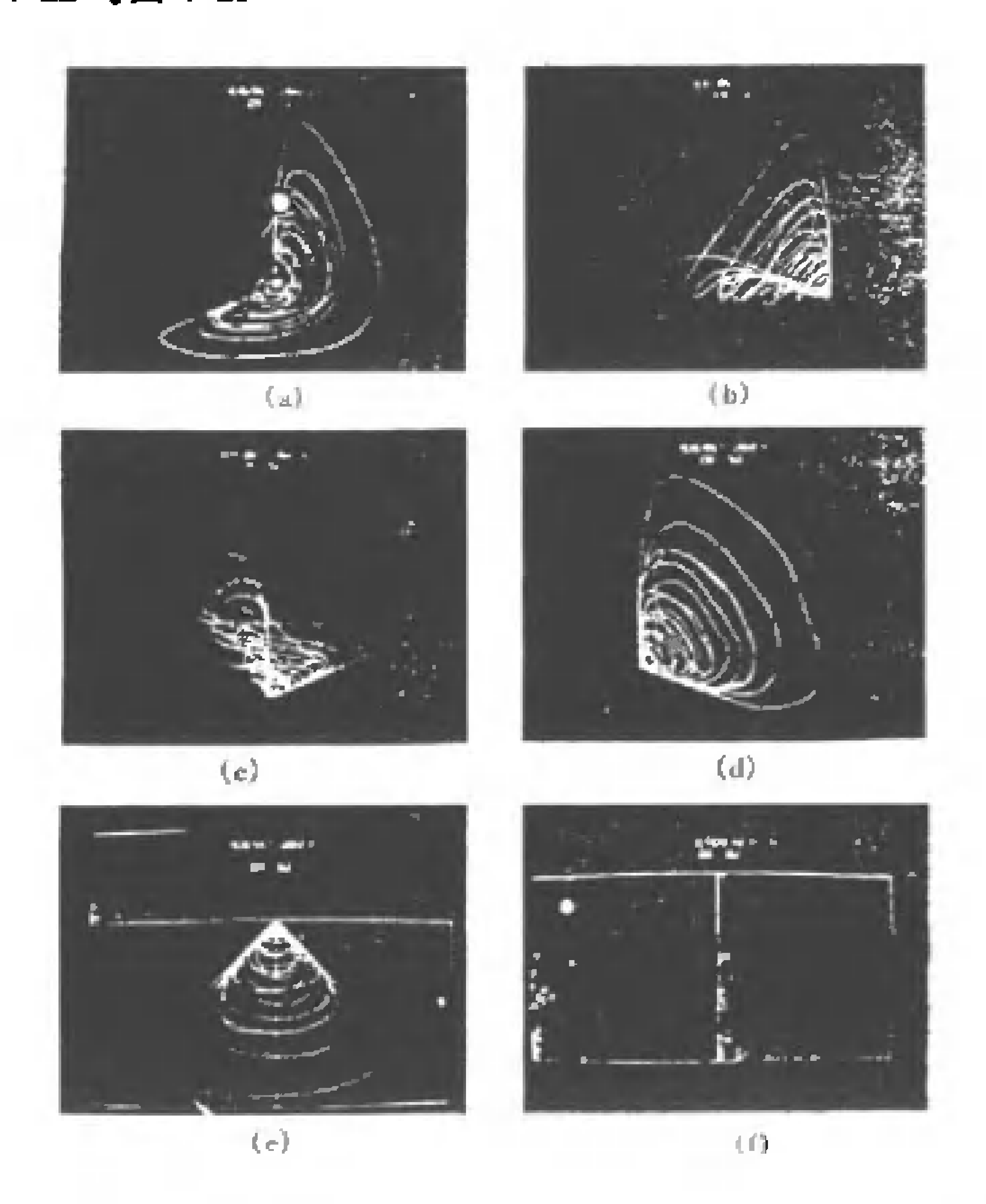


图 4.22 从图 4.21 纽约麻疹数据使之"光滑化"用"插入法". (a) ~ (d) 用 $h=3$ 月，可在这三维图像的四个不同角度观看；(e) 是由顶上看，并用垂直所示的平面切开，其上显出一个小框是 Poincaré 图；(f) 是 Poincaré 图的放大(左)并把它所推出的一维映射图显示于 f(右)

这中间三个相图均作出了 Poincaré 图. 显出 V 形对半线，说明这"流"局限于近乎二维的圆锥面上，由断面的一支上取的点递次做横纵坐标值，这样处理纽约、巴尔的摩尔的麻疹数据都得到近乎

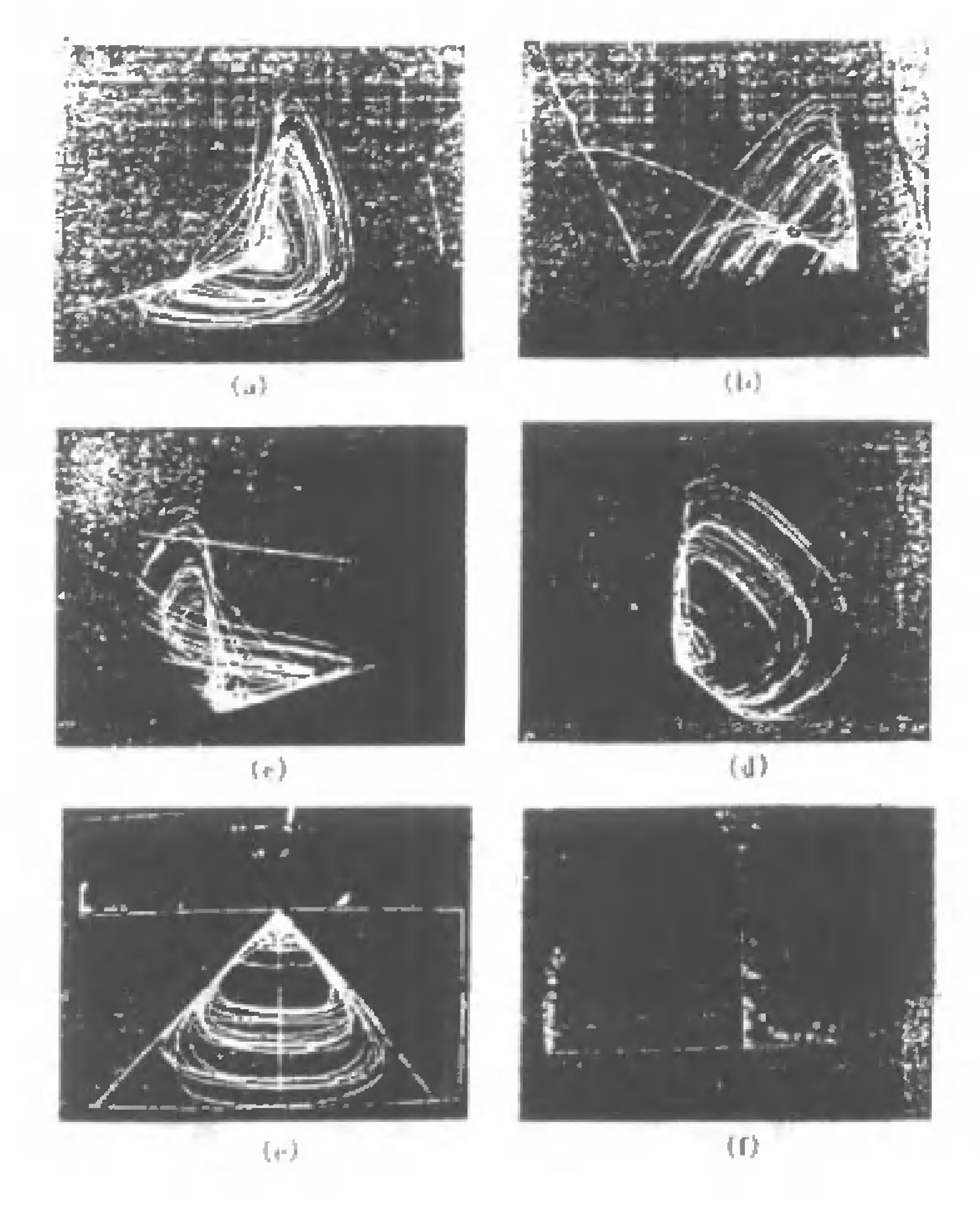


图 4.23 巴尔的摩尔麻疹数据，处理与图 32 相同

一维单峰映射，但对水痘及腮腺炎数据都没有找到规律. 另外，麻疹李氏指数为正值.

1985 年 Schaffer 等对一维映射加随机振荡项来说明问题.

$$X_{t+1} = X_t \exp r(1 - X_t) \tag{4.32}$$

其中 r 取不同的值. 这里有惊人的现象.

当动力性态以小的整数为周期时，噪声可以使潜在的函数关

系完全模糊.但是,在混沌动力学行为中却不是这样,这有力地支持了麻疹是混沌流行病的观点,但腮腺炎与水痘则不是,所以它们易受随机噪声影响.这一观点在1986年哥本哈根麻疹数据也得到同样证明.用没有随机项的微分方程模拟流行病曾有1980的May与1984的Aron等,也十分成功.

§4.9 细胞间信号传递中的混沌

自从在进化历程中出现了多细胞生物,细胞与细胞之间信号传递就是一个极重要的形态(组织分化)与功能(神经与内分泌)的关键环节,它在进化上本来就是由单细胞生物与单细胞生物之间的联系发展而来的.本来单细胞就向环境释放代谢产物,代谢产物影响其他单细胞作用又得到反馈作用,这反馈可以带来振荡,这振荡中可以出现混沌,而这混沌正是推动进化的信息之源.

盘基网柄菌曾是这个问题的研究对象,它是一种黏菌,时而单细胞,时而多细胞,依靠环磷腺苷CAMP作为信号,它并不只是一个化学信号,它以CAMP的振荡作为信号时,可以诱使其他细胞共同形成一团,这叫聚集现象.

这化学波可以是周期的,也可以是非周期的,与遗传变种有关.1974年Durston发现过盘基网柄菌(dictyostelium discoideum)的一个变种,此变种的化学周期是变化的,表现了混沌.在1985年经Martiel与Goldbeter证实,他们的方程有7个,有两个耦合振荡机制构成,有些像图4.19,在某些参数值上是单周期,或双周期,有时即产生混沌.这与1974年的实验观察中看到非周期聚集相符合,因为聚集是可以看到的花样,这与高等生物的组织发生有些类似.

1984年King等针对神经系统中多巴胺系统内的细胞间信号传输建立了数学模型.对于某些参数的值是能够体现多巴胺在突触后的受体的效能的,而另一些参数值对应于向多巴胺细胞的去极化输出的,调到一些特定的范围时,多巴胺细胞的神经冲动释放率便呈混沌态,其可用于解释精神分裂的症状.

第五章　非线性系统中混沌的控制与同步

混沌现象是20世纪最重要的科学发现之一.它揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性,如有序与无序的统一,确定性与随机性的统一,这大大拓广了人们的视野,加深了人们对客观世界的认识.它在自然科学和社会科学等领域中,覆盖面之大、跨学科之广、综合性之强,发展前景及影响之深远都是空前的.国际上誉称混沌的发现,乃是继20世纪相对论与量子力学问世以来的第三次物理学大革命,这场革命正在冲击和改变着几乎所有科学和技术领域,向我们提出了巨大的挑战.

混沌的发现已过而立之年.首先的问题是,混沌究竟有什么应用和发展前景?这是摆在人们面前的一个重大与普遍关注的问题.

由于混沌的奇异特性,特别是对初始条件的高度敏感性,使得有些人总觉得混沌是不可靠的,不可控的,因而是无法应用的.

20世纪90年代以来,国际上关于混沌控制及混沌同步研究的突破性进展,使混沌的可能应用出现了契机.

混沌同步原理及混沌控制方法,在1990年先后提出,前者是由美国的海军实验室的学者Pecora和Carroll提出,他们在电子线路上首先实现了混沌同步,后者是由美国马里兰大学的物理学家奥特(Ott),格里博古(Grebogi)和约克(Yorke)提出,称为OGY方法.同年该校的Ditto等人利用该法首次在一个物理系统上,即磁弹性体上实现了对周期一的稳定控制.随后,国际上混沌控制方法及其实验的研究迅速发展,混沌同步也获得进一步拓广,大大推进了应用研究,诸如在电子学、机密通讯、密码学、激光、化学生物、脑科学、神经网络及系统工程等众多领域中,都有很大的应用潜力.

在自然界及实验室里,由于学科、领域和部门的不同,非线性

系统多种多样，混沌行为千姿百态，相应的混沌控制及其应用也是多姿多彩.从混沌的类型上，大体可以分为四大类：第一类只产生时间混沌，第二类只产生空间混沌，第三类同时产生时间与空间混沌，第四类产生功能混沌.跟丰富多彩的混沌行为相比，目前的混沌控制方法及其应用的研究，只不过刚刚开始，目前还只是较多地集中在第一类混沌的控制与应用上，时空混沌的控制问题也引起了注意，其他类型的混沌控制尚待展开，因此，这是一个大有作为的广阔研究领域.

迄今，混沌控制的目标有两种：一种是基于在混沌吸引子内存在无穷多的周期轨道，控制的目标是对其中某个不稳定周期轨道进行有效的稳定控制，另一种控制目标则不要求必须稳定控制原系统中的周期轨道，而只要通过可能的策略、方法及途径，得到我们所需的周期轨道即可，或抑制掉混沌行为.

目前国内外已经提出了许多不同的混沌控制方法，适用于各种情形下的混沌控制，从非线性系统的类型上说，有些方法适于离散非线性系统，有些则适于连续非线性系统，从控制原理上可分为微扰反馈控制法与无反馈控制法，前者反馈的对象可以是系统参数、系统变量、外部参数(强度、相位等)等等.对不同对象的微扰反馈，则产生不同的控制方法，它们的共同点都是利用与时间有关的连续小微扰作为控制信号，当微扰趋于零或变得很小时，则将实现对特定所需的周期轨道或非周期轨道的稳定控制，也就是达到前面的第一种控制目标.无反馈控制法，用于实现第二种控制目标，它与一些特定的所需轨道无关，因而当实现系统控制时，受控输入信号并不趋于零，并且受控后的动力学行为可能与原系统的大不相同，即产生了新的动力学行为.

混沌同步，从总体上说，属于混沌控制的范畴，迄今已发现了几种类型的混沌同步.第一种类型就是 Pceora 和 Carroll 提出的同步方案，其中存在驱动与被驱动(响应)关系，他们把混沌系统分成稳定部分和不稳定部分，把具有负的李雅普诺夫指数的稳定部分复制成一个响应系统，然后把响应系统与驱动系统用驱动系统中

的驱动信号耦合起来，由此可达到响应系统与驱动系统同步．近年来该类型同步已经拓广到非混沌同步（即周期、准周期同步等）及高阶同步．第二种类型的混沌同步则是两个不同混沌系统相互耦合，由 Gaponov - Grekhov 及其合作者在研究流体湍流时提出的，后来 Rahman 等从理论上研究了半导体激光阵列系统中的混沌同步的可能性，1994 年美国的 Roy 和 Thornbury 及日本的 Srgawara、Tachikawa、Tsukamoto 等人已分别独立地从实验上观察到两个混沌的激光系统达到完全同步，他们就是利用激光光强相互耦合的结果，前者用两个 Nd:YAG 混沌激光系统，后者用两个 PQS 混沌激光系统，达到异曲同工之妙．Liu 和 Leite 从数值上研究了两个 CO_2 激光系统耦合，也达到了混沌同步．第三种类型的混沌同步是通过与时间有关的小微扰的连续反馈方法，该法首先由 Pyrugns 提出，他又与 Tamasercius 从实验上验证，Pu 等人也用电子线路实现了．第四种类型的混沌同步是由 Maritan 和 Banavar 发展的由噪声感应导致同步的技术．他们证明了两个混沌系统在相同的噪声作用下，只要噪声强度足够大，就可能导致两个系统实现混沌同步，混沌同步是混沌控制领域中一个极其诱人的课题，由于具有巨大的应用潜力，引起了国内外的极大关注与兴趣．

我们知道，表征非线性系统的混沌行为的主要特征量是所谓的李雅普诺夫指数 λ，它刻画了系统对初始条件的高度敏感性，通常低维混沌系统只有一个指数值 λ 大于零，上述混沌同步和混沌控制一般即指这种情形．但是，实际上在自然界及社会经济等领域中广泛存在着高维非线性系统，诸如在受控聚变托克马克装置中等离子的不稳定性 —— 混沌现象，亦与无穷维有关．由多路（多元）激光器所构成的总体激光装置，经济领域中自由市场、股市等复杂系统等等，它们可能存在一个以上正的李雅普诺夫指数 λ_i（$i = 1,2,\cdots$）的混沌行为，人们称之为超混沌．于是，自然地提出两个问题：一是能否实现超混沌同步？二是如何实现超混沌控制？这是两个令人感兴趣的挑战性课题．Pecera 和 Carroll 特别强调指出：只有当响应系统的李雅普诺夫指数都是负值时，才能实现响应系

统与驱动系统之间的同步,Vieira 及其合作者更明确地指出:当出现超混沌运动时,则从混沌同步转变到不同步或立即丧失同步,这意味着超混沌同步是难以达到的.

果真超混沌难以实现同步吗?混沌控制方法是否能拓广于超混沌控制?超混沌同步及超混沌控制的应用发展前景如何?等等,这些都是混沌控制及其应用中的新课题.

最新的研究成果表明,对于某些非线性系统,在一定条件和适当的同步方案下,可以达到超混沌同步.例如用几种典型系统作为例子,复数 Lorenz - Linken 系统、Rossler 系统,双耦合 Duffing 振荡器及双耦合 Vander Pol 振荡器等,分别实现它们及其高阶系统的超混沌同步. 同时,我们还把混沌同步的诸种类型拓广到超混沌同步中去,并且采用一些反馈控制方法实现了对超混沌系统及其高阶超混沌同步系统中的超混沌的稳定控制,为混沌的控制打开了应用之门.

§5.1 参数微扰法 —— OGY 方法

1990 年,美国马里兰大学的物理学家 Ott,Grebogi 及 Yorke 三人首先从理论上提出控制混沌的方法,它基于双曲混沌吸引子中稠密地嵌有无限多个不稳定周期运动,而混沌运动可各态历经地接近这些不稳定周期运动.该方法的基本思想是先由相空间重构方法确定吸引子中嵌入的各种不稳定周期运动,选择其中之一作为控制目标;等待混沌运动游荡到该周期运动附近时对系统某一控制参数进行小摄动,将混沌运动稳定到该周期运动上.该校的迪托(Ditto)、劳西(Rouseo) 及斯帕内(Spano) 三人选择了带状磁弹体在磁场作用下的微扰实验从实验上验证了 OGY 方法的有效性.

具体地说,设连续的自治系统为

$$\dot{x}(t) = F(x(t), p) \tag{5.1}$$

p 为系统控制参数满足：

$$p^* - \Delta p_{max} < p < p^* + \Delta p_{max}$$

Δp_{max}为允许扰动的最大值，假设 $p = p^*$ 时系统(5.1)处于混沌状态.

我们可借助 Poincaré 截面，将(5.1)所描述的连续动力系统化为含一控制参数 p_n 的 n 维离散动力系统

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}_n, p_n), \tag{5.2}$$

$$p_n = p^* + \Delta p_n, \quad |\Delta p_n| \leqslant \Delta p_{max}$$

假设由式(5.1)所描述的是三维连续系统，则其截面(5.2)式便是二维的.

假设 $\boldsymbol{\xi}_F^* = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}_F^*, p^*)$是映射 $\boldsymbol{P}$ 的一个不稳定的不动点，其对应着式(5.1)中 $\boldsymbol{F}$ 的不稳定的周期轨道. 现考虑通过对控制参数 p_n 的实时摄动将映射点 $\boldsymbol{\xi}$ 稳定到指定的双曲不动点 $\boldsymbol{\xi}_F^*$ 上. 为确定所需的控制参数摄动量 $p_n - p^*$，将映射(5.2)在不动点 $\boldsymbol{\xi}_F^*$ 和参数 p^* 附近线性展开：

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} \approx \boldsymbol{\xi}_F^* + L(\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}_F^*) + \boldsymbol{W}(p_n - p^*) \tag{5.3}$$

这里

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}_F^*, \Delta p_n = p_n - p^*, L = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_n}\right) P(\xi_F^*, p^*)$$

$$\boldsymbol{W} = \left(\frac{\partial}{\partial p_n}\right) P(\xi_F^*, p^*)$$

假设 $\boldsymbol{\xi}_n$ 的 Jacobi 矩阵的稳定和不稳定的特征值 λ_s 和 λ_u 满足 $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$，$\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_u$ 分别为 λ_s 和 λ_u 所对映的特征向量.

$\boldsymbol{f}_s$ 和 $\boldsymbol{f}_u$ 分别为向量 $\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_u$ 的反变基向量，其满足

$$\boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{f}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = 1, \quad \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{f}_u \cdot \boldsymbol{e}_s = 0 \tag{5.4}$$

则 Jacobi 矩阵 L 可以被写为

$$L=\lambda_u e_u f_u^T+\lambda_s e_s f_s^T \tag{5.5}$$

令向量 $\xi_{n+1}-\xi_F^*$ 与ξ_F^* 的稳定流形相切,则有下式

$$f_u\cdot\Delta\xi_{n+1}=f_u\cdot(\xi_{n+1}-\xi_F^*)=0 \tag{5.6}$$

将(5.3)式重写为

$$\Delta\xi_{n+1}\approx L\Delta\xi_n+W\Delta p_n \tag{5.7}$$

将 f_u 和(5.7)式两端作内积,可得控制参数 p_n

$$\Delta p_n=p_n-p^*=-\lambda_u\frac{f_u\cdot\Delta\xi_n}{f_u\cdot W} \tag{5.8}$$

这里假设 $f_u\cdot W\neq0$.

根据上面的分析,OGY 方法的控制策略就是,从实验上观测该系统,一旦轨线靠近我们所期望的那个不动点时,立即开始对参数 p_n 进行小微扰 Δp_n,使得 $\Delta p_n\leqslant|\Delta p_{max}|$,经过若干次微扰迭代后,使下一个状态落人该不动点的稳定方向上,即迭代 ξ_{n+1} 落人稳定流形 ξ_F^* 上,如此反复直到最后稳定在该不动点上. 图 5.1 给出了 OGY 方法对鞍型不动点的控制图像.

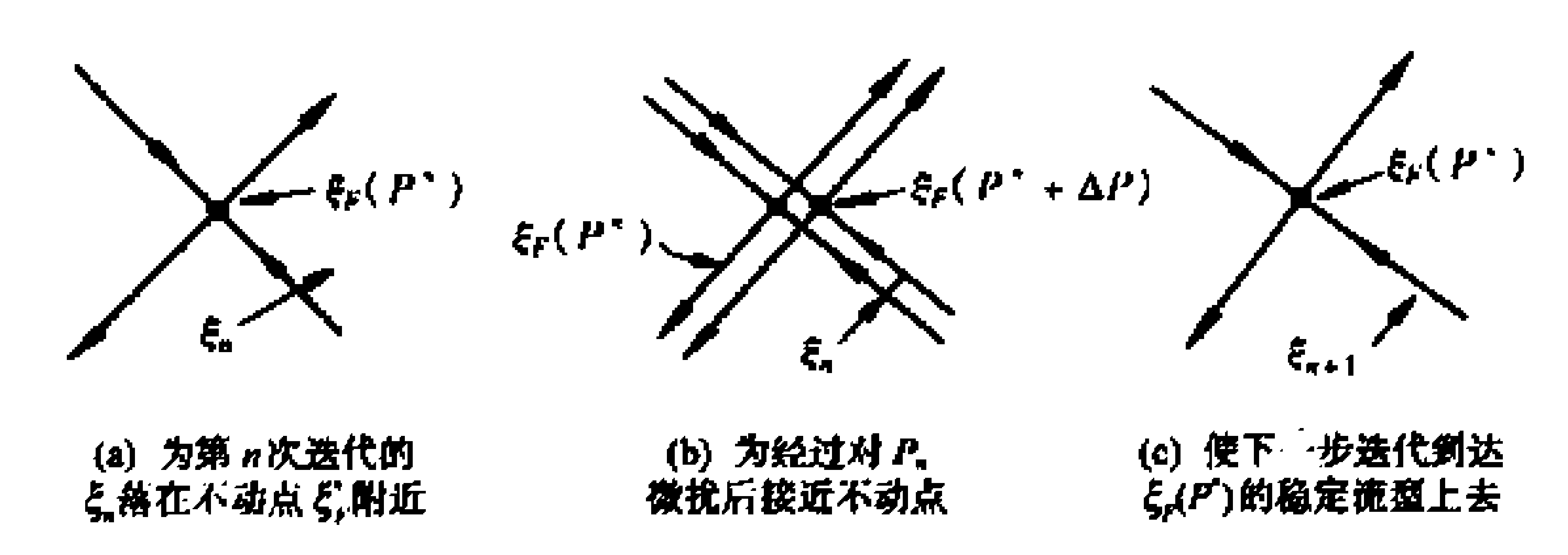


图 5.1 OGY 方法对鞍型不动点的控制图像

当 ξ_{n+1}已经进人局域稳定流形方向之后,虽然可置微扰 $\Delta p_n=0$,但是由于线性化所产生的误差、系统测量的误差及小噪声等诸因素的影响,系统一般还会再次跑出稳定流形方向,于是在每次

迭代中控制律(5.8)都在起作用,以使逐次迭代点 ξ_{n+1} 都在不动点附近,直至最终落在不动点上,即获得对周期态的稳定有效控制.

以上方法可以拓广到 n 维非线性映像,或可以由庞加莱映像描述的连续非线性系统.该法无须知道系统全局的动力学模型,非线性映像可以利用时间延迟坐标法,从实验测得的时间序列中构造出来,然后通过考察期望轨道附近的映像迭代,由该映像在所需的周期轨道附近的线性控制律来达到稳定控制.

混沌控制中有两个问题值得讨论.一是关于实现所需周期态的控制时间,即达到所需周期态所花的平均寿命$\langle\tau\rangle$.显然,从实用角度看,实现对混沌的稳定控制所花的时间不能无限,只能有限才有意义.由于混沌敏感地依赖于初始条件,对于随机选择的初始条件,存在一个指数型的概率分布,对于 $\tau\gg1$,则有概率:

$$P(\text{达到所需周期态时间}>\tau)\sim\exp[-(\tau/\langle\tau\rangle)] \quad (5.9)$$

控制所需的平均寿命$\langle\tau\rangle$将随 Δp_{max} 的减小而增加,并且对于 Δp_{max} 小值情形,$\langle\tau\rangle$遵循规律关系:$\langle\tau\rangle\sim(\Delta p_{max})^{-\gamma}$.OGY 方法已经导出指数 γ 的表达式:

$$\gamma=1+\frac{1}{2}\ln|\lambda_u|/\ln|\lambda_s|^{-1} \quad (5.10)$$

显然,随机选择一批初始条件可以算出$\langle\tau\rangle$和 Δp_{max} 之间的关系,计算结果表明,随着 Δp_{max} 增加,平均寿命$\langle\tau\rangle$成线性减少,这就是说,增加微扰限制量,有利于减少控制所需的时间.

另一个关注的问题是噪声的影响,研究噪声影响只需在线性化方程(5.2)或(5.3)的右边加上一个随机项 $\epsilon\boldsymbol{\delta}$,然后求解朗之万方程.这里 $\boldsymbol{\delta}$ 为随机向量,ϵ 为噪声强度.$\boldsymbol{\delta}$ 的分量 δ_i 具有下列特性:$\langle\delta_i\rangle=0$ 及$\langle\delta_i\cdot\delta_j\rangle=0$,当 $i\neq j$ 时,并且具有与 i 无关的概率密度,从局域稳定性条件可知,噪声与 $\boldsymbol{f}_u$ 的点积将包括在 $\Delta\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ 中,故得 $\xi^{u}_{n+1}=\epsilon\delta^{u}_{n}$,这里 $\delta^{u}_{i}=\boldsymbol{f}_u\cdot\delta_i$. 于是,倘若噪声是有界的,

则受控的不动点的稳定性将不受影响.只要这个界足够小即可,使得 $\varepsilon\delta_{max}<\xi_{max}$,倘若该条件不被满足,则噪声可以把一条轨道撞出不动点附近的平行四边形以外,在概率密度分布的尾部,低概率所引起的越轨现象尤其令人关注.不过这种越轨现象通常很少发生.要是经常发生的话,那 OGY 方法就不灵了,事实证明,OGY 方法对混沌的控制是有效的,基本上不受噪声的影响.

OGY 方法的主要优点是:一、无须预先知道所研究系统的动力学模型,庞加莱映像可由实验测量的时间序列用延迟坐标来获得,二、每次映像迭代所需的计算量最少.三、所需的参数变化很少.四、必须估算所需的不稳定不动点的某些性质,但是可以粗估即可.在特征值及特征矢量测量不精确的情况下也可以实现混沌控制.五、在延迟坐标下达到控制后嵌套在混沌吸引子中的不稳定轨道只有微小变化,基本上不变.六、该法不限于有周期外力驱动的力学系统,可以拓广到由非线性映像表征的任何系统.也就是说,它可适用于离散动力学系统及可用庞加莱映像表征的连续动力学系统,但通常只能控制低周期的轨道.

§5.1.1 OGY 方法的改进

学者们在实验中发现 OGY 方法存在一个主要问题是,在控制过程中我们要从 t_i 时刻开始,把参数从 p_{i-1}变化到 p_i,这里 t_i 为轨线第 i 次贯穿庞加莱截面的时间.倘若应用时间延迟坐标法,则可证明:由实验截面所得到的映像 F,不仅取决于新的参数 p_i 而且还依赖于前面的参数 p_{i-1}.因此,为了更好地实现控制,Nitsche 及 Dressler 对 OGY 方法的控制律进行了改进.

假设我们不知道系统的动力学方程,系统的惟一信息来自实验测量的时间序列.令实验所得到的时间序列为 $z(t)=z(y(t))$.再假设已产生的吸引子在某个流形 $M_s\subset M$ 上,利用具有延迟 τ 的时间坐标及嵌入维数 d,则构成 d 维延迟坐标矢量 $\boldsymbol{x}(t)=[z(t),z(t-\tau),\cdots,z(t-(d-1)\tau)]\in R^d$,适当选择 d 和 τ,则

存在一个从流形 M_y 到子流形 $M_x \subset R^d$ 的光滑逆映像 Φ，使得下式成立：

$$x(t)=\Phi(y(t)), \quad y(t)\in M_y \tag{5.11}$$

假设用一个流 φ 表示原来相空间内的动力学，使得 $y(t+\tau)=\varphi^T(y(t))$ 成立．在恰当选择的实验截面内，这个连续动力学系统可退化为一个离散的动力学映像，通常选择 $x(t_i)=z(t_i)$ 为常数作为庞加莱截面即可做到，从而在截面上得到一系列的交点

$$\xi_i=[z(t_i-\tau),z(t_i-2\tau),\cdots,z(t_i-(d-1)\tau)]\in R^{d-1} \tag{5.12}$$

于是，我们得到感兴趣的庞加莱映像 $\xi_{i+1}=F(\xi_i)$．简单起见，假设要稳定控制 F 中的某条不稳定周期轨道．应用 OGY 方法表示：在 t_i 时立即把参数 p 从 p_{i-1} 变到线性控制律(5.8)式所确定的参数 p_i．今假定在两次相继穿过截面之间时间间隔大于迟滞窗口，即 $t_i-t_{i-1}>(d-1)\tau$．

我们之所以希望能通过考察 $x(t)$ 来控制原来系统的 $y(t)$，是因为所引入的嵌套 Φ 给出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的双向单射关系，映像 Φ 与系统的动力学方程有密切关系，并且一般依赖于参数 p_i 的实际值．基于该事实，用 Φ_p 取代 Φ，则 ξ_i 在 t_i 时刻在截面内与原状态的关系为

$$\begin{aligned} y(t_i)&=\Phi_{p_{i-1}}^{-1}[(c,z(t_i-\tau)),\cdots,z(t_i-(d-1)\tau)] \\ &=\Phi_{p_{i-1}}^{-1}(x(t_i)) \end{aligned} \tag{5.13}$$

此处已利用了 $(d-1)\tau<(t_i-t_{i-1})$ 的假设，即 p_{i-1} 是在整个时间间隔 (t_{i-1},t_i) 内 p 的实际值．

在控制起作用的情况下，即在 t_i 时刻把参数从 p_{i-1} 变到 p_i 时，实验截面映像确定不仅取决于新的实际值 p_i，而且取决于前一个值 p_{i-1}，即

$$\xi_{i+1}=F(\xi_i,p_{i-1},p_i) \tag{5.14}$$

倘若对所有的 i,$(t_i-t_{i-1})>(d-1)\tau$ 的条件被破坏,例如只有 $2(t_i-t_{i-1})>(d-1)\tau$,则(5.14)式直截了当地被推广为

$$\xi_{i+1}=F(\xi_i,p_{i-2},p_{i-1},p_i) \tag{5.15}$$

即这时还必须考虑对前面一个参数值 p_{i-2} 的依赖性,自然可以按此类推.不过,我们的讨论限于对于所有 i 存在 $t_i-t_{i-1}>(d-1)\tau$ 的情形.

从式(5.14)出发,我们可对 OGY 方法的算法进行修正,这时有下列线性近似:

$$\Delta\xi_{i+1}\approx A\xi_i+v\Delta p_{i-1}+u\Delta p_i \tag{5.16}$$

其中

$$A=D\xi_iF(\xi_F,p_{i-1}^*,p_i^*),\ v=\left(\frac{\partial F}{\partial p_{i-1}}\right)(\xi_F,p_{i-1}^*,p_i^*)$$

及

$$u=\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)(\xi_F,p_{i-1}^*,p_i^*)$$

由于稳定控制要求 $f_u\cdot\Delta\xi_{i+1}=0$,则导出新的控制律:

$$\Delta p_i=-\frac{\lambda_u}{f_u\cdot u}f_u\cdot\Delta\xi_i-\frac{f_u\cdot v}{f_u\cdot u}\Delta p_{i-1} \tag{5.17}$$

当不考虑前次参数微扰 Δp_{i-1} 对映像的影响时,即 $v=0$ 由上式退化为 OGY 方法的线性控制律(5.8).

改进的 OGY 方法控制律(5.17),从原理上说,应该再次适用于没有测量误差或噪声的所有情形,在控制起作用的时候,$\Delta p_i\neq 0$,控制要求的 $f_u\Delta\xi_{i+1}=0$ 并不确保 ξ_{i+2} 也将落人该稳定流形,其原因是 ξ_F 是 $F(\cdot,p_{i-1}^*,p_i^*)$ 的不动点,但不是 $F(\cdot,p_i^*+\Delta p_i,p_{i+1})$ 的不动点.倘若不加进一步微扰 Δp_{i+1},则 ξ_{i+2} 就由(5.14)

$F(\cdot, p_i^* + \Delta p_i, p_{i+1}^*)$确定，倘若根据改进的控制律(5.17)来选择微扰 Δp_{i+2}，则 ξ_{i+2}就将只呆在 ξ_F 的局域稳定流形(即 $f_u \cdot \Delta\xi_{i+2}) = 0$)上，这点利用(5.16)式则易于验征.

现已将这种改进的 OGP 方法的控制律应用于杜芬振荡器中的混沌控制，纠正了原先 OGY 方法无法控制的情形. 但是它并非对所有情形都是充分有效的，例如当 $|(f_u \cdot v)/(f_u \cdot u)| \geqslant 1$ 的情形. 此时若把 $\Delta\xi_{i+1}$视为随机的，则(5.17)式可视为一个非稳定的一阶自回归模型，故 $(\Delta p_i)^2$ 的期望值将随 i 的增长发散，Δp_i 将超过所允许的最大微扰 Δp_{max}，因而控制范围也就失去了，为了避免 Δp_i 增长所致的不稳定性，人们提出了一种变通的办法，即试图寻求 Δp_i 的一种控制律，使得 Δp_{i+1}将自动地变为零. 为此要求系统只稳定下一个 $i+2$，但要一步到位，且使得 $\Delta p_{i+1} = 0$，即要求：

$$f_u \cdot \Delta\xi_{i+2} = 0 \text{ 及 } \Delta p_{i+1} = 0 \tag{5.18}$$

利用两次(5.16)式，则由(5.18)要求导出了新的控制律为

$$\Delta p_i = \frac{\lambda_u^2}{\lambda_u \cdot f_u \cdot u + f_u \cdot v} f_u \cdot \Delta\xi_i - \frac{\lambda_u f_u \cdot v}{\lambda_u \cdot f_u \cdot u + f_u \cdot v} \Delta p \tag{5.19}$$

其中分母不为零

新的 OGY 方法的控制律可以达到控制过程自治，由于假设了理想的线性化，原则上在无噪声及测量误差时，可以在 ξ_{i+3}时停止微扰，即迭代 ξ_{i+3}会自动落人稳定流形. 但由于对(5.16)应用了二次线性化所导致的误差，实际上并不那么理想，这就总要几经微扰使控制律在每次迭代都发挥作用才好.

§5.1.2 OGY 方法的进一步改进

如何实现对混沌奇怪吸引子中的高周期态及高维动力学系统的混沌控制，是 OGY 方法进一步改进的主要方向. 混沌控制的物

理实质就在于把具有正值的李雅普诺夫指数如何变成负值，从而把不稳定轨道稳定住，根据这种分析，Ott、Grebogi 与 Romeiras、Daywansa 合作，采用系统控制中的所谓“极点移动技术”，对 OGY 方法进行了进一步的改进.

让我们来讨论离散动力学系统

$$\boldsymbol{\xi}_{i+1}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i,p) \tag{5.20}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_i\in R^n$，$p\in R$，$\boldsymbol{F}$ 映像对两个变量都是充分光滑的，p 为外部可调的实参数，在某个时间内要求：

$$|p-p^*|<\delta \tag{5.21}$$

p^* 为额定值(nominal value)，假设在 $p=p^*$ 下系统有一个混沌吸引子，现在的目标是，以这样一种方式随时间 i 改变参数 p 使得混沌吸引子的流域中涉及几乎所有的初始条件，从而系统的动力学都收敛到该吸引子中所期望的时间周期轨道上. 如 OGY 方法已述，由于混沌动力学的遍历特性可以确保状态轨线最终能进入所要稳定的 UPO 的邻近，一旦进入，我们即加上稳定反馈控制律，以控制轨线朝所期望的 UPO 运动，并稳定住.

令 $\boldsymbol{\xi}_F(p)$表示该混沌吸引子上的一个不稳定不动点，对于 p 接近于 p^* 及在不动点 $\boldsymbol{\xi}_F(p^*)$附近情形，可用下列线性映像近似映像(5.20)：

$$\boldsymbol{\xi}_{i+1}-\boldsymbol{\xi}_F(p^*)=A[\boldsymbol{\xi}_i-\boldsymbol{\xi}_F(p^*)]+\boldsymbol{B}(p-p^*) \tag{5.22}$$

这里 A 为雅可比矩阵($n\times n$)，$\boldsymbol{B}$ 为 n 维列矢量，即

$$A=D_{\xi}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi},p)\text{及 }\boldsymbol{B}=D_p\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi},p)$$

且在 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_F(p^*)$及 $p=p^*$ 处计算这些偏导数，并假设参数 p 对时间的依赖性是变量 $\boldsymbol{\xi}_i$ 的如下线性函数形式

$$p-p^*=-\boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{\xi}_i-\boldsymbol{\xi}_F(p^*)] \tag{5.23}$$

这里 $\boldsymbol{K}^T$ 是一个 $1\times n$ 矩阵，主要的问题是想法确定 $\boldsymbol{K}^T$，使得不

动点 $\xi_F(p^*)$变成稳定的.把(5.23)代入(5.22),得

$$\xi_{i+1}-\xi_F(p^*)=(A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^T)[\xi_i-\xi_F(p^*)] \quad (5.24)$$

此式表明,只要矩阵 $A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^T$ 是渐近稳定的,即矩阵的所有特征值的模小于 1,则不动点将是稳定的.

实际上,如何确定 $\boldsymbol{K}^T$ 使得矩阵 $A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^T$ 具有特定特征值的问题是系统控制论中所熟知的"极点移动技术",我们下面对此项技术给予简介.

矩阵 $A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^T$ 的特征值又称为"调节器极点"(regulator poles).对给定的 $A,\boldsymbol{B}$,通过选择 $\boldsymbol{K}^T$ 而使这些极点满足一定的特定要求的问题就是"极点移动问题".

设矩阵 $A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^T$ 的特定特征值为 $\mu_i,\cdots,\mu_n$(可以是复数).

现在我们来介绍一种根据 $A,\boldsymbol{B}$ 与$(\mu_1\cdots\mu_n)$求解 $\boldsymbol{K}$ 的方法(Ackermann 方法).主要有以下两点:

(1) 极点移动问题具有一个惟一解,当且仅当存在秩为 n 的 $n\times n$ 矩阵 C,并称其为可控矩阵.(C 的解法将在后面给出)

(2) 极点移动问题的解由下式给出

$$\boldsymbol{K}^T=(d_n-a_n,\cdots,d_1-a_1)T^{-1}$$

这里 $T=CW$ 以及

$$W=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这里$\{d_1,\cdots,d_n\}$是 A 的特征多项式的系数,即

$$|SI-A|=s^n+d_1s^{n-1}+\cdots+d_n$$

及$\{a_1,\cdots,a_n\}$是 $A-BK^T$ 所期望的特征多项式的系数.

$$\prod_{j=1}^{n}(s-\mu_j)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n$$

迄今，我们的讨论都是建立在线性方程(5.24)之上，因而只适用于 $\xi_F(p)$ 的局部区域. 另一方面，参数微扰大小的约束由(5.21)给出，当与(5.23)合并时，得出

$$|K^T[\xi_i-\xi_F(p^*)]|<\delta \tag{5.25}$$

此式定义了宽度为 $2\delta/\|K^T\|$ 的条域，我们只有在这个条域内根据(5.23)来选择 ξ_i 才能起控制作用. 当 ξ_i 在这个条域外面时，我们令控制参数 $p=p^*$. 也有其他选择的办法.

总之，对于任意的 ξ_i[不必接近 $\xi_F(p^*)$]，由下式确定控制

$$p-p^*=-K^T[\xi_i-\xi_F(p^*)]-u(\delta-|K^T[\xi_i-\xi_F(p^*)]|) \tag{5.26}$$

这里 u 是单位阶跃函数(unit step function)，其定义为

$$u(a)=\begin{cases}0, & a<0\\ 1, & a>0\end{cases}$$

应当指出，K^T 可以有许多不同方式来选择，原则上，只要能保证极点均在单位圆内即可.

上面已经指出，只有当 ξ_i 落在狭窄的条域(5.25)内，控制才能起作用(即 $p\neq p^*$). 由于对于小 δ，一个初始条件将产生一条混沌轨线，于是，在控制不变的情况下，即使 ξ_i 落入这个条域，但因为方程(5.24)只是(5.20)的线性近似，故该控制可能不会把轨线"赶"入不动点，轨线反而有可能离开条域，继续作混沌游荡，就像轨线未受到控制一样. 由于在混沌吸引子上的轨线是遍历的，所以在某时刻轨线最终会满足(5.25)式，且充分地接近所期望的不动点.

如在最前面讨论 OGY 方法时已提到的那样，在这一过程中，这种转变混沌的平均寿命 $\langle\tau\rangle$ 敏感地取决于特殊轨线的初始条件. 如果在吸引子流域中随机地选择初始条件，转变混沌寿命的分布为指数型：

$$\varphi(\tau)\backsim\frac{1}{\langle\tau\rangle}\exp\left(-\frac{\tau}{\langle\tau\rangle}\right) \qquad (5.27)$$

对于大 τ，$\langle\tau\rangle$ 是转变混沌的特征寿命，称其为达到控制的平均时间(或平均寿命). 对于小 δ 情形，可以对 $\langle\tau\rangle$ 随 δ 的变化标度进行估算.

上述对 OGY 方法所作的进一步讨论，其目的是为了将其推广到对混沌吸引子中的高周期轨线的控制. 假设我们设稳定的周期轨道的周期为 T，最直接拓广方法是取所研究映像的 T 次迭代，因为 T 次迭代映像，在周期轨线上的任何点都是不动点，这样我们就可以应用上述控制方法. 不过，此法对噪声过度敏感，对于所期望的周期轨线的周期较长的情形使用也要谨慎.

假设周期轨线用 $\boldsymbol{\xi}_{iF}(p)$ 表示，这里 $\boldsymbol{\xi}_{(i+T)F}(p)=\boldsymbol{\xi}_{iF}(p)$. 同时引进 $n\times n$ 的矩阵 A_i 与 n 维向量 $\boldsymbol{B}_i$(维数为 n)，这里

$$A_i=A_{i+T}=D_\xi \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi},p)$$

$$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}_{i+T}=D_p\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi},p)$$

且在 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{iF}(p)$ 上计算偏导数，下标 F 表示不动点，下同.

如同(5.22)那样进行线性简化，我们有

$$\boldsymbol{\xi}_{i+1}-\boldsymbol{\xi}_{(i+1)F}(p^*)=A_i[\boldsymbol{\xi}_i-\boldsymbol{\xi}_{iF}(p^*)]+\boldsymbol{B}_i(p_i-p^*) \qquad (5.28)$$

假设周期轨线具有 u 个不稳定特征值(即具有量级大于 1 的 u 个特征值)及 s 个稳定特征值，且 $u+s=n$. 当 $p=p^*$ 时，周期轨线上的每一点 $\boldsymbol{\xi}_{iF}(p^*)$ 确定了向量 $(v_{i,1},v_{v,2},\cdots,v_{i,s})$，此向量支起线性的稳定子空间，令

$$\phi_{i,j}=A_{i+u-1}A_{i+u-2}\cdots A_{i+j+1}A_{i+j}$$

$$(j=1,2,\cdots,u-1)$$

一旦选择了向量($v_{i,1},v_{i,2},\cdots,v_{i,s}$)为稳定特征向量，则

$$C=(\phi_{i,j}B_i \vdots \phi_{i,2}B_{i+1} \vdots \cdots \vdots \phi_{i,u-1}B_{i,u-2} \vdots B_{i+u-1} \vdots v_{i+u,1} \vdots v_{i+u,2} \vdots v_{i+u,s})$$

于是，可控性条件为 C 是非奇异的，而所控制的期望结果为

$$p_i-p^*=-\boldsymbol{K}_i^T[\xi_i-\xi_{iu}(p^*)]$$

其中

$$K_i^T=kC_i^{-1}\phi_{i,0}$$

k 表示一个 n 维列向量，它的第一项为 1，其余项均为 0.

现对(5.28)迭代 u 次，而得到方程(5.29)

$$\xi_{i+u}-\xi_{(i+u)F}(p^*)=\phi_{i,0}[\xi_i-\xi_{iF}(p^*)]+\phi_{i,1}\boldsymbol{B}_i(p_i-p^*)$$
$$+\phi_{i,2}\boldsymbol{B}_{i+1}(p_{i+1}-p^*)+\cdots+\boldsymbol{B}_{i+u-1}(p_{i+u-1}-p^*)$$

(5.29)

如果我们要求 ξ_{i+u}落在通过$\xi_{(i+u)F}(p)$点的周期轨线的线性化的稳定流形上.则考虑

$$\xi_{i+u}-\xi_{(i+u)F}(p)=\alpha_1v_{i+u,1}+\alpha_2v_{i+u,2}+\cdots+\alpha_sv_{i+u,s} \quad (5.30)$$

并将此代入(5.29)而解得 p_i.

从上可见，在时间 i 我们能够算出欲加在下一个 u 中的控制参数 $p_i,p_{i+1},\cdots,p_{i+u-1}$.但是，在有噪声的情形下，这么做效果并不一定好(假定 $u>1$)，因为它不能保证在每次迭代时对噪声的影响进行修正.因此，我们指出，在有噪声影响的情形下，最好的办法是在每次迭代时通过(5.29)、(5.30)两式来计算控制参数 p_i.

在实验研究混沌动力学中，经常应用延迟坐标来表示系统的状态.这种做法有时十分有用.因为它仅仅要求实验中测出一个一维时间序列并用 $y(t)$表示.

我们在这里将用类似于前面的延迟坐标法对 OGY 方法加以改进.

设延迟坐标矢量为

$$Z(t)=(y(t),y(t-T_D),y(t-2T_D),\cdots,y(t-MT_D))$$

这里 T_D 为所选的延迟时间,假设时间变量 t 是连续的.一般地说,当 $M\geqslant 2n$ 时,嵌套定理确保向量 Z 与系统的状态在总体上一一对应.实际上,这里只要求 Z 在周期轨线附近的小范围内是一一对应即可,为此只要 $M=n-1$ 即能达到要求.为了得到一个映像,我们可以取一个庞加莱截面,因为经常有周期为 T_F 的外部作用的影响,这里可在离散时间 $t_i=iT_F+t_0$ 上对系统状态采样来确定一个所谓"闪频截面"代替庞加莱截面,效果相同,这样一来,我们可得到离散变量 $Z_i=Z(t_i)$.

如同上节所讨论过的,控制参数的变化不仅要考虑本次迭代的参数,而且要考虑前次迭代参数的影响.例如,在周期性作用的情形中,由于 Z_i 的分量为 $y(t_i-mT_D)$(对于 $m=0,1,\cdots,M$),所以向量 Z_{i+1} 不仅依赖于 p_i,而且取决于在时间间隔 $t_i\leqslant t\leqslant t_i-MT_D$ 内所有有影响的参数值.特别是,令 γ 为最小整数使得 $MT_D<rT_F$,因此,一般地,相关的映像的通式为

$$Z_{i+1}=F(Z_i,p_i,p_{i-1},\cdots,p_{i-M}) \tag{5.31}$$

对于 $\gamma=1$

$$Z_{i+1}=F(Z_i,p_i,p_{i-1}) \tag{5.32}$$

我们现在来讨论如何把"极点移动技术"应用于延迟坐标的情形.简单起见,限于讨论 $\gamma=1$,即(5.32)情形,且只讨论不动点 Z_F 的控制问题.

对(5.32)进行线性化,我们有

$$Z_{i+1}-Z_F(p^*)=A[Z_i-Z_F(p^*)]+B_a(p_i-p^*)+B_b(p_{i-1}-p^*) \tag{5.33}$$

其中

$$A = D_z F(z,p,p'),\ B_a = D_p F(z,p,p')$$

$$B_b = D_{p'} F(z,p,p'),\ p = p' = p^*$$

这些偏导数都是在 $Z = Z_F(p^*)$ 上计算的.

为简单,记

$$\widetilde{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} Z_{i+1} \\ p_i \end{bmatrix}$$

且引入线性控制律

$$p_i - p^* = -K^T[Z_i - Z_F(p^*)] - k(p_{i-1} - p^*) \tag{5.34}$$

把上述一些方程联立求解,可得

$$\widetilde{Z}_{i+1} - \widetilde{Z}_F(p^*) = (\widetilde{A} - \widetilde{B}\widetilde{K}^T)[\widetilde{Z}_i - Z_F(p^*)] \tag{5.35}$$

其中

$$\widetilde{Z}_F(p^*) = \left(\frac{Z_F(p^*)}{p^*}\right), \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & B_b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_a \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{K} = \begin{pmatrix} K \\ k \end{pmatrix}$$

由于(5.35)式具有与(5.24)相同的形式,因此前面关于极点移动技术就可以用于具有延迟坐标的情形.倘若要考虑更广泛的 $\gamma > 1$ 的情形,也可以如法炮制,只是中间变换更复杂一些,碰到具体问题视控制效果再决定是否采用更高的修正.

用延迟坐标法处理混沌控制的另一种方法是,把(5.32)直接退化的 $Z_{i+1} = F(Z_i, p_i)$,然后应用极点移动技术.为实现这种退化,令 $p_i \equiv p_0$.又如可以令 $p_i = 0$, i 为奇数, $j = \frac{1}{2}i$, i 为偶数,于是作替换 $Z_i \to \hat{Z}_j$, $p_i \to \hat{p}_j$ 用于偶数 i,然后对(5.32)进行两次迭

代，则有

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_{j+1}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{Z}}_j,p_0,\hat{p}_j),\hat{p}_j,p_0)=\hat{\boldsymbol{F}}(\hat{\boldsymbol{Z}}_j,\hat{p}_j) \quad (5.36)$$

这就是我们所需的形式.

§5.2 Henon 映像 OGY 改进法的混沌控制举例

Henon 映像是二维映像：

$$\mathbf{z}\to\mathbf{z}'=F(\mathbf{z})$$

定义为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-x^2+by\\x\end{pmatrix} \quad (5.37)$$

这里$(x,y)\in R^2$.我们令参数 $b=0.3$ 不变，让 a 参数作为控制参数，让 a 在额定值$a_0=1.4$ 附近变化，因为 $a_0=1.4$ 处 Henon 映像有一个混沌吸引子.

在 $a=a_0=1.4$ 时，在该混沌吸引子内包含一个不稳定鞍型不动点，该不动点就在

$$\mathbf{z}_F(a)=\chi_F(a)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad (5.38)$$

$$\chi_F(a)=-c+(c^2+a)^{1/2},c=\frac{1}{2}(1-b),\text{对于 } a\geqslant -c^2.$$

请注意：该映像的偏导数的雅可比矩阵为

$$D_zF(\mathbf{z})=\begin{pmatrix}-2x & b\\1 & 0\end{pmatrix} \quad (5.39)$$

且由下列特征根方程决定不动点的稳定性

$$|D_zF[\mathbf{z}_F(a)]-sI|=0 \quad (5.40)$$

人们易于验证，对于 $-c^2<a<3c^2$ 不动点是稳定的，而对于 $a>3c^2$ 不动点是不稳定的，因此，对于这里考虑的 $b=0.3, a=a_0=1.4$，由于 $c=0.35$，所以不动点是不稳定，我们的任务就是想把它控制为稳定的.

应用前节的步骤，可得

$$A=\begin{pmatrix}-2\bar{\chi}_F & b\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$C=(B\ \vdots\ AB)=\begin{pmatrix}1 & -2\bar{\chi}_F\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}2\bar{\chi}_F & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^T=(\alpha_1-a_1, \alpha_2-a_2) \tag{5.41}$$

其中

$$a_1=2\bar{\chi}_F=-(\lambda_u+\lambda_s), a_2=-b=\lambda_u\lambda_s$$

及

$$\alpha_1=-(\mu_1+\mu_2), \alpha_2=\mu_1\mu_2$$

这里 $\bar{\chi}_F=\chi_F(a_0)$，λ_s 及 λ_u 是矩阵 A 的特征值

$$\lambda_s=-\bar{x}_F+(\bar{x}_F^2+b)^{1/2}$$

$$\lambda_u=-\bar{x}_F-(\bar{x}_F^2+b)^{1/2}$$

而 μ_1 和 μ_2 为 $(A-\boldsymbol{BK}^T)$ 的特征值，即调节器极点.

为了更好地阐明对调节器极点或对 $\boldsymbol{K}^T$ 的不同选择，如图 5.2 所示采用了 (α_1, α_2) 平面表示. 在该平面内，画出了临界稳定线 $\mu_1=\pm1(1\pm\alpha_1+\alpha_2=0)$ 及 $\mu_1\mu_2=1(\alpha_2=1)$，由这些线给出了

可稳定控制的三角形区域.此外,图上还画出了轴$(k_1,k_2)=\boldsymbol{K}^T$,如虚线所示,通过下面变换它们与$(\alpha_1,\alpha_2)$的关系为

$$k_1=\alpha_1-a_1,k_2=\alpha_2-a_2 \tag{5.42}$$

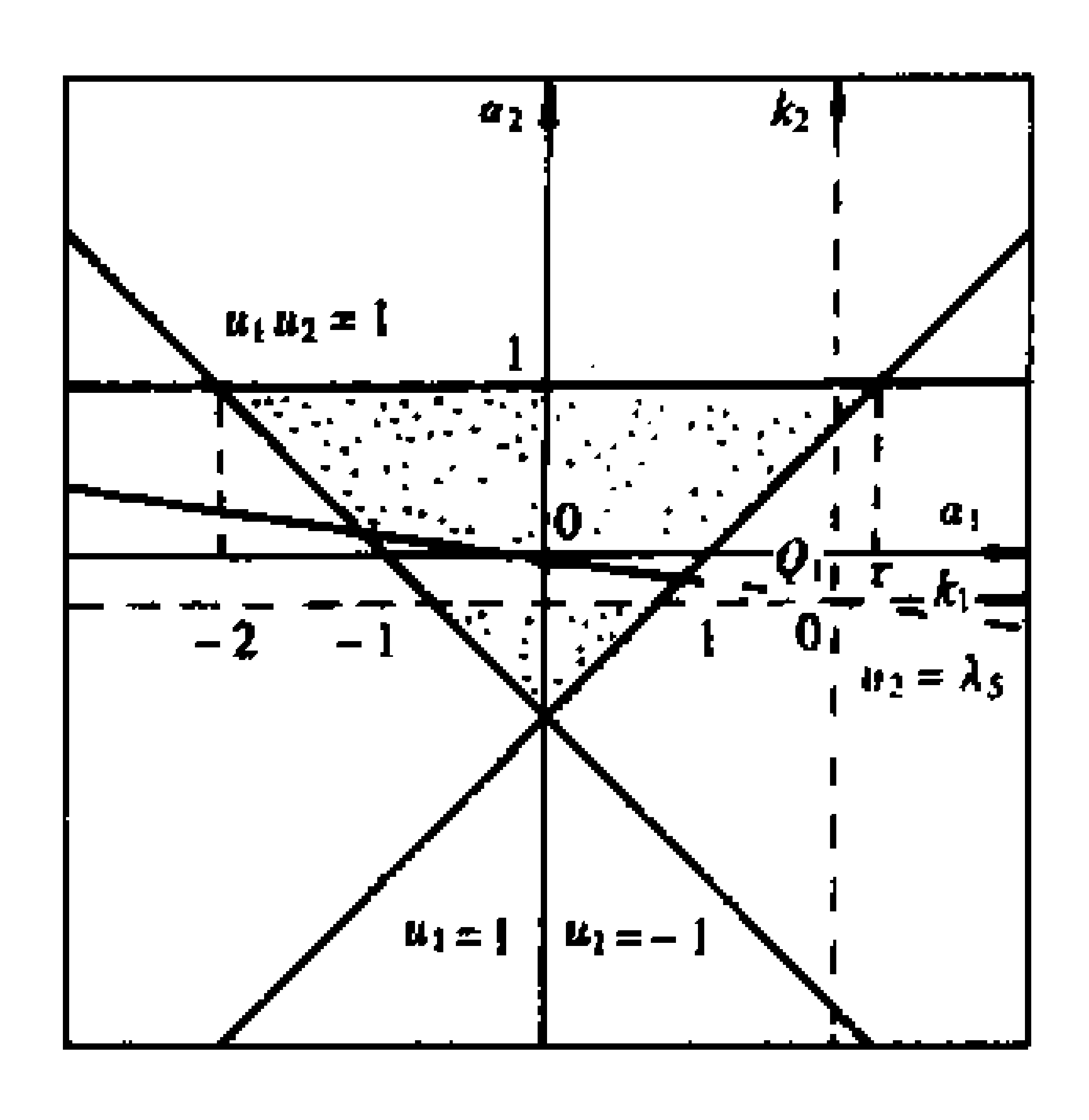


图 5.2 Henon 映像中调节器极点的选择

图中通过(k_1k_2)平面原点的直线具有斜率$-\lambda_s$,它与$\alpha_2=0$的线交于 Q 点,其坐标为$(\alpha_1,\alpha_2)=(-\lambda_s,0)$.与此点对应的调节器极点为

$$\mu_1=0,\mu_2=\lambda_s \tag{5.43}$$

及矩阵

$$\boldsymbol{K}^T=\lambda_u(1-\lambda_s)\equiv\boldsymbol{K}_Q^T \tag{5.44}$$

我们可把$\boldsymbol{K}^T$易于表成极坐标形式:

$$\boldsymbol{K}^T=|\boldsymbol{K}^T|(\cos\theta,\sin\theta) \tag{5.45}$$

让我们来讨论在图 5.3 中的稳定三角区内,改变$\boldsymbol{K}^T$的两个方式:

(1) θ 固定,$|\boldsymbol{K}^T|$变化.

(2) $|\boldsymbol{K}^T|$固定，θ变化.

根据(5.25)所确定的控制条域(slab)，在(1)情形中条域被保持在已确定的一个固定方向上，而它的宽度按 $\omega=2\delta/|\boldsymbol{K}^T|$变化.在(2)情形中条域的方向被转动，而它的宽度则固定在 $\omega=2\delta/|\boldsymbol{K}_Q^T|$上.将 $\boldsymbol{K}^T$ 选在 $\theta=\theta_Q\equiv\tan^{-1}(-\lambda_s)$，这种选择从达到的控制时间的观点看是最佳的，它获得了 μ_s 的周期轨道的收敛率.当然也允许参数的最大微扰 δ 有不同的值(在前面各节中 δ 就是 δP_{max})，我们对上述两种情形再加讨论一下.

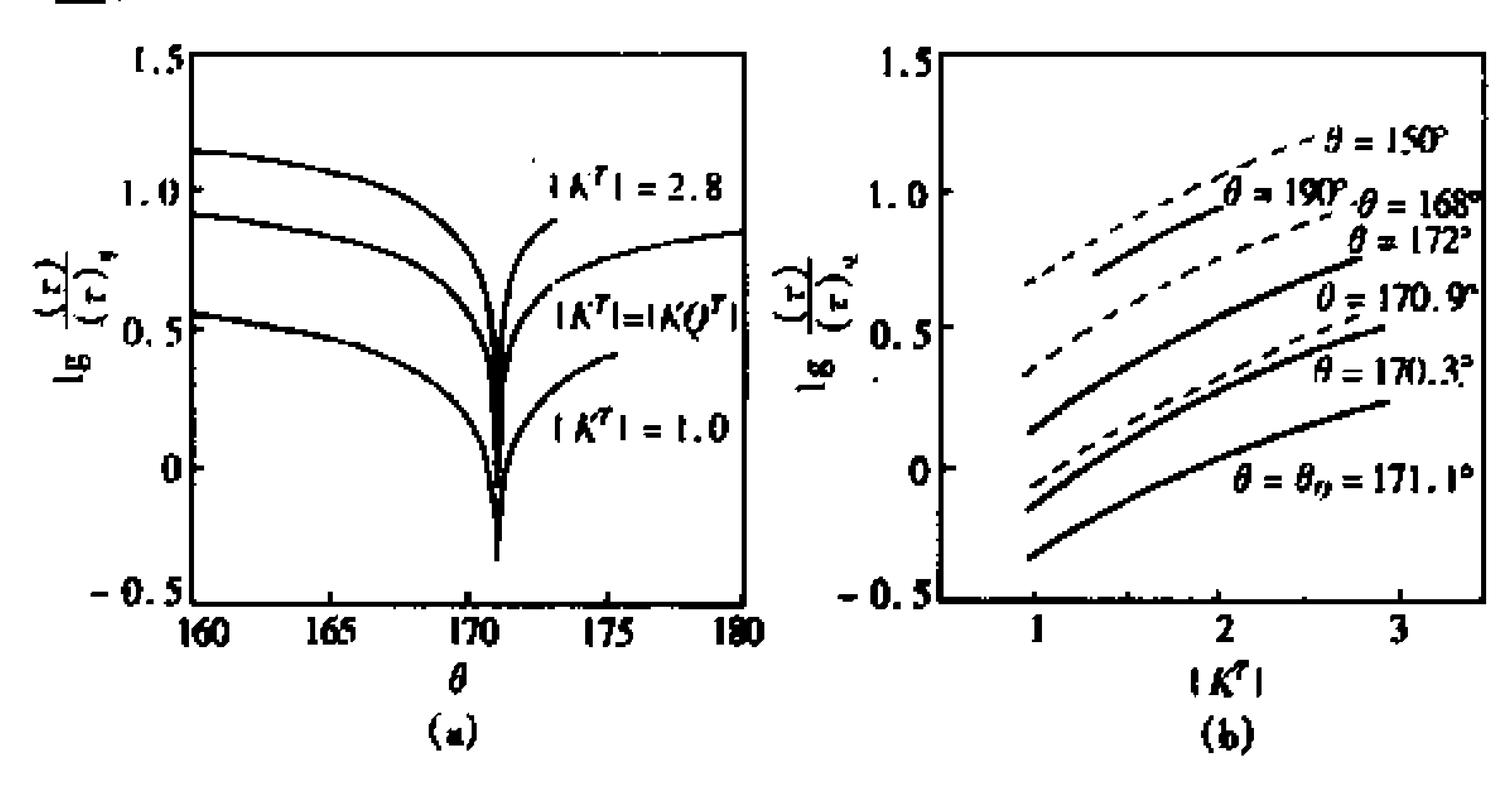


图 5.3 对于 Henon 映像，理论计算所得的达到的平均时间的相对对数 $\lg\frac{\tau}{\langle\tau\rangle_Q}$ 与 $|\boldsymbol{K}^T|$及与 θ 之关系图.(a)固定 $\boldsymbol{K}^T$，$\lg\frac{\tau}{\langle\tau\rangle_Q}$与 $\theta=\arg(\boldsymbol{K}^T)$之关系，(b)固定 θ，$\lg\frac{\tau}{\langle\tau\rangle_Q}$与$|\boldsymbol{K}^T|$之关系.

情况(1)：θ 固定在 $\theta=\theta_Q$，根据调节器极点此情形可解析为：$\mu_2=\lambda_s$ 被保持不变，而允许 μ 在 -1 与 $+1$ 之间变化，$\boldsymbol{K}^T$ 与它们的关系为

$$|\boldsymbol{K}^T|=|\mu_1-\lambda_u|(1+\lambda_s^2)^{1/2} \tag{5.46}$$

对这种情形，达到控制的平均时间$\langle\tau\rangle$随 μ_1 的增加而增加，不过不是很显著.

情况(2)：$|K^T|$ 被固定在 $|K^T| = |K_Q^T| = |\lambda_u|(1+\lambda_s^2)^{1/2}$. 数值结果表明，在 $\theta=\theta_Q$ 处 $\langle\tau\rangle$ 有一个明显的最小值. 对不同的 θ 计算的 $\langle\tau\rangle$ 都强烈地表现出这个特点. 因此可以说，不仅对于 $|K^T| = |K_Q^T|$ 而且对于 $|K^T|$ 的所有值，达到控制的平均时间 $\langle\tau\rangle$ 都在 $\theta=\theta_Q$ 处存在一个明显的最小值. 如图 5.3 所示.

计算 $\langle\tau\rangle$ 的数值方法可以概述如下.

从考虑随机初始条件的混沌跃迁寿命的分布函数(5.27)式出发，我们可以求得寿命小于某 τ_{max} 的混沌跃迁的分布

$$\rho_{\tau_{max}} = \int_0^{\tau_{max}} \phi(\tau)\mathrm{d}\tau = 1-\exp\left(-\frac{\tau_{max}}{\langle\tau\rangle}\right) \tag{5.47}$$

则此时混沌跃迁的平均时间(寿命)为

$$\begin{aligned}\langle\tau_{max}\rangle &= \int_0^{\tau_{max}} \tau\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \langle\tau\rangle\left[1-(1+\frac{\tau_{max}}{\langle\tau\rangle})\exp(-\frac{\tau_{max}}{\langle\tau\rangle})\right]\end{aligned} \tag{5.48}$$

联立上述两式，可得所期望的计算公式：

$$\langle\tau\rangle = \frac{\langle\tau\rangle_{\tau_{max}}}{1-(1-\rho_{\tau_{max}})[1-\log_e(1-\rho_{\tau_{max}})]} \tag{5.49}$$

注意到当

$$\rho_\infty = 1, \langle\tau\rangle_\infty = \langle\tau\rangle$$

计算达到控制的平均时间的主要步骤如下. 随机选择的初始条件取定大数 N_0，先在无控的映像下对它们的每一个初始条件开始迭代，一直迭代到足够多的次数，使得根据它的自然测度，它们的迭代结果全部分布在混沌吸引子上，这样，我们就对映像中的混沌行为包括不动点分布等，有一个比较清晰的了解. 其次，按启动控制，并确定使迭代的轨线落入以不动点为中心的小半径圆内所需的必要迭代次数 $N_f \leqslant N_0$. 令 τ_{max} 是迭代次数，及具有 $j=$

$1,\cdots,N_f$的$\{\tau_j\}$是 N_f 轨线落入小圆所需的次数，于是我们有

$$\rho_{\tau_{max}}=\frac{N_f}{N_0},\qquad \langle\tau\rangle_{\tau_{max}}=\frac{1}{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}\tau_j \tag{5.50}$$

最后，应用(5.49)求得$\langle\tau\rangle$，取 $N_0=192$，$N_f=121$，这些取值是兼顾了精度和计算时间的较好折衷方案.

§5.3 连续反馈控制法

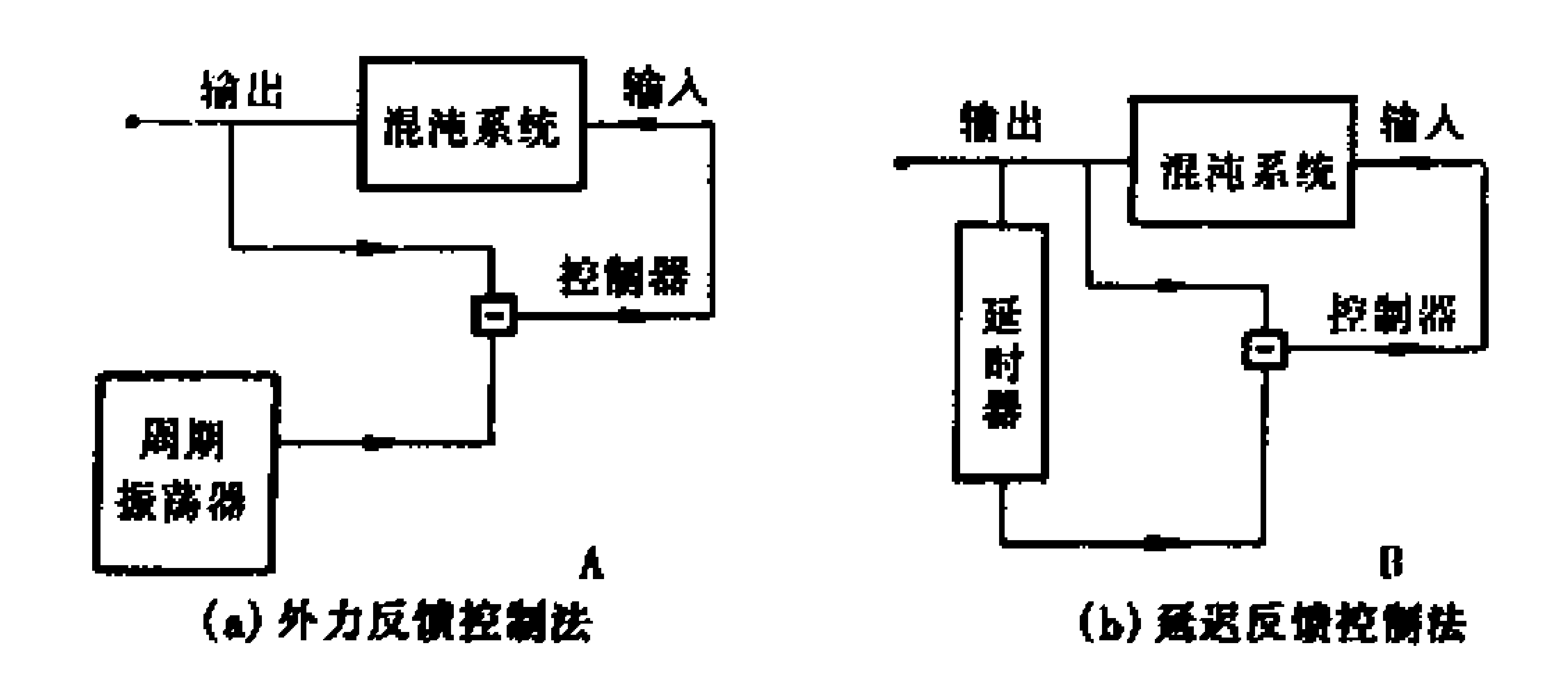
在 OGY 方法及其改进算法的控制策略中，它们都只适用于离散动力学系统及连续系统的庞加莱映像情形.

同时，上述诸法总是要求预先用计算机对系统的混沌吸引子进行较详细的分析，弄清各种不动点的位置、参数等.因为只有这样才能有的放矢地选择所期望的某个特定周期态，进行对混沌的离散控制，所以上述诸法在实际应用中也受到了限制，它们只能稳定那些特定的周期轨道，即它们的李雅普诺夫指数小于参数变化之间的时间间隔的倒数.而且，由于系统中参数之间关联很少，变化又很小，所以系统的环境涨落噪声不可避免地导致系统中偶然出现突变行为，从而使选取的某周期轨道远离所期望的周期轨道.对于大噪声情形，这种突变是经常发生的，这样所要的周期轨道都跑掉了，因此，上述诸法，特别是 OGY 方法及其几种改进方法的有效性范围受到了一定限制.

为了克服上述问题，1993 年德国学者 K. Pyragas 提出了对非线性连续系统的混沌控制方法，即自控制反馈的连续控制法，并有两种方法：一是外力反馈控制法，二是延迟反馈控制法，后一方法已经用他们设计的电子线路进行了成功的验证，前者和后者在数值研究中都显示了很大的优越性，现予以分别简介.

这两种自反馈控制法的基本思想是，考虑非线性混沌系统的输出信号与输入信号之间的自反馈耦合，或者从系统外部强迫输入一定的周期信号，或者直接把系统本身的输出信号取出一部分

但经过时间延迟后再反馈到混沌系统中去，作为控制信号，通过调节控制信号的大小及权重因子(控制因子)，来达到稳定所期望的周期信号.这两种方法都可实现对混沌吸引子的连续控制，并使不稳定周期稳定化，两法的原理图如图 5.4 所示.



(a) 外力反馈控制法　　(b) 延迟反馈控制法

图 5.4　两种自控制反馈控制法的示意图

§5.3.1　外力反馈控制法

假设非线性连续系统的动力学可以由一个非线性常微分方程(组)来描述，但是这个方程可以预先不知道，即预先不要求知道所控制系统的具体动力学模型.但是，从实验上可以测得系统的某个输出量.外力反馈控制法的特点就是，从系统外部注入一个强迫信号，用以与系统的输出量比较，并给出控制信号作为对系统的一种微扰，其前提是，无微扰时的系统(或无控系统)必须存在混沌奇怪吸引子，只有这样才能提供可控的无穷多的周期轨线或非周期轨线.嵌套技术(或嵌套定理)已经证明：利用延迟坐标的标准方法，可以从奇怪吸引子内大量的不同周期的不稳定轨线中提取一个标量信号，即可以从实验测得的时间延迟的时间序列数据中确定各种不同的周期信号，它们相应于不同的不稳定周期态，如前面所述及利用延迟坐标法分析系统的各个不动点一样，有了实验数据的分析之后，再把欲控制的信号与外部输入信号适当匹配，通过调节外力微扰量，则能达到控制目的.

通常描述系统的非线性常微分方程(组)为

$$\begin{cases}\dot{y}=P(y,x)+F(t),\\ \dot{x}=\psi(y,x)\end{cases}\tag{5.51}$$

其中 y 为输出量,矢量 x 描述系统的其余变量,它们或者是测不到的变量或者是令人不感兴趣的变量,为简单起见,我们假设只对上述第一个方程右边加入控制信号 $F(t)$,也称微扰量.当然,在 $F=0$ 时系统具有混沌奇怪吸引子,从实验上测得具有多种周期的信号,形式为 $y=y_i(t)$, $y_i(t+T_i)=y_i$,相应于不同的 UPO,这里 T_i 为第 i 个的 UPO 周期.我们验证了这些周期轨道之后,根据我们的需要和兴趣,可以选择其中某个周期轨道(信号).为了达到这个目标,我们必须设计一个特殊外部振荡器(即特殊周期信号发生器),原则上混沌系统中我们所要的各种周期信号都能由特殊信号发生器来产生,或者它产生的信号正比于 $y_i(t)$,然后,把信号 $y_i(t)$与输出信号 $y(t)$之差 $D(t)=y_i(t)-y(t)$作为一个控制信号,即

$$F(t)=K[y_i(t)-y(t)]=KD(t)\tag{5.52}$$

这里 K 为一个实验上调节的微扰的权重因子,可称为控制因子.该微扰必须引入系统输入作为一个负反馈($K<0$)信号.对于许多物理系统,这样的一种反馈的实验易于实现,(5.52)式微扰的重要特点是,它并不改变方程(5.51)的相应于 UPO, $y(t)=y_i(t)$的解,适当调节 K 即可达到稳定控制之目的,当这个稳态达到时,输出信号 $y(t)$就非常接近 $y_i(t)$,因为微扰就变得非常小.从这点上看,如同 OGY 方法一样,此法也是利用一个小外力来稳定 UPO,这里靠外部信号微扰,而 OGY 方法是靠系统参数微扰,达到异曲同工的效果.

不过,请注意,外力反馈法与 OGY 方法有一个显著不同,即 OGY 方法在控制过程中只能在系统的状态(轨线)接近不动点附近才加上微扰,否则微扰没有用,因为 OGY 方法的控制律就是基于在所期望的不动点附近的线性近似,所以凡是远离不动点的微

扰根本无效，但是，外力反馈法则不同，它无需等待轨线接近不动点，而可以在任意时刻加入微扰起控制作用.例如，甚至初始条件远离周期轨道(不动点)时，也能使系统与外部振荡器同步，允许初微扰比较大，当然，我们并不希望对所有受控的动力学系统都是这样，因为对于更复杂周期驱动的动力学系统，这样做的结果是：被稳定的 UPO 可能属于不同初始条件的区域，从而有多重稳定解，这就不是惟一的控制结果了，这是人们所不期望的情形.对于一般实验来说，也不期望有较大的初始微扰.

为了战胜多重稳态解，在许多情形下可以通过限制微扰的办法，即开窗口的办法来解决，这点在 OPF 技术中已述及，只要在反馈线路中引入一些非线性元件则可做到微扰限制，即对大偏差 D 可以达到微扰饱和，这种限制微扰可表示为

$$F(t)=\begin{cases}-F_0, & KD\leqslant F_0\\ KD(t), & -F_0<KD(t)<F_0\\ -F_0, & KD\geqslant F_0\end{cases}\tag{5.53}$$

$F_0>0$ 是微扰的饱和值，也就是最大微扰量，或允许窗口宽度.虽然(5.52)和(5.53)两种微扰方式都可以达到稳定 UPO，但是(5.53)式能有效地消除多重性问题.

应当指出，倘若(5.51)式是一组方程组，具有多个感兴趣的变量，外力反馈法并不限于只对某一个变量加一个微扰量，可以对多个变量分别给予微扰信号，当然可以是全部变量各自加微扰量，也可以部分变量各加以微扰量，这要视控制效果而定，而且对不同变量的微扰往往控制效果各不一样，有的变量微扰控制效果最好，有的则差，甚至不起控制作用.这样，我们就要对其多变量微扰后的方程组进行线性化稳定性分析，当然是考察它们的李雅普诺夫指数数值(或特征值)λ_i，当 λ_i 都小于零时，才能控制稳定住所有变量的所期望的周期轨道，λ_i 部分小于零，则部分稳定，凡是 λ 大于零的 UPO 当然就控制不住了，因此从本质上看是 λ 的变化.

Pyragas 已经对许多典型的非线性系统用上法进行了混沌控制研究，如 Rossler 系统、Lorenz 及 Duffing 系统等，都取得了满意的控制效果．为了分析系统的局域稳定性，他们也计算了 UPO 的最大李雅普诺夫指数，图 5.5 给出了李雅普诺夫指数 λ 与微扰权重 K 的关系曲线，$\lambda(k)$的负值确定相应于被稳定的 UPO 的 K 值范围，周期 -1 的 UPO 稳定在一个有限间隔 $K=[K_{min},K_{max}]$内，但是周期 -2 的 UPO 有一个有限的区域 $K=[K_{min},\infty]$的稳定范围．这里 K_{min}和 K_{max}定义了稳定性的阈值 $\lambda(K_{min})=\lambda K_{max}=0$．两条轨道的李雅普诺夫指数 $\lambda(K)$都在 $K=K_{op}$处有一个最小值，这表明在 K_{op}处达到最佳稳定控制．注意到：对于 $K>0$ 的所有值，微扰都可以使初始系统的李雅普诺夫指数减少，但是并不是所有的 K 值，都能做到通过微扰足以把 λ 变号．存在稳定的最小阈值可以这样来理解，微扰的权重 K 必须是充分地大以补偿轨道接近 UPO 的发散，K 太大导致控制畸变，这与微扰只干扰一个变量的事实有关．对于大 K 值情形，这个变量的变化是很快的，而其余变量来不及跟上这些变化．这些分析看法已被多变量控制所证实，当考虑多变量控制之后，就出现了 $\lambda(K)$都随 K 增加而单调减少的特性．

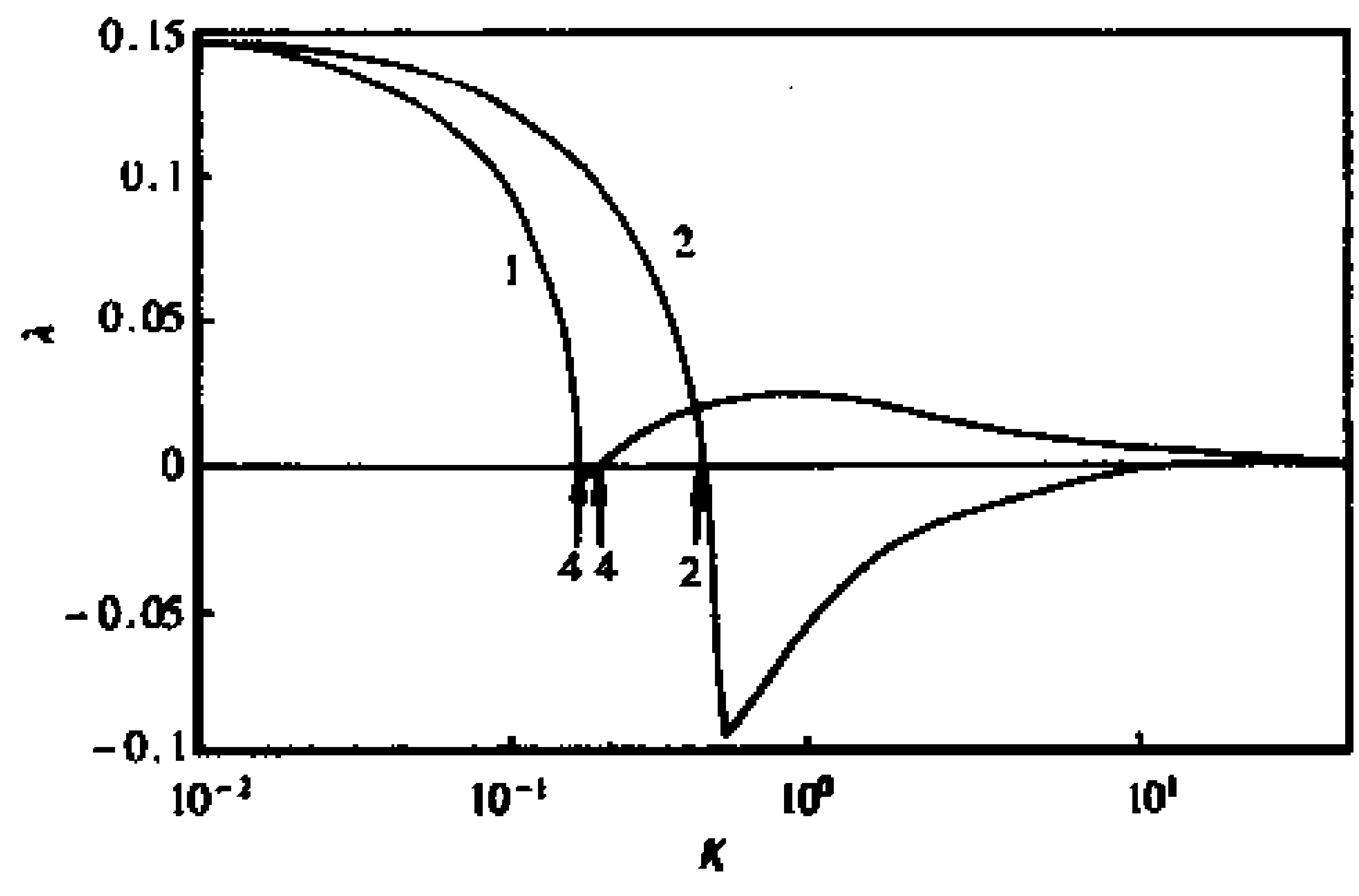


图 5.5　李雅普诺夫指数 λ 与微扰权重之间的关系

现在,我们指出,外力反馈法在实验中应用时可以分为二个步骤进行,第一步是预备阶段,研究好混沌系统的输出信号特性,如周期态的各种情形,然后应当设计研制能产生周期信号正比于 $y_i(t)$ 的专门振荡器,即信号发生器.第二步采用图 5.4(a)所示方案(如上已述)去实现所需要的混沌控制,即此法中的控制功能是由外部振荡器的信号与输出信号的差值反馈到系统来实现的.

无疑,外力反馈法的缺点就是,需要专门设计一个特殊的外部信号发生器,这在技术上要求较高,且有一定的难度.

§5.3.2 延迟反馈控制法

为了避免外力反馈法必须专门设计研制特殊振荡器的技术困难,同时提出了延迟反馈控制法.此法很简单,其主要思想是巧妙地利用系统本身的输出信号的一部分并经时间延迟后,再与原来输出信号相差,作为控制信号反馈到系统中去,即此法的微扰形式为

$$F(t)=K[y(t-\tau)-y(t)]=KD(t)$$

即以 $y(t-\tau)$ 取代外部输入信号 $y_i(t)$, τ 为延迟时间,其他做法完全与上述讨论的类似.不过,这里的延迟时间 τ 应选取与所需的某个不稳定周期时间相同,通过调节 K 及 $D(t)$,可以达到上法的相同控制效果,当 $y(t-\tau)=y(t)$,则 $F(t)=0$,可见这种微扰也并不改变系统原来的解.

Pyaragas 已经应用延迟反馈法,首先从理论上研究了几个典型的非线性系统的混沌控制,诸如 Rossler 系统、Lorenz 系统及 Duffing 系统,实现了对低周期轨道的稳定控制.

Pyragas 和 Tamasevicins 为了验证延迟反馈法,已经设计了一个电子线路作了实验,见图 5.6.该实验电子线路的特点是,简单易做,混沌系统为一个外部周期驱动的非线性振荡器,主要由具有负阻的隧道二极管(非线性元件)及电感器等组成.线路的参数如下:$L=17.4\mu H$, $C=510pF$, $R=5.1k\Omega$,外部驱动频率 $f_{ex}=$

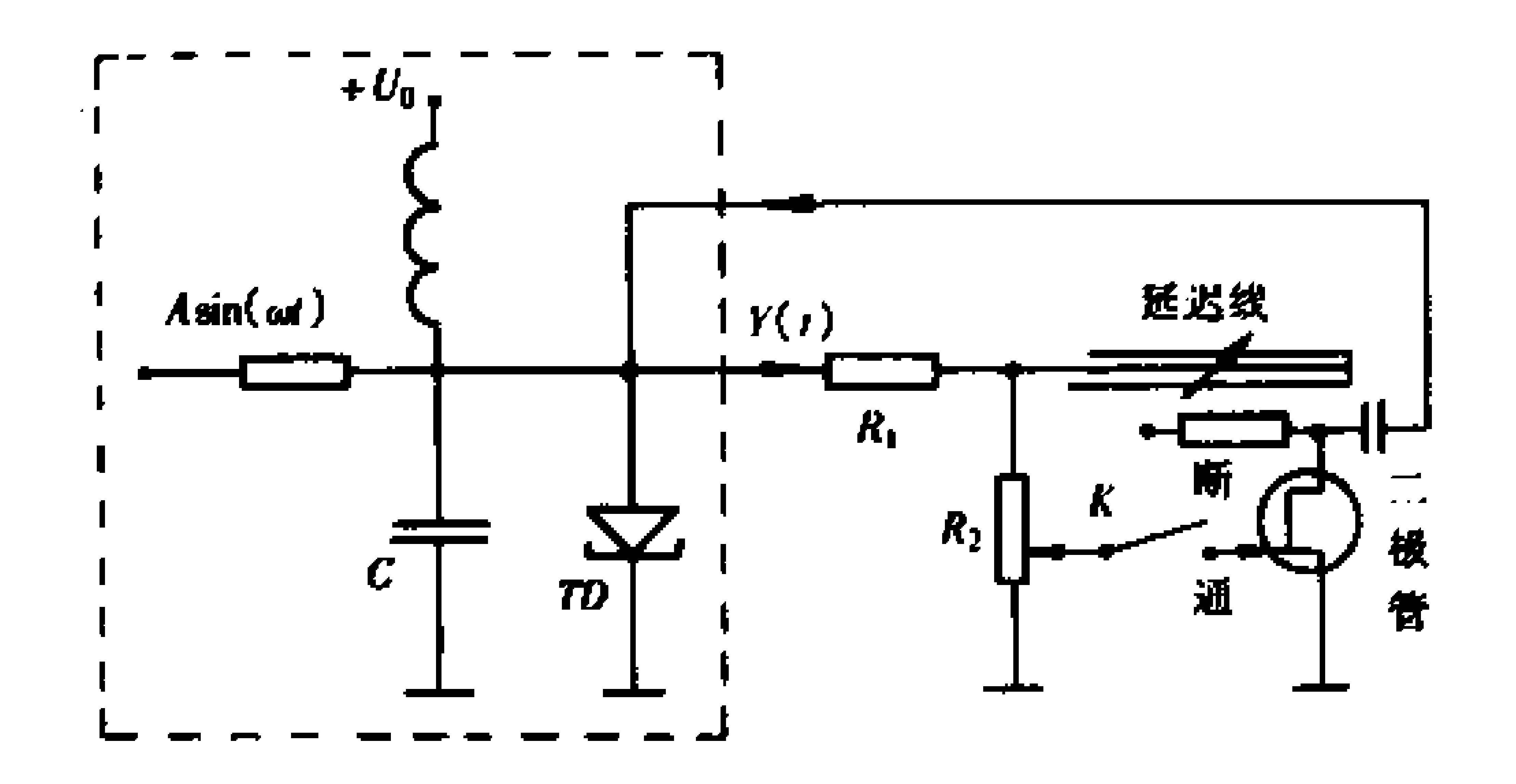


图 5.6 用于实验验证延迟反馈法设计的电子线路

3.8MHz,驱动幅度 A 可变,最大值为 3V,交流偏压为 U 小于 70mV,采用锗隧道二极管,峰值电流为 $I_p=1.5\text{mA}$,峰值电压 $U_p=67\text{mA}$.

可以用下列方程描述该振荡器的动力学性质:

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+C\\ \dot{y}=-x-bN(y)-dy+a\sin wt+F(y,c)\end{cases}\tag{5.54}$$

在无控下,$F(t)=0$,上述无量纲变量和参数为

$$\begin{aligned}&x=ZI/U_p,Y=U/U_p,t=t/T_0\\&F=ZI_c/U_p,Z=\sqrt{L/C},T_0=\sqrt{LC}\\&a=ZA/(RU_p),b=ZI_p/U_p,c=U_0/U_p\\&d=Z/(R\parallel R_c),W=2\pi f_\alpha T_0,T=2\pi/\omega\end{aligned}\tag{5.55}$$

这里 U_p 为电容器两端电压,I 为通过电感的电流,I_C 为控制电流,R_C 为负阻电阻.隧道二极管的归一化电流——电压特性为

$$N(y)=\{y^{\alpha}\exp[\alpha(1-y)]+\beta[\exp(y)-1]\}/\{1+\beta[\exp(1)-1]\}\tag{5.56}$$

其中 $\alpha=1.7,\beta=0.001$.

为了实现延迟反馈控制，设计了特殊模拟电子线路作为控制器，主要参数为：$R_1=1.3\text{k}\Omega$，$R_2=260\Omega$，延迟线的波阻 $Z_d=260\Omega$ $(R_2=Z_d)$. 可变螺旋延迟线的最大延迟时间为 $\tau=600\text{ns}$（一个方向），在短路连接双向下 $\tau_{max}=1200\text{ns}$. 三极管电导 $S=11\text{mA/V}$，反馈控制信号为

$$F(y,\tau)=K[y(t-\tau)-y(t)]$$

$$K=\text{hPSZ}_d,\tau=T_d/T_0 \tag{5.57}$$

其中

$$P=(R_2\parallel Z_d)/(R_1+R_2\parallel Z_d)$$

由分压器 R_d 引起的附加分流系数 $h<1$，T_d 为可调的双向延迟时间

利用图 5.6 的实验实现了对不稳定周期的稳定控制，这里关键的是有一个可调的延迟线满足对不同周期的时间延迟要求，类似实验也证实了这点，所以对范围广泛的延迟时间内可调的延迟线或延迟器的研制是本法的主要技术难题，一旦延迟线（器）得以解决，实验控制混沌问题便迎刃而解，目前实验上用时间延迟反馈法可实现对周期 5 的稳定控制，图 5.7 给出了该法实验结果，用功率谱表示，其特点是：

当外部驱动幅度 $A=2.5V$ 时，(a)未控制前的混沌态功率谱，(b)受控后的周期 5 功率谱，(c)受控后的周期 2 功率谱.

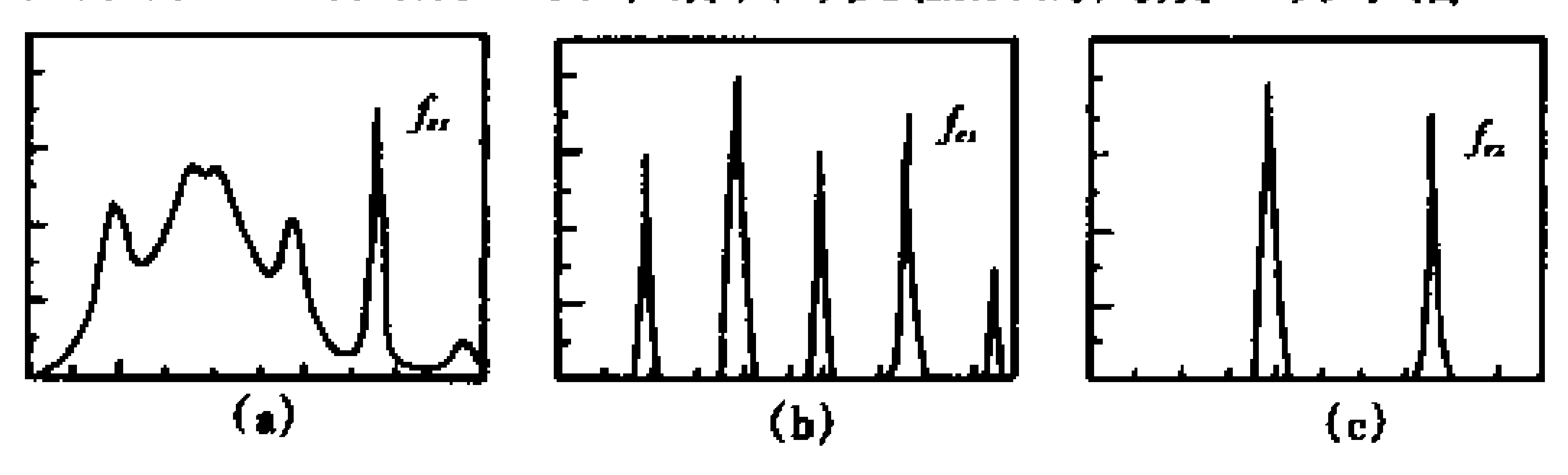


图 5.7　对图 5.6 实验线路用延迟反馈法的控制结果（功率谱图）

(a)无控时振荡器处于混沌态，具有宽广的功率谱，(b)、(c)在受控后分别获得对周期5及2的稳定控制，它们的功率谱对应于所期望的周期对应的尖峰，其位置与 f_{α}/m 的最低频率的周期相对应，这里 f_{α} 为外部周期信号的驱动频率，m 为受控的周期数，这些结果与理论上相符合.

屈知林等人对上述连续反馈法在多变量情形作了补充研究，并用 Lorenz 及 Duffing 系统分别作了数值计算表明：在多维动力学系统中只对一个变量进行反馈控制是不充分的.在一些情形下，要实现对多维系统的混沌的连续反馈控制必须用一个以上的变量才是有效的.因此，在应用连续反馈控制法时，对具体问题要具体分析，要从不同周期稳定控制所能达到的李雅普诺夫指数的稳定范围内，去寻求有效的控制.我们将会进一步看到，上述连续反馈控制法是相当简便有效的，它可以拓广应用到混沌同步，即对非周期轨道的稳定控制中.最后，Kittel，Parisi 与 Pyragas 进一步采用自适应延迟时间实现了对混沌的延迟反馈控制，这样可以达到控制任一所需的周期轨道.

与 OGY 控制策略相比，这种控制可在任何时刻启动且不需局部线性化，但控制强度向量的选取比较困难.迄今该方法的成功与失败皆有报道.

§5.4 系统变量的脉冲反馈法

OGY 方法及其改进方法、连续反馈控制法等混沌控制方法，都是对系统的参数进行时间微扰反馈，达到控制某些不稳定的周期轨道的目的.这就要求找到一个合适的系统参数可以进行微扰调整.但实际上并非所有的非线性系统都可以找到可调的合适参数，事实上，实际中的好多系统很难找到它们的合适的可调参数.

Guemez 及 Matias 提出的正比于系统变量的脉冲反馈控制法可以适当地改变系统变量来达到控制混沌的目的.

1993年他们将系统变量脉冲反馈法(简称PPSV)应用于

逻辑斯谛映像：

$$x_{n+1}=4\lambda x_n(1-x_n) \tag{5.58}$$

其控制算法可以概述如下，从 n 次迭代开始，每隔 n 次迭代，把正比于系统变量的下列形式

$$x_n'=x_n(1+\gamma) \tag{5.59}$$

反馈到系统中去，它有两个控制参数，一是脉冲间隔 Δn，二是反馈系数 γ，即反馈脉冲强度，γ 可以取正值或负值. 适当地选择 Δn 及 γ 值可以实现对逻辑斯谛映像中的不稳定周期轨道的稳定有效控制.

对于逻辑斯谛映像，当 $\lambda=1.0$，取控制参数 $\gamma=-0.396$ 及 $\Delta n=4$，则系统的混沌态受控后，得到周期 1 的稳定轨道；而当 $\lambda=0.9$，取 $\gamma=0.5$ 及 $\Delta n=5$ 时，则得到周期 3 的稳定轨道. 通常施以此法控制的头几个脉冲内，系统并不马上变成所需的周期态，有一段短暂的过渡，然后逐渐进入稳定的周期态，通常达到稳定控制所需要的迭代次数并不多，但为了保证收敛和有效稳定起见，他们迭代到 3 万次.

同时应用 PPSV 方法对二维离散映像 – Burgers 映像进行混沌控制：

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\upsilon)x_n-y_n^2 \\ y_{n+1}=(1+\mu+x_n)y_n \end{cases} \tag{5.60}$$

这时，控制算法是以下列形式在每隔 Δn 迭代时分别修改 x 和 y：

$$\begin{cases} x'_n=x_n(1+\gamma_1) \\ y'_n=y_n(1+\gamma_2) \end{cases} \tag{5.61}$$

这里 γ_1 和 γ_2 分别表示对 x 和 y 施加的脉冲强度，γ_1 和 γ_2 可以取不同值. 简单起见可取 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$，也可以达到控制效果.

无疑，对于 n 维离散系统，可以以此类推，原则上可以有 n 个

脉冲强度，分别控制系统的各变量. 简单起见，仍可以取所有的脉冲强度都是一样的，适当调整 Δn 和 γ 也能实现混沌控制. 我们在第三部分中讨论复数洛仑兹-哈旨系统时，涉及四个变量，亦采用相同的脉冲强度因子，实现了对超混沌的有效稳定控制.

对于 Burgers 映像(5.60)，应用(5.61)控制后的一些结果如下：(1)对于 $v=1$ 及 $\mu=0.72$，(a) $\Delta n=8$ 及 $\gamma=-0.045$，得到稳定的周期 8. (b) $\Delta n=9$ 及 $\gamma=-0.025$，则得到稳定的周期 9. (2)对于 $v=1$ 及 $\mu=-0.72$，当 $\Delta n=1$ 及 $\gamma=-0.04$ 时，则得到稳定的准周期.

PPSV 方法同样适用于非线性连续系统中的混沌控制. Matias 与 Guemez 已用此法成功地实现了对三变量自催化系统及实数 Lorenz系统的混沌控制. 例如，对前者的控制结果如下：当取系统参数 $k=10, \delta=0.02, \sigma=0.005$ 及 $\mu=0.154$ 时，积分步长取 $\Delta t=0.00005$，控制对数 $\Delta n=100, \gamma=-0.02$，在 $t=2$ 之后注入脉冲控制，则系统从混沌态经受控后得到稳定的周期 1，而在相同上述参数下，改变控制参数 $\gamma=-0.006$，则得到稳定的周期 2. 但是，当 $\gamma=0.006$ 时，却得稳定的周期 1. 当然，选择不同的 γ 和 Δn 可以得到丰富的新的动力学行为.

对于Lorenz系统：

$$\begin{cases} \dot{x}=-\sigma(x-y) \\ \dot{y}=(\rho-z)x-y \\ \dot{z}=xy-\beta z \end{cases} \tag{5.62}$$

我们知道，对于 $\beta=8/3, \sigma=10, \rho=28$，Lorenz系统出现"蝴蝶效应"，它有两个不稳定不动点，轨线围绕两个不动点随机跳动，形成螺旋状，恰像两个蝴蝶的翅膀. 令人感兴趣的是，应用 PPSV 方法，可以稳定住其中一个不动点，例如控制参数取 $\gamma=-0.02, \Delta n=100$，积分步长为 0.00005，则达到稳定住Lorenz系统中的不动点.

对于一个混沌控制方法，抗噪声干扰的能力是很重要的问题. Matias 和 Guemez 对 PPSV 方法的噪声影响作了初步研究，他们

先考虑具有以下形式的多重的噪声情形：

$$x'_i = x_i + \sigma[0,1]\Gamma x_i \tag{5.63}$$

即在每积分一步都存在这种噪声影响，这里 $\sigma[0,1]$为具有平均值为零和宽度为 1 的高斯分布的随机变量，Γ 为噪声强度，最大允许的 Γ 值与脉冲宽度 Γ 有一定关系，研究结果表明：当 $\Gamma=0.001$ 时，白噪声的影响较小，但是当 $\Gamma=0.002$ 时，附加噪声效应对三变量自催化系统的影响就很明显. 特别是当受控的周期态幅度较小时，影响不能忽略，而且是很重要的. 因为这时小扰动就会导致相邻周期态的转变，从而难以达到对某个所需周期轨道的稳定有效控制. 因此，在实际应用中对系统的外部噪声应加以适当的限制.

总的说，PPSV 方法的策略是通过只改变系统的变量而不改变系统参数来达到控制混沌，由此受控所获得的新的所需的动力学行为主要取决于控制参数：脉冲时间间隔 Δn 及脉冲强度 γ_i. 当系统具有 i 维时，γ_i 可以有 i 个进行调控，不过可以灵活掌握，简单地取所有相同的 γ 或 n 个不同的 γ，视具体系统及不同情形而定. 因此该法具有很大的灵活性和优越性. 它非常适用于一类难以找到合适的可调系统参数的一类系统. 例如由非线性效应所驱动的一类复杂系统，当考虑正反馈时，可观察到确定性混沌. 这种复杂系统能提供可以稳定无穷多个不稳定周期态的方法. 应用系统变量的脉冲反馈法，可以采用一些分段脉冲注人以改变适当的关键的宏观经济变量来实现经济系统的控制.

OGY 方法及其改进方法对于从准周期通向混沌的系统还无法进行混沌控制，而 PPSV 方法则可应用于该类系统，因为 PPSV 方法不要求具有一个鞍型特性的不稳定轨道，即不要求具有一个稳定的流形便能抑制混沌 PPSV 方法对于当系统变量的微扰很小时，它仍能展示出与原来系统的相同类型的动力学行为，因此其具有很大的应用潜力.

§5.5　系统的线性反馈控制方法

我们以 Chua 线路为例，阐明线性反馈控制法. 设对于一个给定参数值 Chua 线路的任意解为$(\hat{x}(t),\hat{y}(t),\hat{z}(t))$，其可为一个不稳定周期轨道等，欲控制的实质系统轨迹的目标是这样的，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $T_\varepsilon>t_0$，对于所有 $t\geqslant T_\varepsilon$，只要$|x(t)-\hat{x}(t)|\leqslant\varepsilon$，$|y(t)-\hat{y}(t)|\leqslant\varepsilon$ 及$|z(t)-\hat{z}(t)|\leqslant\varepsilon$，使其满足下述混沌控制目标.

定理 5.1　设$(\hat{x}(t),\hat{y}(t),\hat{z}(t))$为 Chua 线路的不稳定极限环，则可通过下列形式的线性反馈控制

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -k\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ y-\hat{y} \\ z-\hat{z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ y-\hat{y} \\ z-\hat{z} \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

把 Chua 线路的混沌轨道驱动而达到这个极限环，只要满足下列条件：

$$0<\frac{1}{G_b+1}\leqslant k_{22}\leqslant\frac{1}{G_a+1} \tag{5.65}$$

受控线路的方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}=\alpha[y-x-g(x)] \\ \dot{y}=x-y+z-k_{22}(y-\hat{y}) \\ \dot{z}=\beta y \end{cases} \tag{5.66}$$

其中 g 是具有分段线性特征的电压与受控电阻之特性的非线性函数，G_a 和 G_b 分别为分段线性的内斜率和外斜率. 该控制方案的方块图示于图 5.8 中.

这种线性反馈控制法具有下列特点：

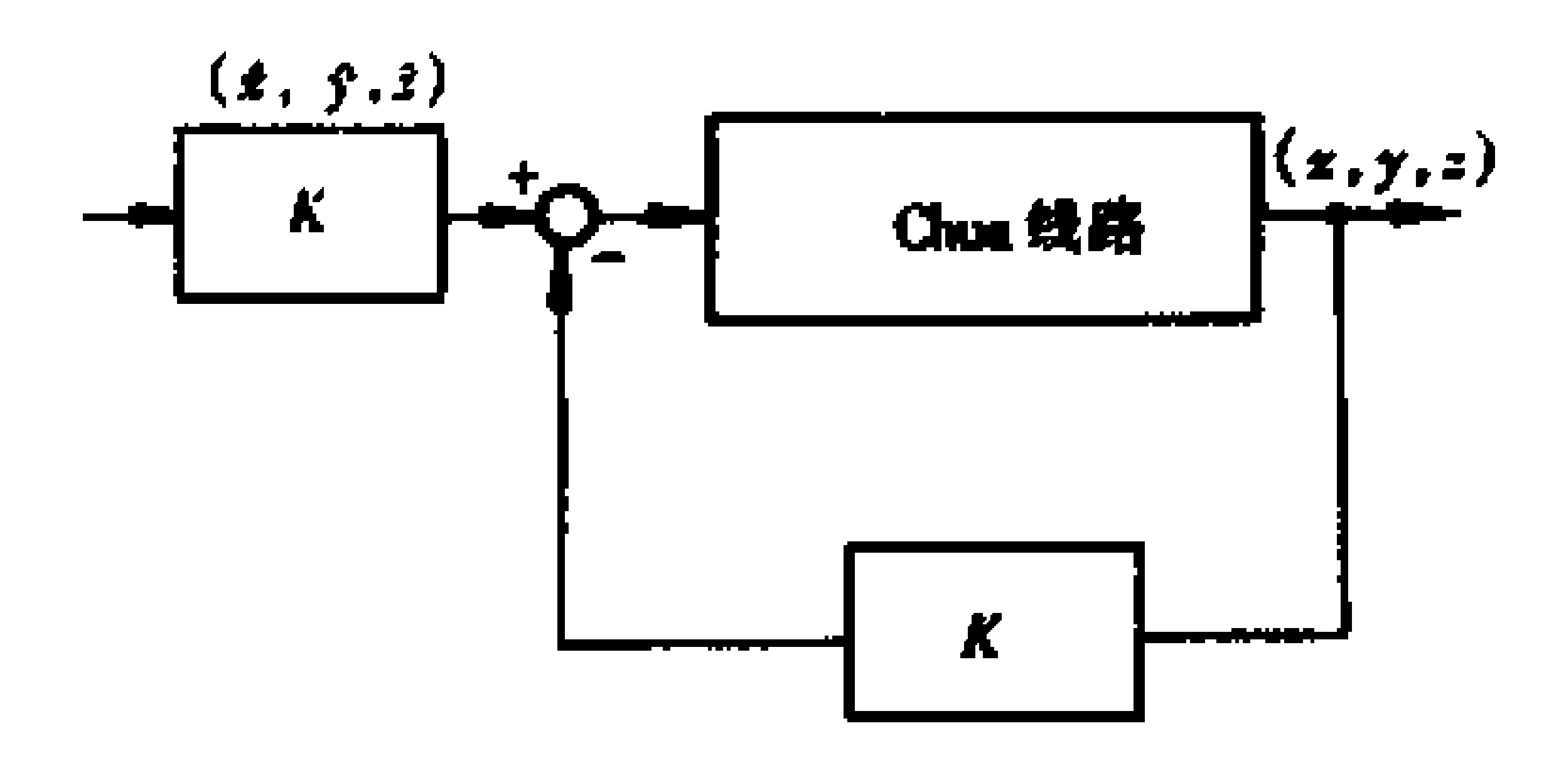


图 5.8 利用经典的线性控制器对一混沌系统实现反馈控制的方块示意图

(1)这是一种反馈控制法,它可以用于对原方程(系统)中任意解的目标控制,诸如不动点,不稳定周期轨道等目标的控制.

(2)该控制器结构简单,易于制造.

(3)它不受小参数变化的影响,具有抗干扰特性.

(4)对于存在许多系统变量相互作用的一些实际系统,该法的应用有一定的困难.因此,要进一步从工程应用角度作进一步的改进.

Liu,Barbora 和 Leife 应用直接信号反馈在具有饱和吸收器的激光系统上实现了对混沌的稳定控制.他们考虑了具有 $SF_6 + CO_2$ 的腔型激光系统,该系统可用下列比率方程组描述:

$$\begin{aligned}\dot{I} &= I(U - W - 1)\\ \dot{U} &= e_1[V - U(1 + I)]\\ \dot{V} &= e_1[d_1 + bU - I)\\ \dot{W} &= e_2[d_2 - W(1 - aI)]\end{aligned} \tag{5.67}$$

这里 I 为激光强度,U 为增益介质中的粒子数反转,V 为增益的三能级模型耦合跃迁中的粒子数之和,W 为饱和吸收器的粒子数差值.系数 e_1 和 e_2 描述粒子的变化率,d_1 和 d_2 分别表示无振荡时增益的和吸收和平衡粒子数,而 a 和 b 分别给出由于吸收器及增益介质中的吸收和受激发射的粒子饱和数.在一定参数下,通过

数值求解比率方程组,不难发现混沌运动.

采用直接信号反馈控制,就是在上述激光强度方程中加入激光强度反馈项,即

$$I = I(U - W - 1) + CI \tag{5.68}$$

这里 C 为直接反馈系数.

为了把数值模拟结果与实验进行密切比较,已利用激光失谐作为控制参数,从数值计算上,它把频率 ω 包含在 d_1 及 d_2 中,即

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{d_{10}}{1-(\omega/\tau_1)^2} \\ d_2 &= \frac{d_{20}}{1-(\omega/\tau_2)^2} \end{aligned} \tag{5.69}$$

当选择中心频率为 0 时,ω 为激光失谐,T_1 及 T_2 分别表示增益和吸收峰型的宽度.易知在下列参数下无反馈控制的激光系统处于混沌态,$e_1 = 0.137$, $e_2 = 1.60$, $b = 0.85$, $a = 4.17$, $d_{10} = 1.99677$, $d_{20} = 2.17816$, $\Gamma_1 = 150\text{MHz}$, $\Gamma_2 = 190\text{MHz}$, $\omega = 0 \sim 20\text{MHz}$,一旦加上反馈控制后,例如 $C = 0.06$, $\omega = 7.7\text{MHz}$,则激光系统从混沌态立即转变为稳定的周期态 1.从实验上可以调节第二反射镜与输出反射镜之间的距离,从 10 变到 20 厘米以达到控制.这样,只需激光输出信号的 6% 反馈就实现了有效控制.在不同的反馈系统(强度)C 下,可以研究激光系统的倍周期分岔与激光失谐度的关系,从而深入了解反馈强度的控制效果.显然,从分岔图可知,通过把激光强度的混沌信号直接作适当的线性反馈,可以达到推迟或消除系统从倍周期分岔通向混沌的道路.这与通过改变参数以控制分岔的方法有类似之处,所不同的这里是改变线性反馈强度.因此,此线性反馈控制法可以拓广应用于其他非线性系统,只要动力学系统的输出信号在实验中可以直接用于反馈信号,且有明确的意义即可.例如,该法已用于 Lorenz 系统,在参数 $\sigma = 10$, $\gamma = 80$ 及 $b = 0.4$, Lorenz 系统处于混沌运动,李雅普诺

夫指数分别为 $\lambda = 0.83, -0.02, -17.3$，把直接反馈应用于系统的三个变量后，便获得了稳定的周期振荡，对 x, y, z 三个变量同时各自反馈的系数分别为 $C = -0.085, 9.5, 0.35$，受控后系统的李雅普诺夫指数实现了从正变成负的转变.

应用上述对 y 的线性反馈控制技术，已经从实验上实现了对鞍型不稳定极限环的稳定控制. 但其并非普适，对于具体系统要具体分析. 在许多情况下，可能将它拓广为非线性反馈更有实际意义，但这从技术上来讲要求更严格了，操作起来有更大的难度与复杂性，这将是混沌控制理论中一个重要课题.

§5.6 微扰控制方法

OGY 方法及其改进方法，归根结底是对系统参数随时间变化的一种微扰控制方法，人们自然要提出这样的问题，即除了此种混沌微扰控制方法以外还有没有其他的混沌微扰控制方法，答案是肯定的. Lima 及 Pettini 应用参数共振微扰法对 Duffing-Holmes 系统进行了混沌微扰控制，他们在原 Duffing 方程的 x^3 项的系数中加进了一个弱的周期微扰项，使方程变为(5.70)式

$$\ddot{x} - x + \beta[1 + \eta\cos(\Omega t)]x^3 = -\delta\dot{x} + \gamma\cos(\omega t) \qquad (5.70)$$

其中 $\eta\cos\Omega t$ 是对 x^3 的系数的微扰，$\eta \ll 1$ 是参数微扰的小幅度，Ω 为微扰频率，$\gamma\cos(\omega t)$则是对系统的强迫周期项.

当 $\eta \equiv 0$ 时，系统无参数微扰其处于混沌(或奇怪吸引子)状态，一旦加上对非线性立方项 x^3 的系数进行小的周期微扰动，则可以把系统的混沌态仰制掉，进而使系统的运动转化到我们所需要的周期态运动. 实现这种混沌控制的具体方法是：当微扰频率 Ω 与外部强迫项的频率 ω 发生共振时，则系统的混沌运动被仰制，随之我们便获得我们所需要的周期态运动. 学者们已用 Melnikov 方法及数值方法对此进行了论证. 研究表明 Melnikov 方法提供了系统由混沌态转换成周期态的阈值，并给出在主共振附近的

李雅普诺夫指数 λ 的变化方向及大小. 数值研究表明：当 λ 变为 0 时，则混沌行为消失了，而当 λ 变为负数时，则系统转变为周期运动.

如果不是对系统参数加一个弱周期微扰，而是对整个系统外加小的周期强迫微扰，同样可以达到抑制混沌的效果，这对于混沌控制的实际应用是重要的和令人感兴趣的. 众所周知，外力对动力系统的分岔行为尤其是倍周期分岔点附近的行为有重大影响，它可以导致周期放大，或分岔点移动，以此达到稳定周期，我们将 Duffing-Holmes 振荡器作为例子来研究系统的微小外力扰动来控制混沌.

$$\ddot{x} - x + \alpha x^3 = -\delta\dot{x} + \gamma \mathrm{Sn}(\omega t; m) \tag{5.71}$$

这里 $\delta, \gamma \ll 1$，$\mathrm{Sn}(\omega t; m)$ 为参数 m 的约瑟夫森效应(JEF). 当 $m = 0$ 时，$\mathrm{Sn}(\omega t; m) = \sin(\omega t)$，即回到谐强迫的情形，这时我们可以固定强迫周期 $T =$ 常数，使得频率 $\omega(m) = 4k(m)/T$，这里 k 为第一类型椭圆积分.

$$\mathrm{Sn}(\omega t; m = 1) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin[(2n+1)2\pi t/T] \tag{5.72}$$

注意到这里周期 T 的方波函数的傅里叶展开，由于 Gibbs 现象形状并非精确为方波，尽管如此，在 $m = 1$ 极限下可将式(5.71)写为

$$\begin{cases} \ddot{x} - x + \alpha x^3 + \delta\dot{x} - \gamma = 0, & 0 < t < T/2 \\ \ddot{x} - x + \alpha x^3 + \delta\dot{x} + \gamma = 0, & T/2 < t < T \end{cases} \tag{5.73}$$

方程(5.73)的参数空间由$(\alpha, \delta, \gamma, m)$构成四维空间，取 α，δ 和 γ 为常数，将 $m \ll 0$ 变到 1 来研究在微扰开头下偏差的纯效应. 我们主要对在此变化下的混沌的稳定性感兴趣.

对方程(5.73)其 Melnikov 距离为

$$\Delta(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{-\delta u_s^2(t) + \gamma u_s(t) \mathrm{Sn}[w(t + t_0); m]\} \mathrm{d}t \tag{5.74}$$

这里

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sech} t, u_s(t) = -\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sech} t \ \tanh t \tag{5.75}$$

是同宿(homoclinic)回路的参数方程,它相应于当 $\delta = \gamma = 0$ 时 Duffing-Holmes 方程的双曲不动点,利用函数 Sn 的傅里叶展式,经一些代数运算之后式(5.74)可写为

$$\Delta(t_0) = -(2\delta/\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}\tau \tanh^2\tau \mathrm{d}\tau - \gamma(2/\alpha m)^{1/2}(\pi/K)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{csch}[(n+1/2)\pi K'/K] \cos[(n+1/2)\pi\omega t_0/K]$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}\tau \sinh\tau \sin[(n+1/2)\pi\omega\tau/K] \mathrm{d}\tau \tag{5.76}$$

其中 K' 为第一类型的互补完全积分. 可以从标准积分表查出最终积分. 最后,可得

$$\Delta(t_0) = -(4\delta/3\alpha) - \gamma \frac{\omega\pi^3}{K^2(2\alpha m)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n$$

$$+ 1)\mathrm{csch}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi K'}{K}\right] \mathrm{sech}\left[\frac{(2n+1)\pi^2\omega}{4K}\right]$$

$$\times \cos\left[\frac{(2n+1)\pi\omega t_0}{2K}\right] \tag{5.77}$$

从上可知,当 $\omega(m) = 4K(m)/T$,倘若

$$\delta/\gamma < U(\alpha, m, T) \tag{5.78}$$

这里阈值函数为

$$U(\alpha,m,T)=\frac{3\sqrt{2}\pi^3}{2TK}\left[\frac{\alpha}{m}\right]^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\operatorname{csch}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi K'}{K}\right]\operatorname{sech}\left[\frac{(2n+1)\pi^2}{T}\right] \quad (5.79)$$

则可证明:对于初始条件充分接近于无微扰的分离线,(5.75) 的轨线保证有一个同宿分岔.上述 T 和 α 为常数.

R.Chacon 与 J.D.Bejarano 用上法研究了混沌阈值与强迫形式参数 m 的关系.我们来看 $m=1$ 的极限情形.从方程(5.79),我们得到

$$U(\alpha,1,T)=6\pi(\sqrt{2}\alpha/T)^4\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sech}[(2n+1)\pi^2/T] \quad (5.80)$$

具有极限 $\lim_{T\to\infty}U(\alpha,1,T)=0$,即在此极限下不可能存在混沌行为,这个结果与有关谐波情形的熟知结果相一致.

对于 $m=0$ 情形,从(5.80) 可得

$$U(\alpha,0,T)=3(\pi^2\sqrt{2\alpha}/2T)\operatorname{sech}(\pi^2/T) \quad (5.81)$$

总之,对于固定的 α,阈值函数 $U(\alpha,m,T)$ 只是 T 的函数,它对于每一个 $m\in[0,1]$ 都有相同的定量的形状.它们都是只有一个最大值的正函数,且满足 $\lim_{T\to 0,\infty}U(\alpha,m,T)=0$.直接计算表明:从(5.79) 式计算的理论的混沌阈值与数值实验之间的一致程度与其他 m 值一样,对于 $m\to 1$ 是相同的.换言之,$m\to 1$(方波)情形从定量上与谐波情形($m=0$) 并无差别.

通过外部周期微扰方法控制混沌的机制,实质上与参数共振控制法是相同的,因为参数共振条件表明,属于同一个周期函数的相同的傅里叶展开,这样的周期函数与哈密顿系数的某些共振稳态周期解密切相关,只要寻求的是整个方程的规则响应即可.不过,共振的相互作用还可能影响这些周期轨道的稳定性.

我们可以用下列离散映像阐明外部周期微扰等价效果：

$$x_{n+1} = (\gamma + \varepsilon f_n) x_n \tag{5.82}$$

这里 $\gamma > 0$，$\langle f_n \rangle = 0$，$\langle f_n^2 \rangle = 1$，即 $f_n = \sqrt{2}\cos n$，$\langle\rangle$ 表示对所有 n 求平均. 当 $\varepsilon = 0$ 时，不动点 x 很显然是不稳定的，而对于 ε 的有限值，上述映像的李雅普诺夫指数为

$$\lambda = \mathrm{Re}\langle \ln(\gamma + \varepsilon f_n) \rangle \tag{5.83}$$

当 ε 为小值时，则

$$\lambda = \ln\gamma - \varepsilon^2/\gamma^2 + O(\varepsilon^3) \tag{5.84}$$

这样，当 $\gamma^2 \ln\lambda < \varepsilon^2$，则 $\lambda < 0$. 当 $\gamma = 1 + \delta$，$\delta \ll 1$ 时，这个条件变为 $|\gamma| < \frac{1}{2}\varepsilon^2$，$x$ 才是稳定的. 值得注意的是，甚至 $\varepsilon^2 < \gamma^2 \lg\gamma$ 时，正如实验所观测的一样，外力周期微扰也能有效地减小 λ 值. 李雅普诺夫指数 λ 从正向负的转变表明：用外部周期小微扰，可以达到稳定控制不稳定周期轨道. 此法与参数共振法的本质是相同的.

§5.7　自适应控制方法

自适应控制的理论研究及应用已有 30 多年历史，但将它用来控制混沌这类复杂非线性动力学现象还刚刚开始，该法关键是构造自适应控制系统的参考模型. 主要有两类参考模型. 一类是简接自适应控制器，它利用系统参数的连机在线计算来调节控制律. 另一类是直接自适应控制器，它可以直接调节控制律，以使得系统与模型的参考态之间的误差最小.

近年来国内外已把自适应控制原理应用于混沌的控制，不仅应用于连续系统，而且应用于离散映像，它是一种反馈控制方法，它虽知道系统的动力学模型，但并不知道可得到的系统参数的控制目标所需的数值. 其关键问题是设计一个参考模型，构成总体的动力学系统并不依赖于原系统的参数来获得自适应.

考虑映射(5.2)所确定的动力系统，Hubermen，Sinha等研究的参数自调节控制问题为

$$\begin{cases} U_{k+1} = P(U_k, P_k) \\ P_{k+1} = P_k + g(U_k - \xi_F^*) \end{cases} \tag{5.85}$$

其中向量函数 $g(\cdot)$ 描述控制参数 P_{k+1} 随系统状态 U_k 偏离目标状态 ξ_F^* 的误差而自调节的规律，他们着重研究的是线性自调节规律

$$P_{k+1} = P_k - \sigma^T(U_k - \xi_F^*) \tag{5.86}$$

Hubermen，Sinha等提出这种策略的初衷并不是控制混沌，而是欲使受到参数大扰动的系统仍能返回原来的渐近稳定周期运动状态.

显然正确设计控制强度 σ 是控制成败的关键，Sinha指出，若原系统是一维映射且具有渐近稳定的不动点 ξ_F^*，则在充分小的控制强度 σ 下受控系统可以渐近稳定地回到 ξ_F^*，所用时间一般反比于控制强度 σ，但该结论并不适用于高维映射. 此外，用该方法控制混沌运动时，作为目标的不动点 ξ_F^* 可能稳定也可能不稳定. 然而，参数自调节规律(5.86)将混沌运动控制到不稳定不动点上的能力非常有限，以最简单的一维映射为例，它只有在线性化映射特征值 $\lambda \in (-3,1)$ 时才有效，且控制强度 σ 的取值范围很窄.

最近学者们将参数自调节控制律修改为

$$P_{k+1} = P^* - \sigma(U_k - \xi_F^*) - \epsilon(P_k - P^*) \tag{5.87}$$

这时(5.85)式可在 (ξ_F^*, P^*) 附近线性化为

$$\begin{bmatrix} U_{k+1} - \xi_F^* \\ P_{k+1} - P^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ -\sigma & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k - \xi_F^* \\ P_k - P^* \end{bmatrix}$$

$$= L \begin{bmatrix} U_k - \xi_F^* \\ P_k - P^* \end{bmatrix} \tag{5.88}$$

改写式中的映射点矩阵 L 为

$$L = \begin{bmatrix} A & b \\ -\sigma & -\epsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\sigma, \epsilon] = \bar{A} - \bar{b}\bar{\sigma}^T \tag{5.89}$$

显然 σ 的选取是一个扩张维数的线性映射极点配置问题. 因此,在可控前提下可选择适宜的 σ 使矩阵 L 的特征值均位于单位圆内,从而使后继映射点 U_{k+1} 趋于不动点 ξ_F^*.

这提供了一种设计高维映射控制强度的方法,且不必考虑原映射不动点的稳定性. 这种参数自调节规律相当于放松了(5.86)式对 $\epsilon = 1$ 的约束,故给极点配置带来了灵活性,仍以具有特征值 λ 的一维映射为例,为使受控系统渐近稳定,取 $\epsilon = -\lambda$ 可保证对任意的 λ 均存在等宽度的 σ 取值范围.

自适应控制方法不只限于离散系统,同样适用于连续时间系统. 这时,由下列常微分方程组来实现对连续时间系统的混沌控制:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x;\mu) \\ \dfrac{dy}{dt} = F_M(x;\mu_g) \\ \dfrac{d\mu}{dt} = aG(x_n - y_n) \end{cases} \tag{5.90}$$

这里 F 是流函数. 对于连续流控制的研究,如对 Lorenz 系统, Roessler 流等,已经证明,它们遵循相同的标度.

上述讨论都是在已知动力学系统的前提下应用自适应控制方法. 那么,倘若动力学系统 F 未知时是否也适用呢? 回答是可以的. 不过这时模型动力学 F_M 不得不另行求得. 为了尽可能地逼真实验情形,我们利用实验可测得的系统动力学变量之一的时间序列来构造模型. 如当系统处于目标区域时,前面所记录的一个动力

学变量时序 $x_k, k = 1,2,3,\cdots,N$. 于是从该时序可以重构模型动力学.

为此,时序数据至少应该满足一些基本条件. 第一,在整个时序记录期间系统应处于它的目标区域. 第二,时序应该足够长,使它恰当覆盖了状态空间的吸引子. 更具体地,时序长度与自相关时间之比率应该较高. 最后,时序应该具有低的信噪比,这些条件是十分必要的. 根据几个嵌套定理,这些变量的状态空间与原来相空间是微分同胚的. 在微分同胚下,渐近结构(如吸引子)的拓扑守恒. 于是,由状态空间中所观测的演化与作用在变量上的基函数集拟合,则可得到模型动力学. 如此,给出一个系统的状态 x_n,模型动力学可以算出所期望的下一个输出 y_{n+1},以便与下一个所观察到的 x_{n+1} 相比较,最终可得自适应控制的方程组:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= F(x_n, \mu_n) \\
y_{n+1} &= H_M(x_n; \mu_g; x(t)) \qquad (5.91) \\
\mu_{n+1} &= \mu_n + \alpha G(x_n - y_n)
\end{aligned}
$$

这里模型动力学的函数形式,除了围绕 μ_g 区域之外,对于任何参数集可以完全不同于系统动力学的形式.

上述基于时序的控制遵循跟标准自适应控制相同的标度律,不过,观察到对于 α 负值较大情形转变时间长度的标度不同于线性理论的预言值;标度除了与 α 及 $\delta\mu_0$ 有关外,基于时序的自适应控制还依赖于与时序数据有关的几种量,诸如,点数、嵌套维数等,这些量影响到模型 H_M 的量.

自适应控制方法可以拓广应用于控制几个参数的动力学系统中. 例如,有两个标量参数 μ_n 及 υ_n 情形,可得自适应控制的线性化方程组为

$$
x_{n+1} = F(x_n; \mu_n; \upsilon_n) \qquad (5.92)
$$

$$
\delta x_{n+1} = \frac{\partial F}{\mu \delta_g} \partial \mu_n + \frac{\partial F}{\partial \upsilon_n} \delta \upsilon_n \qquad (5.93)
$$

$$\delta\mu_{n+1} = \delta\mu_n + \alpha\delta z_n \tag{5.94}$$

$$\delta\upsilon_{n+1} = \delta\upsilon_n + \beta\delta z_n \tag{5.95}$$

对不动点的收敛率取决于上述后三个矢量大小：

$$k = \left|\alpha < \frac{\partial F}{\partial \mu_g} > + \beta < \frac{\partial F}{\partial \gamma_n} >\right| \tag{5.96}$$

倘若矢量长度小于1/4，则系统有两个稳定方向

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4k})$$

及一个中心($\gamma_3 = 1$)方向.

对控制多参数的一种实际方法是，在较短的连续间隔内分开控制每个参数，在每个间隔内只控制一个参数而所有其余的参数保持不变.用此法可以保持比较小的转变时间长度，并且精度高.每个间隔长度应大于诸如自相关的典型时间间隔标度，因此每个间隔长度中的下界长于任何正的李雅普诺夫指数的时间标度，使得由正的 Lyapunov 指数所引起的不稳定性在整个吸引子内被平均掉.

但自适应控制法还存在以下不足之处.该法的关键在于控制低维系统的模型，确定论的模型构造对于展现相干的低维动力学行为一直是成功的，但是利用时序重构的模型的精度是有限制的，它对控制函数的有效性有一个限.另一个与控制函数的有效性有关的假设是参数 μ 和相空间相图是一一对应的，而且要求对于给定的初始条件系统方程的解必须是总体有界的，此外还有模型误差、噪声及由系统-模型-控制三者组成的总体系统的稳定性都给自适应控制法带来了一定的限制，具体应用时要加以考虑.

§5.8 频率主控法

频率主控法也是一种反馈控制法，它来源于人们所熟知的谐

波平衡原理，拓广用于工程技术角度中的混沌控制.

如图 5.9 所示的频率主控法反馈方块图，其中 L 为一个线性时间不变的动力学系统，N 为一个非线性时间不变的静态无记忆系统. 可用传输函数：

$$L(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{5.97}$$

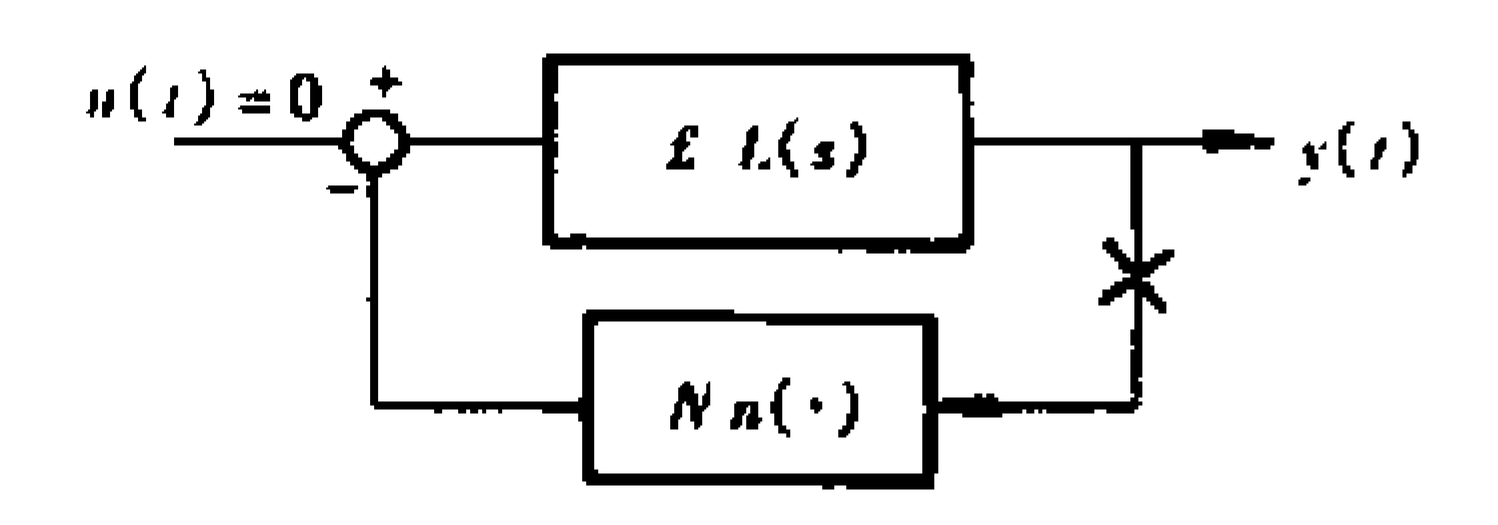


图 5.9　基本反馈系统

描述方块 L，这里 s 是复变量，$p(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 是多项式算子，而方块 N 用非线性单值函数 $n(\cdot)$ 来表示，$y(t)$ 为系统的标量输出. 该系统由下式微分方程所描述：

$$q(D)y(t) + p(D)n[y(t)] = 0 \tag{5.98}$$

这里 D 为微分算子. 频率主控法是基于研究首次谐波，它有以下假设：

(1) 系统的输出形式为

$$y_0(t) \approx A + B\cos\omega t, \quad B, \omega > 0 \tag{5.99}$$

(2) 相应的非线性输出，即 $n[y_0(t)]$ 由傅里叶级数展开成：

$$n[y_0(t)] = N_0(A, B) + N_1(A, B)B\cos\omega t + \cdots \tag{5.100}$$

在与稳恒态及周期态有关的近似下，非线性系统 N 用偏压及频率 ω 实增益来表征

$$N_0(A, B) \doteq \frac{1}{2\pi A}\int_{-\pi}^{\pi} n[y_0(t)]\mathrm{d}\omega t \tag{5.101}$$

$$N_1(A,B) \doteq \frac{1}{\pi B}\int_{-\pi}^{\pi} n[y_0(t)]\omega \mathrm{d}\omega t \tag{5.102}$$

这些都是熟知的描述函数(功能)诸项(describing function terms).作为拓广,可以定义更高频率的复数增益 $N_k(A,B), k=2,3,\cdots$,它们描述(5.100)中的其余高阶项.本节还采用下列一些定义:

平衡点(EP):系统可接受的恒定输出值 $y = E_j$, $j = 1,2,\cdots$.根据(5.97)和(5.98),它们是下面方程的解:

$$y + n(y)L(0) = 0 \tag{5.103}$$

可以用标准线性技术

$$n'(E_j) = \left.\frac{\mathrm{d}n(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=E_j} \tag{5.104}$$

研究平衡点的局域稳定性.

被预测的极限环(PLC):用描述函数方法导出系统的近似的周期解 $y_0(t)$,根据(5.99)、(5.101)和(5.102),满足 PLC 的条件为

$$A[1 + N_0(A,B)L(0)] = 0 \tag{5.105}$$

$$1 + N_1(A,B)L(j\omega) = 0 \tag{5.106}$$

沿图 5.9 的系统回路,利用谐波平衡原理得出上述方程,这里在它们的零稳态增益及频率 ω 处已经估算了传输函数 L 及非线性 n.方程(5.105)及(5.106)必须对参数 A,B 和 ω 求解,作为一个特殊有效的解释是条件(5.106)从图解上相应于 Nyguist 图 $L(\omega j)$ 与函数 $-1/N_1$ 的交点.一般地,当 B 趋于零时,关系(5.106)表示存在 Hopf 分岔,而(5.105)导出偏压值 $A = E_j$,平衡点处发生分岔.可以把诸分岔点视为一簇周期解的发生器.

利用 Loeb 判据或类似判据可以从(5.105)及(5.106)来研究 $y_0(t)$ 的稳定特性.

失真度:PLC的可靠性取决于沿系统回路的失真度,它是计算

所忽略掉的关于测度 ω 的一个 PLC 的高阶谐波的量，此量可表示为

$$\Delta = \frac{\| \overline{y}_0(t) - y_0(t) \|^2}{\| y_0(t) \|_2} \tag{5.107}$$

这里符号 $\| \cdot \|_2$ 表示在周期 $2\pi/\omega$ 的 L_2 模. $\overline{y}_0(t)$ 表示系统的稳态周期输出，恰好在 N 之前当封闭回路被断开时得到该值(图 5.9)，然后 $y_0(t)$ 注入 N 中.

Δ 值，$\Delta < \eta$，表示开放回路系统是一个有效的低通过的过滤器，以及相应的 PLC 是可靠的. 的确，在适当 Δ 值的条件下可以应用精确的变量来保证在所预测极限环的定义邻域内存在真的周期解.

以上定义的诸量，对于高阶系统(分布参数或实验数据)都易于算出，因为我们采用图 5.9 中所示的输入-输出的模式及简单情形.

我们现在转入讨论混沌系统的控制.

控制的目标. 目标为设计图 5.9 所示系统的控制，使之可满足下列要求：(1) 将混沌运动稳定到一个可接受(所期望)的周期解 $y_d(t)$. 这意味着所期望的解 $y_d(t)$ 必须以某种方式与系统的原来行为相联系. 典型地，把 $y_d(t)$ 固定为这样的混沌运动的一种平均值，使之趋于极限环. 更一般地，也可以选择一个被减少的幅度 $y_d(t)$，然后驱使系统在参数空间产生 Hopf 分岔. (2) 原来系统的平衡点保持不变. (3) 平衡点的稳定性保持不变.

因此，控制目标就是在不改变原系统的混沌奇怪吸引子的本质特征下消除混沌而获得所期望的动力学行为(如周期态、稳恒态等). 从物理机制上是实现从正的李雅普诺夫指数向负值转变. 从实用上，希望用小能量而能方便地实现两种运行模式之间的转变，即采用可靠简便的技术来达到有效控制混沌的目的.

为此，R. Genesio 及其合作者提出一种反馈补偿器，受控混沌系统的方块图如图 5.10 所示.

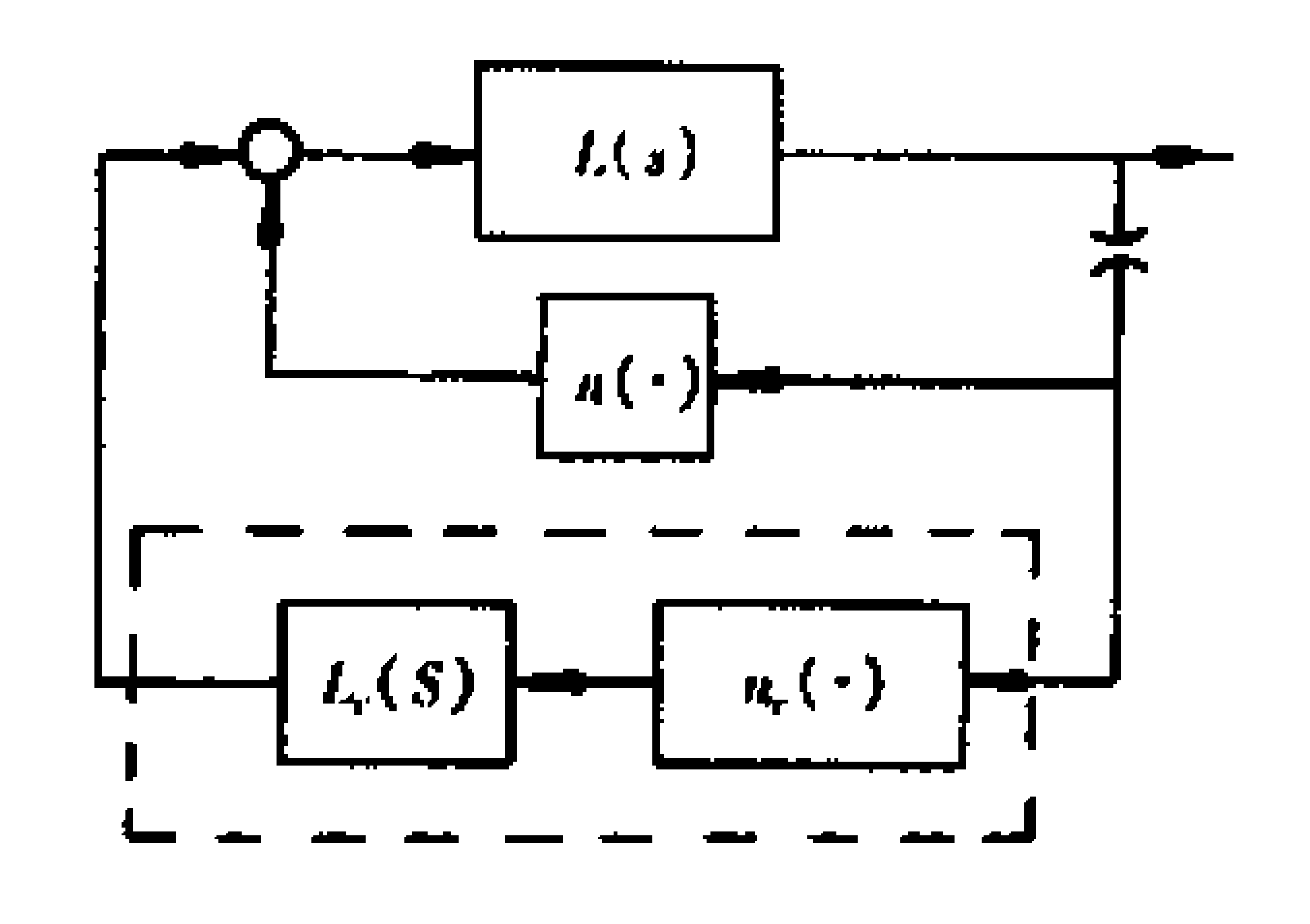


图 5.10 频率主控法控制混沌系统的方块示意图

由下列多项式函数描述非线性方块:

$$n_c(y) = \sum_{i=1}^{h} \gamma_i y^i \tag{5.108}$$

传输函数的线性过滤器为

$$L_c(S) = \frac{S}{S+\lambda}, \ \lambda > 0 \tag{5.109}$$

上述 h 为适当选择的整数,而 $\gamma_i, i = 1,2,3,\cdots,h$ 及 γ 是确定控制的未知系数.图 5.10 的结构是最简单的一种产生非线性作用方案,它在常数区域没有稳态效应.在该结构下上述讨论过的非线性 n_c 的描述函数实数诸项 $N_{0c}(\gamma_i)$ 及 $N_{1c}(\gamma_i)$ 可以确定,而且高阶复数谐波增益 $N_{kc}(\gamma_i), k = 2,3,\cdots$ 都可以被确定.

图 5.10 考虑了满足条件(1) ~ (3) 的要求.首先,假设欲达到的周期解具有下列形式.

$$y_d(t) = A + B_d \cos\omega t, \quad B_d, \omega > 0 \tag{5.110}$$

这里 B_d 为所期望的幅度,它可以置于混沌运动的平均值和最小值之间的区域,而参数 A 和 ω 并不预先给出. 为了获得周期解(5.110),利用描述函数方法来确定参数,即假设 y_d 是图 5.10 系统的一个 PLC. 由谐波平衡条件可得到

$$A[1 + N_0(A, B_d)L(0) + N_{0c}(A, B_d, \gamma_i)L_c(0, \lambda)L(0)] = 0 \tag{5.111}$$

$$1 + N_1(A, B_d)L(j\omega) + N_{1c}(A, B_d, \gamma_i)L_c(j\omega, \lambda)L(j\omega) = 0 \tag{5.112}$$

考虑(5.109)所示的 $L_c(0) = 0$,(5.111)及(5.112)可改写为

$$A[1 + N_0(A, B_d)L(0)] = 0 \tag{5.113}$$

$$\begin{aligned} &N_{1c}(A, B_d, \gamma_i)L_c(j\omega, \lambda) \\ &= -[1 + N_1(A, B_d)L(j\omega)]/L(j\omega) \end{aligned} \tag{5.114}$$

这个 PLC 的可靠性由受控系统的失真度 Δ_c 所决定:

$$\Delta_c(\gamma_i, \lambda) \doteq \frac{\| \overline{y}_d(t) - y_d(t) \|_2}{\| y_d(t) \|_2} \tag{5.115}$$

在图5.10中,当回路被断开时$\overline{y}_d(t)$为稳态系统输出,输入非线性是 $y_d(t)$. 因此,为了确保真正获得解(5.110),要求控制器满足下列条件:

$$\min_{\gamma_i, \lambda} \Delta_c(\gamma_i, \lambda) \tag{5.116}$$

即使系统的失真度达到最小值.

其次,具有 $L_c(0) = 0$ 的过滤器(5.112)的存在从结构上保证受控系统具有与原系统相同的平衡点.

第三,由于(5.112)引进一个附加的稳定的动力学模式,对图5.10中系统的非线性分析表明:维持任何平衡点 E_j 的条件可以表成控制器的非线性的斜率的不等式:

$$-\frac{1}{\sigma_M(E_j, \lambda)} < n'_c(E_j, \lambda) < \frac{1}{\sigma_m(E_j, \lambda)}$$

$$j = 1, 2, \cdots, l \tag{5.117}$$

这里 l 为控制感兴趣的平衡点的数目,正的 σ_m 及 σ_M 分别表示与下式 Nyguist 图的实轴相交的最小值与最大值:

$$\frac{L_c(j\omega,\lambda)L(j\omega)}{1+n'(E_j)L(j\omega)} \tag{5.118}$$

总之,只要根据(5.113)、(5.114)、(5.116)及(5.117)诸条件来选择补偿器的参数,则从根本上满足控制的具体要求. 它以这样的方式达到综合反馈控制,使得描述函数法恰好预测所期望的周期解(5.113)及(5.114),同时利用控制器的自由度具有相应较小的失真度(5.116)以及对局域稳定性(5.117)的影响可以忽略不计等特点,从而实现对不稳定周期的稳定有效控制.

把 B_d 固定为混沌运动的平均值的典型情形具有一种特殊意义. 这里由(5.110)所给定的期望解 $y_d(t)$ 客观上就是上面分析混沌所识别出来的 PLC. 因此,根据(5.106)式对 $B=B_d$ 所作的计算,(5.114)式右边变成零,并且条件退化为

$$N_{1c}(A,B_d,\gamma_i)=0 \tag{5.119}$$

因此,控制器不仅稳住频率 ω,而且稳定保持相同的原来PLC的零频率各项(由于 $L_c(0)=0$).

由于引进适当的高次谐波,使得系统失真度较小,从而获得真正的极限环. 这里的控制作用就是消除(混沌态)噪声的干扰,以恢复对所需的极限环(周期态)的稳定控制,故上述控制也可称为失真度控制.

该法已应用于无折叠的 Chua 线路(如图 5.11)的混沌控制. 它是一种电路系统. 自 Chua 提出著名的 Chua 电路以来,由于其巨大的应用前景,近年来已成为非线性电路中混沌控制及神经网络研究的新热点. Chua 电路可以展现任何三阶非线性系统的定量动力学,其中包含一个奇对称的三部分分段线性函数. Chua 电路的状态方程为

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{G}{c_1}v_1 + \frac{G}{c_1}v_2 - \frac{1}{c_2}\bar{n}(v_1)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{G}{c_2}v_1 - \frac{G}{c_2}v_2 - \frac{1}{c_2}i_3 \tag{5.120}$$

$$\frac{dv_3}{dt} = -\frac{1}{L}v_2 - \frac{R_0}{L}i_3$$

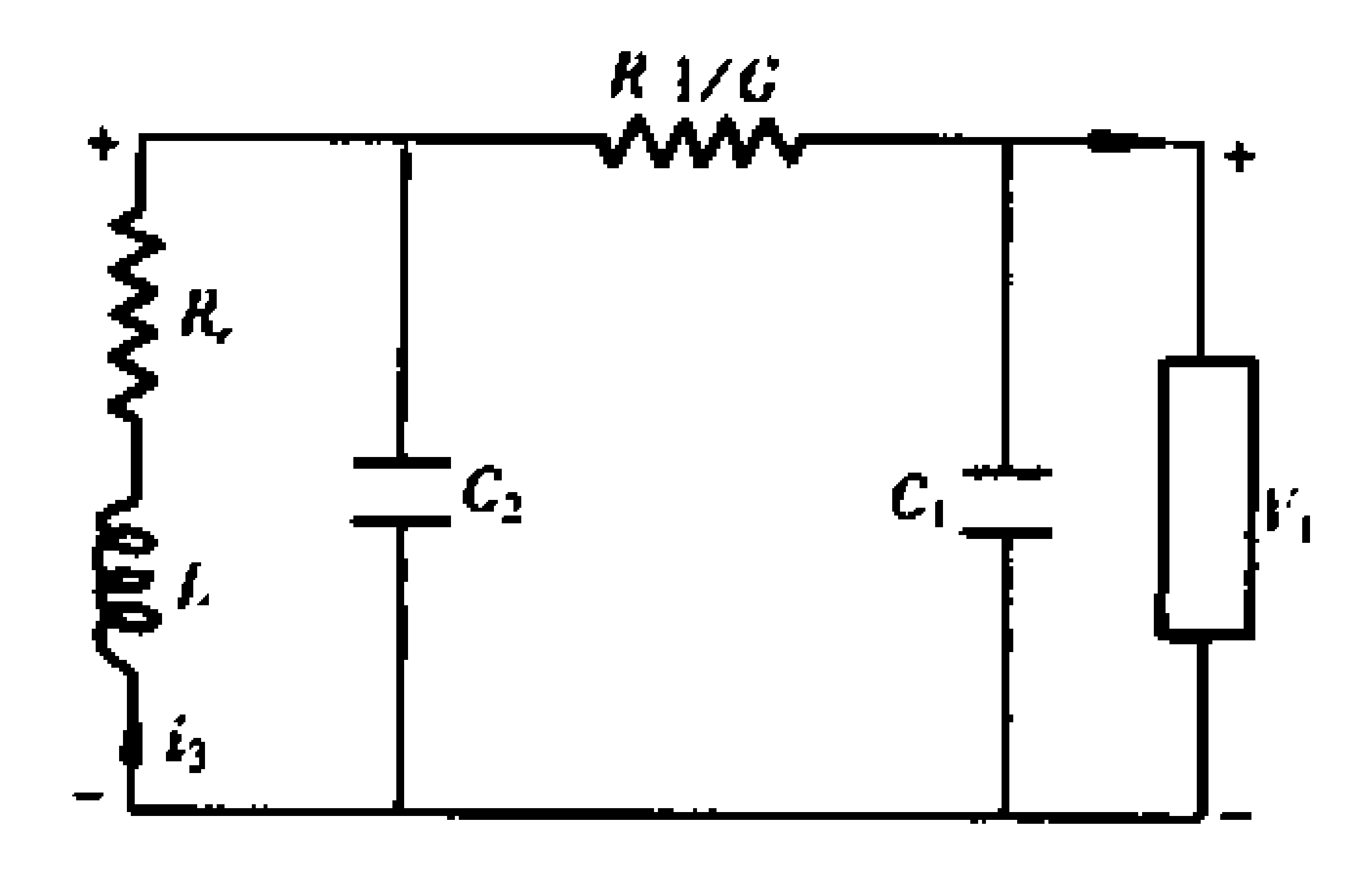


图 5.11　无折叠的 Chua 电路

非线性项写成：

$$\bar{n}(y) = G_b y + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|y+E| - |y-E|) \tag{5.121}$$

无折叠的 Chua 电路可以用图 5.9 的反馈结构来表示.定义新的时间变量$(G/c_2)t$,假设 $y = v_1$ 以及

$$\alpha \doteq \frac{c_2}{c_1}, \quad \beta \doteq \frac{c_2}{LG^2}, \quad \rho \doteq \frac{c_2}{LG}R_0 \tag{5.122}$$

经过如此标度变换后,线性部分(见 5.97) 的传输函数为

$$L(S) = \frac{\alpha[s^2 + (1+\rho)s + (\beta+\rho)]}{s^3 + (1+\alpha+\rho)s^2 + (\beta+\rho+\alpha\rho)s + \alpha\beta} \tag{5.123}$$

而系统非线性 $n(y) = \bar{n}(y)/G$.

我们现在想把上述频率主控法应用于 Chua 电路的一些复杂行为的控制.取下列数值：

$$\alpha = 6.7, \beta = 14.3,$$
$$G_a/G = -1.2 \tag{5.124}$$
$$G_b/G = -0.7$$

以及归一化 $E = 1$,把 ρ 视为变量并移到负轴上.当 $\rho = 0$ 时,恰好参数 α 和 β 定义了原来 Chua 电路的经典行为.由(5.103)式知：

$$y + (1 + \frac{\rho}{\beta})n(y) = 0 \tag{5.125}$$

对于(5.124)参数值,可得

$$E_1 = -(\frac{7.15 + 0.59}{4.29 - 0.79}), E_2 = 0$$
$$E_3 = +(\frac{7.15 + 0.59}{4.29 - 0.79}) \tag{5.126}$$

局域特征值的特征方程直接从(5.123)和(5.121)求出.在感兴趣的区域内,传输函数 $L(j\omega)$ 与实轴有两个交点

$$[10.45 - 0.5\rho^2 \pm (0.52 - 28.6\rho - 18.15\rho^2 + 0.25\rho^4)^{1/2}]^{1/2} \tag{5.127}$$

相应于系统的可能的周期解(PLC)的振荡频率(见 5.106).

通过求解方程(5.105)和(5.106),在负的 ρ 下,求解结果为：平衡点 E_1 和 E_3 可以产生两个稳定的 PLC(局域对称),它们都是存在于系统中的惟一的周期极限环.我们通过分析可以预测系统的复杂行为,然后与系统的实际行为相比较.可以知道,在 $E_2 = 0$ 处平衡点总导致不稳定,而 Δ_2 表示不考虑二次谐波贡献时系统的失真度.表 5.1 给出预测结果与实际结果的比较,PLC 的频率相应于(5.127)式中负的符号,它在(2.6,3.0)区间近似改变.

表 5.1　系统行为的预测结果与实际结果之比较

ρ	稳定的 PLC		与 $E_2=0$ 相互作用 即 $B \geqslant A$	预测的倍周期	失真度		系统行为
	A	B			Δ	Δ_2	
0	—	—	无	—	—	—	A
−0.01	1.63	Hopf	无	—	—	—	P
−0.10	1.44	0.95	无	—	0.023	0.008	P
−0.15	1.34	1.00	无	是	0.029	0.009	P
−0.20	1.25	1.03	无	—	0.034	0.008	P
−0.25	1.17	1.06	无	—	0.038	0.007	PD
−0.30	1.10	1.07	无	—	0.041	0.007	PD
−0.35	1.03	1.08	有	—	0.044	0.007	SS
−0.40	0.96	1.10	有	—	0.046	0.007	DS
−0.50	0.84	1.105	有	—	0.049	0.009	DS
−0.60	0.73	1.108	有	0.050	0.050	0.012	DS
−0.65	不稳定	PLC	有	—	—	—	U

其中简略符号含义为：A = 非周期(稳定)运动，P = 周期运动，PD = 倍周期，SS = 单螺旋混沌，DS = 双螺旋混沌，U = 不稳定运动.

我们今举例说明混沌控制结果. 考虑 $\rho=-0.5$ 时，系统处于双螺旋混沌. 现在按下列方式控制系统：

(1) 在正偏压下，获得一个较大的周期解，它是混沌运动的平均值. 从表 5.1 可知，这对应于方程：

$$y_d(t)=0.84+1.105\sin 2.671$$

(2) 它具有上述指出的平衡点 $E_1=-1.49$，$E_2=0$ 及 $E_3=1.49$.

(3) 它保持局域稳定性，在 E_2 有一个不稳定特征值，在 E_3 有两个不稳定特征值.

从表 5.1 可见：二次谐波对失真度有重要影响($\Delta_2/\Delta \doteq 0.18$)，因此为了消除该影响可以假设控制器的非线性为

$$n_c(y) = \gamma_1 y + \gamma_2 y^2$$

这样，把控制问题变成最优约束问题. 控制策略就是对系数 γ 和 λ 求以下最优化问题：

$$\min[\gamma^T D(A,B_d,\omega,\lambda)\gamma + 2d^T(A,B_d,\omega,\lambda)\gamma + \delta(A,B_d,\omega)] \tag{5.128}$$

该优化的约束条件为

$$\begin{aligned} &P^T(A,B_d)\gamma = \psi(A,B_d,\omega,\lambda) \\ &\Phi(A,B_d) = 0 \\ &-\frac{1}{\sigma_M(E_j,\lambda)} < g^T(E_j)\gamma < \frac{1}{\sigma_m(E_j,\lambda)} \\ &j = 1,2,\cdots,l \end{aligned} \tag{5.129}$$

重要的是，对于任何固定的 λ，对控制器 γ 的线性依赖性已经得到一个标准二次最优问题. 的确最本质的控制正好是由于 γ 起作用，因为 γ 必须适当地把不同的高次谐波成形去补偿由于原先非线性 n（见图 5.10）所产生的高次谐波，λ 的作用用于限制(5.109)式的过滤器的高频增益，因此当选取 $\lambda_d = 0.5$ 时，则最优问题变为

$$\min[0.066\gamma_2^2 + 0.024\gamma_2]$$

并以下列为约束条件：

$$\gamma_1 + 1.675\gamma_2 = 0 \quad (\text{关于 } y_d \text{ 的 PLC 条件})$$

$$\gamma_1 < 0.229 \quad (\text{关于 } E_2 \text{ 稳定性条件})$$

$$0.337 < \gamma_1 + 2.9474\gamma_2 < 1.553 \quad (\text{关于 } E_3 \text{ 稳定性条件})$$

通过等式关系消去 γ_1，最后得到约束条件为

$$-0.137 < \gamma_2 < 1.178$$

因而最小解在它的下界. 为了有一定的稳定性边缘，可以假设 γ_{2d}

$=-0.1$，这就给出失真度 $\Delta c = 0.023$，此比原来的失真度 $\delta \approx 0.049$ 要小(见表6.1)，得出 $\gamma_{1d}=0.167$. 图5.12给出了在时刻 $t=t^*$ 当反馈补偿器加到混沌电路时受控系统的时间序列. 我们看到控制一旦加到系统中，系统原来的时间序列则由混沌转变到周期1. 已经证明，对于负偏压情形所选择的控制器破坏了原来系统的对称性，所以导出的解并不稳定负偏压的吸引子，但是易证，通过改变 γ_2 的符号可以稳定这个吸引子，而忽略掉另一个吸引子，因此在 $\pm\gamma_2$ 之间适当地转换可以把系统移到平均混沌运动的一个或另一个吸引子，从而达到稳定控制.

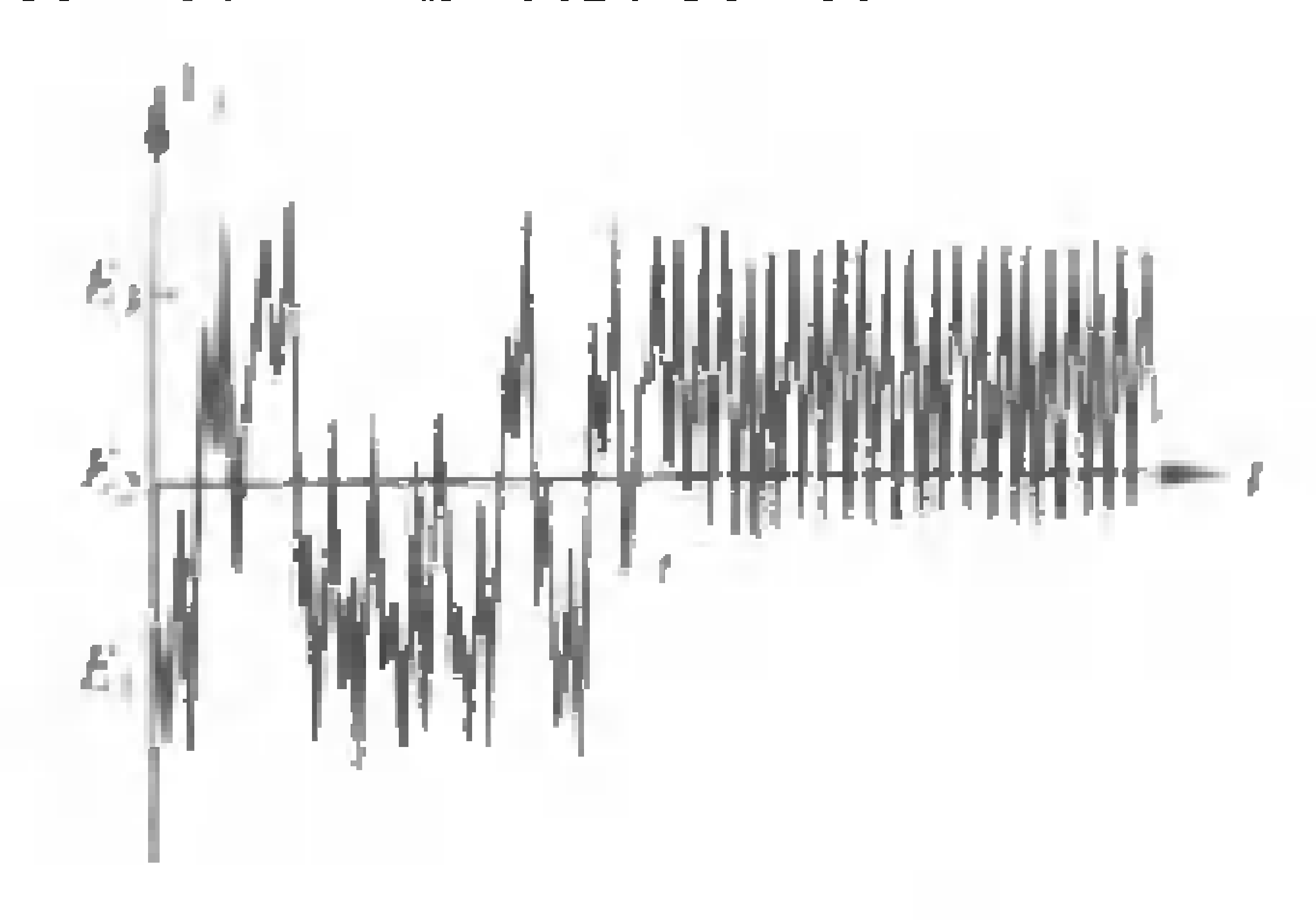


图 5.12　无折叠的 Chua 电路在 $t=t^*$ 时刻应用控制前后的动力学(时间序列)

§5.9　动力学状态反馈法——倍周期分岔控制法

许多的非线性动力学系统存在着从倍周期分岔通向混沌的道路，倍周期分岔依赖于某个实参数 μ，自然使人想到，如何控制参数的范围来达到所需的周期轨道，并实现其稳定. Abed 及其合作者针对这种想法，设计了反馈控制律，可以控制一给定的倍周期轨道的稳定度及幅度，即做到稳定度足够大，从而在较大的参数范围内维持所需的周期轨道，消除掉或延迟出现混沌. 更明确地说，利用动力学状态反馈来达到控制系统的低周期轨道，但瞬态混沌和高周期轨道将有改变，因为在反馈中利用了"淘汰滤波器".

为了设计倍周期分岔的稳定反馈，就要寻求确定倍周期分岔的稳定性的公式.下面我们介绍与之相关的方法.

考虑一离散的非线性系统

$$x_{k+1} = f_\mu(x_k) \tag{5.130}$$

其中 $x_k \in R^n$，k 为整数，$\mu_c \in R$ 为分岔参数，假设 $f_0(0) = 0$，即原点为(5.130)的一个平衡点.由于 μ 为一个实参数，对方程(5.130)有三种一般的分岔类型，即折叠分岔，倍周期分岔及 Neimark-Sacker-moser 分岔.这里讨论倍周期分岔.将 $f_\mu(x_k)$按泰勒展开有

$$f_\mu(x_k) = A(\mu)x + Q(x, x) + C(x, x, x) + \cdots \tag{5.131}$$

为了确定倍周期分岔的条件，我们研究对于 $\mu = 0$ 在原点有一个周期 1 轨道，现要找在 $\mu = 0$ 从 $x = 0$ 分岔出周期 2 轨道的条件，令(5.130)的线性化的特征值 $\lambda_1(\mu)$是这样的，即

$$\lambda_1(0) = -1 \text{ 及 } |\lambda_i(0)| < 1, i = 2, 3, \cdots, n$$

并假设 l 表示与特征值 -1 有关的 A 的左边的特征矢量，而 γ 表示与特征值 -1 有关的 A 的右边的特征矢量.

现来分析从周期 1 轨道 0 分岔的周期加倍对(5.130)应用泰勒展开

$$x_{k+1} = A(\mu)x_k + Q(x_k, x_k) + C(x_k, x_k, x_k) + \cdots \tag{5.132}$$

$$\begin{aligned} x_{k+2} = {} & A^2(\mu)x_k + A(\mu)Q(x_k, x_k) + A(\mu)C(x_k, x_k, x_k) + \cdots \\ & + Q[A(\mu)x_k + Q(x_k, x_k) + \cdots + A(\mu)x_k \\ & + Q(x_k, x_k) + \cdots] + C[A(\mu)x_k + Q(x_k, x_k) + \cdots] + \cdots \end{aligned} \tag{5.133}$$

倘若系统存在一个周期 2 轨道，则其必满足(5.134)式：

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = & [A^2(\mu) - I]x + A(\mu)Q(x,x) + A(\mu)C(x,x,x) + \cdots \\ & + Q[A(\mu)x + Q(x,x) + \cdots, A(\mu)x + Q(x,x) + \cdots] \\ & + C[A(\mu)x + Q(x,x) + \cdots] + \cdots \\ = & \widetilde{A}(\mu)x + \widetilde{Q}(x,x) + \widetilde{C}(x,x,x) + \cdots \end{aligned} \tag{5.134}$$

这里

$$\widetilde{A}(\mu) = A^2(\mu) - I$$

$$\widetilde{Q}(x,x) = A(0)Q(x,x) + Q[A(0)x, A(0)x]$$

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(x,x,x) = & A(0)C(x,x,x) + 2Q[A(0)x, Q(x,x)] \\ & + C[A(0)x, A(0)x, A(0)x]\end{aligned}$$

由于

$$A(0)\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{L}A(0) = -\boldsymbol{L}$$

我们有

$$A^2(0)\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{L}A^2(0) = \boldsymbol{L} \tag{5.135}$$

由(5.135)可得

$$[A^2(0) - I]\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{l}[A^2(0) - I] = 0 \tag{5.136}$$

这样$\widetilde{A}(0)$具有一个零特征值.倘若$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu})\lambda_1[A(\mu)]|_{\mu=0} \neq 0$,则$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu})\lambda_\lambda[\widetilde{A}(\mu)]|_{\mu=0}$是非零的.前者条件作为倍周期分岔的进一步条件,与过去的条件及以后的条件一起可以证明:映像(5.130)具有对于$\mu=\mu(\epsilon)$(在0附近)从$x=0$发源的非零的周期加倍轨道$x(\epsilon)$. ϵ为倍周期的临界特征值的幅度参数.

为了确定倍周期轨道的稳定性,要导出分岔稳定性系数的公式,这些系数由泰勒展开求得

$$\beta(\epsilon) = \beta_1\epsilon + \beta_2\epsilon^2 + \beta_3\epsilon^3 + \cdots \tag{5.137}$$

利用 Abed 关于稳恒分岔稳定性系数的公式,可以求得:

$$\beta_1 = 0 \text{ 及 } \beta_2 = 2L[\widetilde{C}(\gamma,\gamma,\gamma) - 2\widetilde{Q}(\gamma,\widetilde{Q}(\gamma,\gamma))]$$

因此,倘若 $\lambda_1(0)=-1, \lambda_t(0)\neq 0, \beta_2\neq 0$,则对于已被加速的系统存在一个音叉分岔,或者超临界地或者子临界地产生周期 2 轨道,对于原控制系统,这意味着或者超临界地或者子临界地发生一个单周期被加倍的轨道.由 β_2 的符号来确定周期被加倍的轨道是否是超临界的还是子临界的.

假设(P):方程(5.130)的映像 f 是充分光滑的.对于所有的 μ 在 $x=0$ 处有一个不动点.(5.130)的线性化具有一个 $\lambda_1(0)=-1$ 的特征值.所有其余的特征值的量级都小于 1.

定理 5.2(关于周期加倍分岔的定理) 倘若(P)成立,则在 $\mu=0$ 时从原点出发的倍周期轨道发生分岔.若 $\beta_2<0$,该周期加倍轨道是超临界的和稳定的,若 $\beta_2>0$,则它是子临界的且不稳定.

定理 5.3 令 $f_\mu: R\to R$ 是映射的一参数族,使得 f_{μ_0} 具有特征值为 -1 的一个不动点.假设

$$(\mathrm{F}_1)\quad \left(\frac{\partial f\partial^2 f}{\partial\mu\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\mu}\right)$$

$$=\frac{\partial f\partial^2 f}{\partial\mu\partial x^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}-1\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\mu}\neq 0,\text{在}(x_0,\mu_0)\text{处}.$$

$$(\mathrm{F}_2)\quad a=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)\neq 0,\text{在}(x_0,\mu_0)\text{处}.$$

则存在一条通过(x_0,μ_0)的 f_μ 的不动点的光滑曲线.在(x_0,μ_0)处该曲线的稳定性发生变化.也存在一条通过(x_0,μ_0)的光滑曲线 γ 使得 $\gamma-\{(x_0,\mu_0)\}$ 是双曲的周期 2 轨道的并集.该曲线 γ 在(x_0,μ_0)处与 $Rx\{\mu_0\}$ 线有两处相切.

这里(F_1)式是沿着不动点的曲线 $\partial f_\mu/\partial x$ 对 μ 的导数.在(F_2)中 a 的符号确定了周期 2 轨道的稳定性及分岔的方向.若 $a>0$,

则轨道是稳定的，若 $a<0$，则它们是不稳定的.

只要把定理 5.3 及公式(5.131)应用于一维情形下的 f_μ，则易知：在假设(P)中的条件 $\lambda'_1=0$ 就是定理 2 中的条件(F_1).而且，不难证明：

$$\beta_2=-2a \tag{5.138}$$

这样，在 n 维系统中对周期倍分岔所作的计算及结果是对一维情形的特殊规定.

我们现在来考虑周期倍分岔的控制问题.讨论具有一个参数族的非线性离散系统的控制：

$$x_{k+1}=f_\mu(x_k,u) \tag{5.139}$$

对于每个整数 k，$x_k\in R^n$，u 为一个标量的控制输入，$\mu\in R$ 是分岔参数，该映像 f_μ 是充分光滑的.结果该系统在 $\mu=0$ 时有

$$x_{k+1}=f_0(x_k,u) \tag{5.140}$$

我们的目的是稳定控制发生在(5.139)中的倍周期分岔.通过稳定分岔，经常可以确保在较宽的参数范围内达到规则行为(如各种周期态等).为此，要研究系统方程对控制 u 的依赖性.在反馈控制 $u=u(x_k)$的综合效应中涉及下列假设：

假设(P′)：方程(5.139)在 $u=0$ 时在原点有一个周期 1 的轨道.而且在 $x=0$ 处(5.139)的无控下的线性化具有一个简单的特征值 $\lambda_1(\mu)$，其 $\lambda_1(0)=-1$ 及 $\lambda'_1(0)\neq 0$.其余的特征值 $\lambda_2(0)$，…，$\lambda_n(0)$都是小于 1 的.

由上述定理 5.2 指出，假设(P′)对于(5.139)的无控情形导致倍周期分岔.下面的结果指出两个稳定问题分别针对方程(5.139)和(5.140).对于方程(5.139)，目标就是确保局域稳定性及对于倍周期分岔的轨道有足够的稳定范围，这称为局域倍周期分岔的控制问题.对于方程(5.140)，用相同的控制律解决周期 1 轨道 0 处的局域反馈稳定问题.

对映像(5.139)用泰勒级数展开成：

$$x_{k+1}=f_{\mu}(x_k,u)=Ax_k+\mu\hat{L}_1x_k+uL_1x_k+ub+Q(x_k,x_k)$$
$$+\mu^2L_2x_k+\mu Q_1(x_k,x_k)u\hat{Q}_1(x_k,x_k,x_k)$$
$$+C(x_k,x_k)+\cdots$$

取控制项 u 的形式为

$$u(x_k)=x_k^TQ_ux_k+C_u(x_z,x_k,x_k)$$

这里 Q_u 是一个 $n\times n$ 的实对称矩阵，以及 C_u 是由标量对称三线性形式 $C_u(x,y,z)$所生成的立方形式. 注意到 $u(x_k)$包含非常数基或 x_k 的线性项. 常数项从物理上表示控制能量的连续消耗. 在反馈中不存在线性项则确保左右特征值(相应于临界特征值 -1)及 μ 的临界值将不受反馈控制的影响. 实际上，我们将利用线性项来修改分岔的位置，而非线性项则用来修改稳定性的性质.

这种反馈形式的封闭回路的动力学为

$$x_{k+1}=Ax_k+Q^*(x_k,x_k)+C^*(x_k,x_k,x_k)$$
$$+\mu L_2x_k+\mu^2L_2x_k+\cdots$$

这里星号表示反馈后的值

$$Q^*(x,x)=(x^TQ_ux)b+Q(x,x)$$

$$C^*(x,x,x)=C_u(x,x,x)b+C(x,x,x)+(x^TQ_ux)L_1x$$

产生二次和三次形式的对称双线性 $Q^*(x,y)$及三线性形式 $C^*(x,y,z)$现在分别选为

$$Q^*(x,x)=(x^TQ_uy)b+Q(x,y)$$

$$C^*(x,y,z)=C_u(x,y,z)b+C(x,y,z)+\frac{1}{3}(x^TQ_uy)\cdot L_1z$$
$$+\frac{1}{3}(x^TQ_uz)L_1y+\frac{1}{3}(y^TQ_uz)L_1x$$

对于反馈之后的加速系统(sped-up system):

$$\widetilde{A}=A^2-I,\widetilde{Q}^*(x,y)=AQ^*(x,y)+Q^*(Ax,Ay),$$

$$\widetilde{C}^*(x,y,z)=AC^*(x,y,z)+2Q^*(Ax,Q^*A(y,z))$$
$$+C^*(Ax,Ay,Az)$$

把 $Q^*(Ax,Ay)$及 $C^*(x,y,z)$代入上述表达式,则有

$$Q^*(x,y)=A(x^TQ_uy)b+AQ(x,y)+[(Ax)^TQ_u(Ay)]b$$
$$+Q(Ax,Ay),$$

$$\widetilde{C}^*(x,y,z)=AC_u(x,y,z)b+AC(x,y,z)+A(x^TQ_uy)\widetilde{L}_1z$$
$$+2\{(Ax)^TQ_u[(y^TQ_uz)b+Q(y,z)]\}b+2Q(Ax,$$
$$(y^TQ_uz)b)+Q(y,z))+C_u(Ax,Ay,Az)b$$
$$+C(Ax,Ay,Az)+[(Ax)^TQ_u(Ay)]\widetilde{L}_1(Az).$$

为了算出 β_1 及 β_2,注意到:

$$Q^*(r,r)=(A+I)(r^TQ_ur)b+(A+I)Q(r,r)$$
$$=\widetilde{Q}(r,r)+(A+I)(r^TQ_ur)b,$$

$$\widetilde{C}^*(r,r,r)=(A-I)C_u(r,r,r)b+(A-I)C(r,r,r)$$
$$+A(r^TQ_ur)\widetilde{L}_1r-2\{r^TQ_u[(r^TQ_ur)b+Q(r,r)]\}b$$
$$-2Q(r,(r^TQ_u^r)b)-2Q(r,Q(r,r))$$
$$-(r^TQ_ur)\widetilde{L}_1r$$
$$=\widetilde{C}(r,r,r)+(A-I)C_u(r,r,r)b+A(r^TQ_ur)\widetilde{L}_1r$$
$$-2\{r^TQ_u[(r^TQ_ur)b+Q(r,r)]\}b$$
$$-2Q(r,(r^TQ_ur)b)-(r^TQ_ur)\widetilde{L}_1r.$$

这样反馈之后,β_1 变成

$$\beta_1^* = l\widetilde{Q}^*(r,r) = l[\widetilde{Q}(r,r)+(A+I)(r^TQ_ur)b]$$

$$= l\widetilde{Q}(r,r)+(-l+l)(r^TQ_ur)b = \beta_1 + 0 = 0 \qquad (5.141)$$

而 β_2 为

$$\beta_2^* = 2l[\widetilde{C}^*(r,r,r) - 2\widetilde{Q}^*(r,\widetilde{A}^-\widetilde{Q}^*(r,r))]$$

$$= \beta_2 + \Delta \qquad (5.142)$$

其中

$$\Delta = -4lC_u(r,r,r)b - 4l\{(r^TQ_ur)\widetilde{L}_1 r + \{r^TQ_u[(r^TQ_ur)b + Q(r,r)]\}bQ(r,(r^TQ_ur)b)\} + 4l(Q(r,\widetilde{A}^-(A + I)(r^TQ_ur)b) + \{r^TQ_u\widetilde{A}^-[(A+I)(r^TQ_u)b + (A+I) \cdot Q(r,r)]\}b) + 4l(\widetilde{Q}(r,\widetilde{A}A^-(A+I)(r^TQ_ur)b) + \{r^TQ_u\widetilde{A} \cdot A^-[(A+I)(r^TQ_ur)b + (A+I)Q(r,r)]\}b) \qquad (5.143)$$

这里

$$\widetilde{A}^- = (A^{-T}\widetilde{A} + L^TL)^{-1}\widetilde{A}^T \qquad (5.144)$$

(5.143)式作为寻求 β_2^* 为负值及某些期望值的条件，通过建立判据可以实现之，即根据判据可以由反馈控制来设计 Δ 的某些期望值，特别感兴趣的是 $lb\neq 0$ 情形，(5.143)式表明，倘若 $lb\neq 0$，也存在一种立方形式的稳定反馈．这只要令 $Q_u=0$ 及考虑反馈控制中的立方项的影响即可明白．结果是，由于 Δ 简化为

$$\Delta = -4C_u(r,r,r)lb \qquad (5.145)$$

以及可以由适当选择三线性项 $C_u(x,y,z)$ 来给出 $C_u(r,r,r)$ 的任意实数值．因此，只要 $lb\neq 0$，原点必定是局域稳定的．

下面有两个定理阐明了稳定控制问题．

定理 5.4 假定前面(P′)假设被满足以及 $lb\neq 0$．那就是，对于线性化的系统临界特征值是可控的．于是，存在一种具有 $u(0)$

=0 的反馈 $u(x_k)$，它解决了对方程(5.139)的局域周期加倍分岔的控制问题和对方程(5.140)的局域光滑反馈的稳定问题.

定理 5.5 假定前面(P′)假设仍被满足，而 $lb=0$. 于是，存在一种具有 $u(0)=0$ 的反馈 $u(x_k)$，它解决了对于方程(5.139)的局域周期加倍分岔的控制问题以及对于方程(5.140)的局域光滑反馈稳定问题，只要满足下式

$$0 \neq l\widetilde{L}_1 r + lQ(r,b) - lQ(r,\widetilde{A}(A+I)b)$$

$$- lQ(r_1 A \widetilde{A}^- (A+I)b) \qquad (5.146)$$

当一个周期轨道失去稳定性，则发生周期加倍分岔. 在倍周期分岔通向混沌中，随着参数的稍加改变，周期加倍的轨道也失去稳定性. 倘若一个这样的周期被加倍的轨道(或者原来的不动点)的稳定性充分地增强了，则在下一个周期加倍分岔中它就会被延迟. 而且，可以希望在通向混沌的道路上保证一个周期加倍分岔有充分的稳定度，从而可以一起达到消除通向混沌的道路.

我们称对系统(5.140)采用 $u=u(x_k)$ 形式的反馈控制律为静态控制律或直接控制律. 假定方程(5.140)是一个实际系统的近似模型. 在这种情形下参考一个特殊平衡态所设计的直接状态反馈将不仅影响平衡的稳定性，而且也可能影响这个和其他系统平衡的位置. 另一种所谓“动力学反馈控制器可以用来代替上述控制，它可以保证甚至在不确定性情况下也保持所有系统的平衡不变. 特别是 Abed 等人通过所谓淘汰滤波器可进一步把动力学反馈方法拓广. 我们下面举例说明上述控制方法的应用.

应用例子：Henon 系统的分岔控制

考虑非线性 Henon 系统

$$x_{n+1} = \rho - x_n^2 + Py_n, \qquad y_{n+1} = x_n$$

这里 P 和 ρ 都是实参数. 下面固定 $P=0.3$，视 ρ 为分岔系数. 讨论 $\rho \in (0,1.4)$范围内的结果.

该系统的不动点(x^*, y^*)为

$$\left(\frac{P-1+\sqrt{(1-P)^2+4\rho}}{2}, \qquad \frac{P-1+\sqrt{(1-P)^2+4\rho}}{2}\right)$$

Jacobi(雅可比)矩阵为

$$J=\begin{bmatrix} -2x^* & P \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可以确定发生第一个周期加倍的临界参数

$$\rho_c=\frac{3}{4}(1-P)^2$$

对于 $P=0.3, \rho_c=0.3675$.

今考虑受控下的 Henon 映像

$$x_{n+1}=\rho-x_n^2+Py_n+u_n, \qquad y_{n+1}=x_n$$

这里 u_n 为控制项.该控制项可看作为对分岔参数的一个微扰.该系统线性化在不动点(x^*, y^*)处对临界参数 ρ_c 是可控制的,且对 ρ 的所有值都是可控的.

我们采用两种控制方式:

第一种　鲁棒(紧固)的非线性分岔控制.

这时,总体系统为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \rho - x_n^2 + Py_n + u_n \\ y_{n+1} &= x_n \\ \omega_{n+1} &= x_n + (1-d)\omega_n \\ z_n &= x_n - d\omega_n \\ u_n &= k_1 z_n^3 \end{aligned}$$

这里控制项为立方形式,它涉及应用"离散时间淘汰滤波器",且与

有关文献介绍过的以连续时间淘汰滤波器为基础的控制器相类似.上面 ω_n 为淘汰滤波器态变量,z_n 为输出函数,$0<d<2$ 与该淘汰滤波器时间常数有关.

根据定理 5.4,上述控制律局域地保证了可以使稳定度达到足够大.所以在所关心的参数范围内可以防止发生进一步分岔,因此,至少可以使倍周期分岔通向混沌被推迟到更大的参数值.效果正是如此.

第二种　鲁棒(紧固)的线性分岔控制

采用线性分岔控制律也可达到推迟发生倍周期分岔.与第二种情形不同的是总体系统中控制项改为线性形式即

$$u_n = k_2 z_n \tag{5.147}$$

用此控制把第一次周期加倍分岔推迟到 ρ 的更大值,随之倍周期分岔通向混沌也被推迟发生.经过反馈之后,发生周期加倍的临界参数 ρ_c 为

$$\rho_c^* = \rho_c + \frac{2(1-P)}{2-d}k_2 + \frac{1}{(2-d)^2}k_2^2 \tag{5.148}$$

k_2 为控制增益,究竟控制到哪个周期轨道取决于 k_2 所达到的轨道并非是嵌套在混沌吸引子内的不稳定轨道,而是通向混沌道路上周期加倍分岔中参数值所对应的系统的轨道.OGY 方法主要稳定嵌套在混沌吸引子中的不稳定的周期轨道,这点与 OGY 方法是不同的.

§5.10　时空混沌的一些控制方法

前几节我们所讨论的对混沌的控制方法,主要针对非线性系统表现出的时间混沌行为,但在流体,等离子体、激光、化学、生物、社会、经济等领域广泛存在着一大类时空混沌动力学的控制问题,对其进行研究具有巨大的应用和发展前景.

§5.10.1 变量反馈法及定点注入法

在研究一维非线性漂移波方程时，学者们采用负反馈注入技术或定点注入单色波方法，成功地实现了对不稳定的稳恒态及空间混沌的有效控制.

现研究由式(5.149)所示的系统：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a\frac{\partial^3\varphi}{\partial t\partial x^2}+C\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$=-\gamma\varphi-\varepsilon\sin(x-\Omega t) \tag{5.149}$$

其中利用 2π 周期条件：$\varphi(x+2\pi,t)=\varphi(x,t)$. 令 $z=x-\Omega t$，则在驱动波的坐标系下，方程(5.149)改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi=\Omega\frac{\partial}{\partial z}\left[1+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi$$
$$-c\frac{\partial\varphi}{\partial z}-f\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\gamma\varphi-\varepsilon\sin z \tag{5.150}$$

下面讨论中把色散和耗散固定为 $\alpha=-0.287$ 及 $\gamma=1.0$，梯度系数 $c=1.0$，非线性系数 $f=-6.0$. 驱动波的强度 ε 和频率 Ω 是两个可变的参数.

该系统的能量为

$$E(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\varphi^2(x,t)-a\varphi_x^2(x,t)]\mathrm{d}x \tag{5.151}$$

它可方便地用来探测系统的动力学行为，现在考虑稳恒态($\partial/\partial t=0$)下系统的解

$$\dot{b}_k(t)=N_k(t),\qquad \dot{a}_k=M_k(t) \tag{5.152}$$

这里

$$N_k(t)=-\frac{\gamma}{1-ak^2}b_k+\frac{kf}{2(1-ak^2)}$$

$$\cdot\Big[\sum_{l+l'=k}[A_l b_{l'}\sin(\theta_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)+b_l b_{l'}\sin(\alpha_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)]$$

$$+\Big[\sum_{l-l'=k}[A_l b_{l'}\sin(\theta_l-\alpha_{l'}-\alpha_k)+b_l b_{l'}\sin(-\alpha_l-\alpha_{l'}-\alpha_k)]$$

$$+\Big[\sum_{l-l'=k}[A_l b_{l'}\sin(-\theta_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)$$

$$+b_l b_{l'}\sin(-\alpha_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)] \tag{5.153}$$

$$M_k(t)=-k\left[\frac{c}{1-ak^2}-\Omega\right]-\frac{kf}{2(1-ak^2)b_k}$$

$$\cdot\Big[\sum_{l+l'=k}[A_l b_{l'}\cos(\theta_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)+b_l b_{l'}\cos(\alpha_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)]$$

$$+\sum_{l-l'=k}[A_l b_{l'}\cos(\theta_l-\alpha_{l'}-\alpha_k)+b_l b_{l'}\cos(\alpha_l-\alpha_{l'}-\alpha_k)]$$

$$+\sum_{l-l'=k}[A_l b_{l'}\cos(-\theta_l+\alpha_{l'}-\alpha_k)+b_l b_{l'}\cos(-\alpha_l+\alpha_{l'}$$

$$-\alpha_k)] \qquad (k=1,2,\cdots,N) \tag{5.154}$$

其中由稳态解

$$\hat{\varphi}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}A_k\cos(kz+\theta_k)$$

给出 A_k 和 θ_k,数值模拟中可这样选择 N,使得 $k>N$ 的模式对动力学行为的影响是可以忽略不计的. 例如,当 $\Omega=0.65,\varepsilon=0.2$ 时,方程(5.150)有三个稳态解. 今关心具有最低能量 E 的稳态解,计算结果为 $A_1=0.11,\cdots,A_8=1.8\times10^{-3},\cdots,A_{13}=1.8\times10^{-5}$. 可见高阶模式是可忽略的,对于所选的参数,$N=13$ 是一个很好的近似,在给定的 Ω 和 ε 值下,上述的稳恒态是不稳定的,并且系统出现混沌运动. 这可以从 b_1-b_2 的相图及 δE 与 t 的序列的非周期态证明,能量随时间的变化是无规的.

问题是如何实现对上述混沌的控制? 基本思想和策略是:把一个负反馈 $-\lambda[\varphi(z,t)-\hat{\varphi}(z)]$ 加入方程(5.152)中以达到对 $\hat{\varphi}(z)$的稳定控制. 然而,由于必须探测 x 空间中的每个点(或 k

空间内的每个波以及每个波对系统变化的响应)，所以上述想法实际上是难以实现的. 为了战胜这个困难，采用两种办法来控制系统：第一种，探测单个模式(如 $k=i$)，然后输入一个单色波 $-\lambda b_i(t)$ 去控制系统. 第二种，探测 x 空间的局部区域，然后把反馈加到系统的该区域内. 实际上可能加一项(如 $-(\lambda/\pi r)[\varphi(x,t)-\varphi(x-\Omega t)]\exp[-(x-x_0)^2/r]$，$0<r\ll 1$)到系统中局部区域，并不由此而改变该控制的实质. 在第一种办法下，方程(5.152)变成

$$\dot{b}_i(t)=N_i(t)-\lambda b_i(t)/(1-at^2) \tag{5.155}$$

而 $b_{k\neq i}(t)$ 的所有其他方程和 $a_k(t)$ 方程仍然与方程(5.152)相同. 在第二种办法下，方程(5.152)则变成

$$\dot{b}_k(t)=N_k(t)-\lambda g_k(t),$$

$$\dot{a}k(t)=M_k(t)-\lambda h_k(t) \tag{5.156}$$

$$g_k(t)=\frac{1}{1-ak^2}\sum_{l=1}^{N}b_l(t)\cos[(l-k)(x_0-\Omega t)+a_l-a_k] \tag{5.157}$$

$$h_k(t)=\frac{1}{1-ak^2}\sum_{l=1}^{N}b_l(t)\sin[(l-k)(x_0-\Omega t)+a_l-a_k]/b_k$$

$$k=1,2,\cdots,N. \tag{5.158}$$

注意到：第一种反馈是在波空间内局域注入，第二种反馈则是在 x 空间内局域注入. 对后者局域控制，人们可以在一个给定点 x_0 处插入一个电极来达到. 但是，对于 k 空间控制就必得对场进行空间傅里叶变换，从而算出所期望的谐波的变化，因而，对 k 空间内的探测比在 x 空间内的探测更为困难，尽管如此，在一些情形中注入一个谐波或少数谐波还是足以实现对混沌的稳定控制，他们的数值模拟的结果证明了这个方法是可行的. 特别是，仅仅对单个方程注入单色波即可实现对高达 26 维动力学系统中不稳定态的有效控制.

对定点注入法需要指出两点：一是通常在非均匀空间结构的情形中，定点注入法的有效性依赖于 x_0 的选择，所以，人们关心的问题是定点的位置对混沌控制的影响及求得最有效的定点位置．不过，在模型(5.149)下由于方程(5.150)的对称性缘故，这里的定点效应与 x_0 的选择无关，其次对于 x 空间的定点只存在一个 λ 的较低的阈值 λ_l．当 $\lambda \geqslant \lambda_l$ 时，定点注入法总能成功地控制目标(所需的周期轨道等)．实际上，λ 越大，该法控制效果就越好，它有利于理论分析和实验应用．由于方法的简便性及上述优点，该法有可能拓广到其他偏微分方程组所描述的非线性系统及耦合的非线性映像等中的时空混沌的控制．例如，已有人将定点注入法应用于耦合映像点阵(coupled map lattices，简称 CML)中的时空混沌的控制．

§5.10.2 参数微扰反馈法

Auerbach 应用小微扰反馈控制法对具有对流不稳定性的空间混沌系统实现了稳定控制．在一维映像的线性阵列中，标量状态 $x_j(n+1)$ 的演化方程为

$$x_j(n+1)=(1-\gamma_1-\gamma_2)f(x_j(n))+\gamma_1 f(x_{j-1}(n))$$
$$+\gamma_2 f(x_{j+1}(n)) \qquad (5.159)$$

其中 j 表示位置，$n+1$ 表示离散时间，$j=2,3,\cdots,N-1$．最邻近的耦合常数满足 $\gamma_1>\gamma_2\geqslant 0$．非线性映像函数取为 $f(x)=1-ax^2$，即二次映像，参数 a 选在混沌区域内，所选的边界条件将大大地影响最终的系统运动状态，对于开放边界条件：

$$x_1(n+1)=(1-\gamma_2)f(x_1(n))+\gamma_2 f(x_2(n))$$
$$x_N(n+1)=(1-\gamma_2)f(x_N(n))+\gamma_1 f(x_2(n)) \qquad (5.160)$$

在 γ_1 及 γ_2 的一定范围内，系统出现一种稳定的相干的混沌态，设在参数 $a=a^*$ 处存在混沌吸引子．现来考虑一个不稳定周期一

的控制问题.如果没有控制,则系统的每个单元都将是混沌运动.由于混沌吸引子的遍历性,保证点阵位置 1 在某时刻 m 接近 x^*.假设混沌态的相关长度至少有三个位置,这在宽参数范围内是成立的.期望 $x_2(m)$及 $x_3(m)$也取在 x^* 附近,然后在 m 时刻在位置 1 处加上小参数微扰 $a=a^*+\delta a_1(m)$,导致位置 2 按下列线性化形式演化:

$$\delta x_2(m+1)=f'(x^*)[\gamma_0\delta x_2(m)+\gamma_1\delta x_1(m)+\gamma_2\delta x_3(m)] + A\gamma_1\delta a_1(m) \tag{5.161}$$

这里 $\gamma_0=1-\gamma_1-\gamma_2$, $\delta x_j(m)\equiv x_j(m)-x^*$,导数 f'取在$a=a^*$处,于是 $A=\partial f/\partial a$.可以如此来选择在 m 时刻的小微扰 $\delta a_1(m)$,从而使在 $m+1$ 时刻把单元 2 驱入不动点,该小微扰的反馈控制律为

$$\delta a_1(m)=-\frac{f'(x^*)}{A\gamma_1}[\gamma_0\delta x_2(m)+\gamma_1\delta x_1(m)+\gamma_2\delta x_3(m)] \tag{5.162}$$

对于不能用一维映像描述的各单元的动力学情形,要驱使单元 2 落入不稳定轨道的局域稳定流形,则必须修改反馈控制律.

是否应用上述控制对位置 1 从 m 时刻初始微扰就能强迫所有其他的单元最终都达到同步?为此,我们在存在控制律下,对所有 N 个位置作关于均匀解 $x_j=x^*$ 的线性稳定性分析.围绕 $a=a^*$ 的均匀态把方程(5.161)线性化,然后利用方程(5.162),对于 $j=3,\cdots,N-1$,可得线性化方程组:

$$\delta x_1(n+1)=f'(x^*)/\gamma_1\{[\gamma_1\gamma_2-\gamma_0(1-\gamma_2)]\delta x_2(n) -(1-\gamma_2)\gamma_2\delta x_j(n)\}$$

$$\delta x_2(n+1)=0$$

$$\delta x_j(n+1)=f'(x^*)[\gamma_0\delta x_j(n)+\gamma_1\delta x_{j-1}(n)+\gamma_2\delta x_{j+1}(n)]$$

(5.163)

$$\delta x_N(n+1)=f'(x^*)[(1-\gamma_1)\delta x_N(n)+\gamma_1\delta x_{N-1}(n)]$$

该系统在 0 处具有双约化特征值及对 $q=1,\cdots,N-2$ 由下式给出其他 $N-2$ 个特征值：

$$\lambda_q=f'(x^*)[\gamma_0+2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\cos\theta_q],\tag{5.164}$$

其中 $\theta_q=\pi q/(N-1)$，于是，只要满足：

$$|f'(x^*)|[(1-\gamma_1-\gamma_2)+2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}]<1\tag{5.165}$$

则均匀态是线性稳定的．这样，在无噪声干扰下，加在满足(5.165)的系统的上游边界的控制信号将通过整个阵列的对流形成一个同步前沿，但是倘若引入甚至弱的噪声则可在对流不稳定性存在的情形下破坏掉同步的前沿．根据标度规则 $\delta x_{i+m}(n)\sim\delta x_i(0)e^{n\Lambda(v)}$(这里 Λ 为正值)，由于对流到下游，初始的扰动 $\delta x_i(0)$ 被放大，从而导致了不稳定性．

可以证明，通过增设附加控制器来增强沿点阵链条方向远处的同步前沿，在有利的同步态下则可以消除“空间分岔”．在离位置 1 的距离 ξ 所在的位置上，加上一个由(5.162)所规定的微扰形式，位置指标由 ξ 单元来传送．如前所述，所加的这些微扰只要小于预定值 δa_{max} 即可，对于所附加的位置重新迭代这个过程，从过去的控制位置每隔 ξ 单元，直到达到阵列的边界为止．例如，取 $\xi=14$，阵列有 200 个座位，每一千次迭代，从随机初始条件开始迭代，则同步的前沿就以一定速率单调地向右边移动，并以一种周期的方式进行演化．

现在的问题是，如何确定控制器之间的距离 ξ．为此，考虑附加的随机变量效应，假设所加的随机变量为 δ 关联的在$[-\sigma,\sigma]$之间分布的随机变量，且加在方程(5.161)的右边，强度为 σ 的初始分布在座位 l 处引入，则均匀地被同步态在位置 l 处在 l/v 时刻

按 $\sigma e^{\Lambda(v)l/v}$ 量级增长. 假设噪声是连续地注入系统, 在位置 l 处的最大分布是相应于以 $v=v^*$ 运动的对流不稳定性. 在 v^* 下 $\Lambda(v)/v$ 是最大的, 所以 v^* 就是方程 $\mathrm{d}/\mathrm{d}v[\Lambda(v)]=\Lambda(v)/v$ 的解. 初始条件取为均匀态, 可以看到方程(5.162)形式的控制将设法把扰动减少到 $O(\sigma)$ 量级, 只要 $\delta a_{\max}>C\sigma e^{l\Lambda(v^*)/v^*}$ 即可, 这里 C 为方程(5.162)中依赖于控制律的增益系数. 于是, 确保控制过程有效的控制器之间的最大距离为

$$\xi\sim\frac{1}{\Lambda'(v^*)}\ln(\delta a_{\max}/C\sigma)\tag{5.166}$$

其中 $\Lambda'(v^*)$ 表示 $\Lambda(v)$ 的导数.

由方程(5.166)所分开的控制器作用下的同步阵列行为在双向耦合($\gamma_2\neq0$)下可能更加复杂.

总之, 上述对时空混沌系统的控制方法是在几个空间局域上用一个外部参数施加小反馈微扰. 虽然上述讨论仅限于同步一个不动点, 但是该法易于推广到控制高周期轨道. 该法的优点是, 只涉及所控的位置邻近的空间的三个测量, 并可利用有关技术(如包络成形的有关知识等)来减少测量点的数目, 因而, 该法有可能应用于实验.

§ 5.11 神经网络控制方法

国际上从 20 世纪 80 年代开始掀起了神经网络研究的热潮. 神经网络研究的特点和趋势, 不仅为计算机科学、脑科学、思维科学等提供了有力的研究手段和开辟崭新的发展前景, 而且由于神经网络系统是一种高度复杂的非线性动力学系统, 它是迄今所知功能最强, 效率最高的最完美的信息处理系统, 因此它自然地成为非线性科学的重要研究课题, 特别是用它来控制混沌的行为, 同样具有十分诱人的应用潜力.

人工神经网络(ANN)一般包含若干互连的单元, 这些单元的

作用犹如模型神经元.突触的功能由一个可更改的权值模拟,而权值与每条连接有关.大多数人工神经网络不能反映树突与轴突的详细几何结构,它们把一个神经元的电输出表达为代表触发率,即用它的活性的一个单一的数字来表示.

每个单元把它收到的输入活性的模式变换为一个输出活性并把它传播到其他单元.它分两步完成此变换,第一步,它把每个输入活性乘以用于该接线上的权值,并把所有这些加权输入相加,获得一个称为总输入的参数;第二步,一个单元使用输入-输出函数把总输入变换为输出活性.ANN 的行为取决于这些权值及各单元特有的输入-输出函数.概括地说,神经元就是 ANN 的基本单元,其功能有两个:

(1) 实现权值求和:

$$u_i(t)=\sum_{j=1}^{N}W_{ij}\cdot S_i(t)$$

(2) 实现非线性输出:

$$S_i(t+1)=f_i[u_i(t)-\tau_i(t)]$$

这里 N 为网络中的神经元总数,$u_i(t)$和 $S_i(t)$分别为 t 时刻第 i 个神经元的内部状态和外部状态,W_{ij} 为 t 时刻第 j 个神经元与第 i 个神经元之间的权值,$\tau_i(t)$为 t 时刻第 i 个神经元的阈值,$f_i(\cdot)$为非线性函数,此函数可取不同的形式,主要有三种:

(1) 符号函数或称硬取阈函数:

$$f(x)=+1(x\geqslant 0);-1(x<0) \tag{5.167}$$

(2) s 形函数或称软取阈函数:

$$f(x)=1/(1-\mathrm{e}^{-\beta x}) \tag{5.168}$$

不同的参数 β,使函数的形状不同,当 $\beta\to\infty$ 时就退化为符号函数.

(3) 线性取阈值函数:

$$f(x)=\begin{cases}+1(x\geqslant a)\\ kx\ (-a<x<+a)\\ -1\ (x\leqslant -a)\end{cases} \tag{5.169}$$

以上非线性输出函数说明，神经元的外部状态 $S_i(t)$取值在$[-1,+1]$区间，而互连权值 W_{ij} 的数值可取任意实数，其符号表示互相作用是激励(正号)还是抑制(负号)，$W_{ij}=0$ 则表示神经元 j 和 i 之间无相互作用. 所有的 W_{ij} 集合，则构成网络的互联矩阵，它是决定网络动力学行为的最重要参数.

ANN 主要用于对大脑神经系统的模拟和简化，即它由大量简单的非线性运算单元(或称神经元)通过相互间的权值连接而构成信息处理系统. 它之所以能够较好地实现智能信息处理的任务，主要是 ANN 具有三大优点：一是可学习性. 由于互连矩阵是决定 ANN 动力学行为的最重要参数，而互连权值是可以通过一定的学习算法来调整的，这一特点使 ANN 能够适用于那些无法编程计算(或很难编程)以及要求在应用环境中自适应的信息处理任务. 二是大规模并行性. ANN 是全体神经元的共同参与下动态地完成信息处理任务的，ANN 的大规模并行性成为智能决策的重要方向. 三是具有联想和容错性，此能力又与每个神经元所具有的非线性功能分不开. 正是 ANN 作为一种非线性动力学系统，具有十分丰富的行为如混沌、分形、分维及稳定点等与信息处理的有趣关系，因此 ANN 成为研究混沌控制的一种新途径. ANN 作为一种新型智能信息处理系统，只有实现了具有相当规模的硬件系统之后，才能真正显示出上述三大优点. 下面我们用数学术语来描述神经网络.

反向传播算法. 假设单元 j 是输出层中的一个典型单元，而单元 i 是前面一层中的一个典型单元. 输出层中的一个单元借助于下列两步来确定它的活性. 首先，它用下面公式来计算总加权输入 X_j：

$$X_j = \sum_i W_{ij} Y_i \tag{5.170}$$

上式中，W_{ij}为第 i 个单元和第 j 个单元之间的连接线的权值，Y_i 为前面一层中第 i 个单元的活性水平.

其次，该单元使用总加权输入的某个函数来计算活性 Y_j，一般可用 S 函数：

$$Y_j = 1/(1 + e^{-X_j}) \tag{5.171}$$

在确定所有输出单元的活性之后，网络便计算误差 E，即 $E = \frac{1}{2}\sum_j (Y_i - d_j)^2$，其中 Y_j 是顶上一层中第 j 个单元的活性水平，d_j 是第 j 个单元的期望输出.

反向传播算法主要有下列四个步骤：

第一，计算一个输出单元的活性改变时误差的变化率，此误差导数(EA)是实际活性和期望活性间的差值：

$$EA_j = \partial E / \partial Y_j = Y_j - d_j \tag{5.172}$$

第二，计算一个输出单元所收到的总输入变化时误差的变化率，此参数(EI)等于上述步骤的结果乘以一个单元的总输入变化时其输出的变化率，即

$$EI_j = \frac{\partial E}{\partial X_j} = \frac{\partial E}{\partial Y_j}\frac{\partial Y_j}{\partial X_j} = EA_j Y_j (1 - Y_j) \tag{5.173}$$

第三，计算当作用在接入一个输出单元的接线上的权值改变时误差的变化率，此参数(EW)等于步骤二的结果乘以接线出发的那个单元的活性水平，即

$$EW_{ij} = \frac{\partial E}{\partial W_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial W_{ij}} = EI_i Y_i \tag{5.174}$$

第四，计算前面一层中一个单元的活性改变时误差变化有多快，此乃关键一步，它允许反向传播能用于多层网络. 当前面一层中一个单元的活性改变时，它会影响到该单元连接的所有输出单

元的活性，为了计算对误差总的影响，我们可以对各输出单元的所有这些单独的影响相加. 每个单独影响的计算等于步骤二的结果乘以用该输出单元的接线上的权值，即

$$EA_i = \frac{\partial E}{\partial Y_i} = \sum_j \frac{\partial E}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} = \sum_i EI_j W_{ij} \qquad (5.175)$$

运用步骤二及四，我们可以把后面一层单元的 EA 变成前面一层单元的 EA. 为了得到和期望的那么多的前面各层的 EA，可重复此计算步骤. 已知一个单元的 EA 之后，便可应用步骤二及三来计算用在它的输入接线上的 EW.

倘若网络的单元都是线性的，反向传播算法则易理解. 此法先计算 EA，再计算每个 EW. 对于输出单元，EA 只是实际输出和期望输出之间的差值. 为了计算恰在输出层前面那层中一个隐匿单元的 EA，首先要辨别该隐匿单元及与它相连的那些输出单元之间的所有权值，然后把这些权值乘以这些输出单元的 EA，再把这些乘积相加. 此和值就等于所选定的那个隐匿单元的 EA. 计算出在输出层前面的隐匿层中的所有 EA 值之后，我们可以用类似的方式计算出其他各层的 EA 值，朝着与活性传播过的相反方向逐层计算下去. 这也就是取名为反向传播的缘故.

对于非线性单元，反向传播算法如上已述，在反向传播前，必须把 EA 变换为 EI. 已证明反向传播法对训练多层网络完成各种任务是好工具. 在输入和输出之间的关系为非线性及训练数据充足时，它最为有用.

应用神经网络法学习控制动力学行为，这一课题的研究可以追溯到 20 世纪 80 年代后期及 20 世纪 90 年代初期. 该法的精髓是，利用其实际行为与期望行为之间的误差信号去自适应神经元的突触权值 J_i，以便使这个误差减至最小值甚至为零. 这个训练学习过程就是上述的反向传播算法. 为了训练突触权值，我们所用的误差测度就是均方偏差：

$$E_n = (X_n - X_n^T)^2 \tag{5.176}$$

这里 n 指离散动力学的第 n 次迭代，X_n 表示 $(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-N})$ 在 $N+1$ 迭代步数时的动力学轨迹且在受控系统一般为 d 维相空间内，而 X_n^T 为所期望轨迹(或称目标轨迹 T). 于是该均方偏差可以用来产生一个突触权值的松弛动力学，并在突触权值的空间内寻求 E_n 的局域最小值

$$J_i(n+1) = J_i(n) - \lambda \frac{\partial E_n}{\partial J_i(n)} \tag{5.177}$$

其中 λ 称为学习率. 以这种方式，对其输入的响应便是产生突触权值的自组织. 在图 5.13 中给出了用一个神经网络达到学习和控制动力学系统.

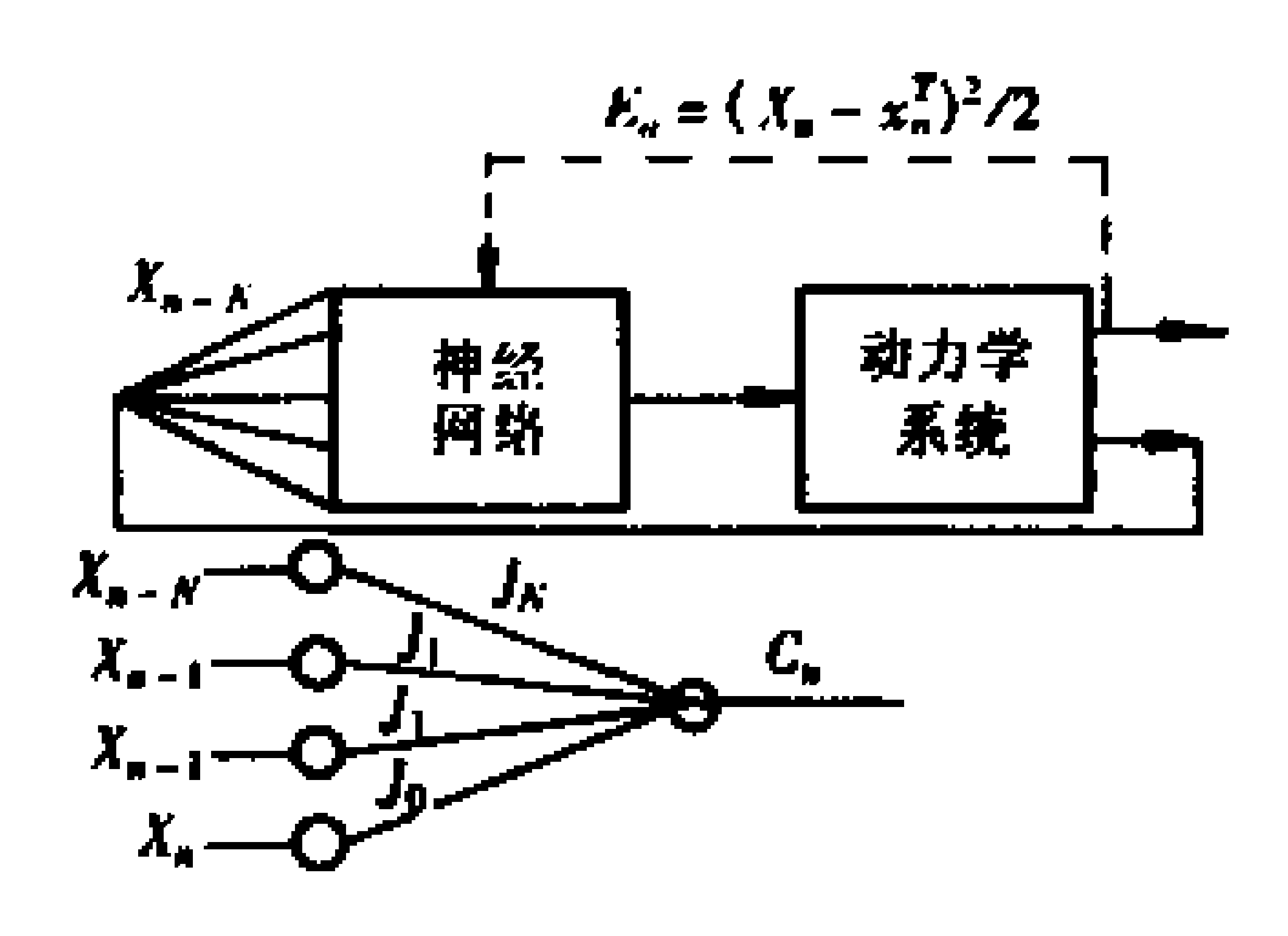


图 5.13 神经网络法实现对动力学行为的学习和控制的示意图

应用由几个隐匿层组成的神经网络及反向传播法，虽可以高精度实现(完成)复杂的控制任务，但是，当网络很大及精度要求很高时，训练相位则要耗费大量时间，这对于许多实际应用是不利的. 为此，Deppisch，Bauer 和 Geisel 提出了神经网络的串级训练算法. 它与标准的反向传播法比较，在相同的研究例题下，此法可以减少学习时间竟达三个数量级，显示了很大的优越性. 该法特点是，对一个串级结构连续训练，并利用反向传播和配合的梯度算法(conjugate gradient algorithms)已经成功地研究了高精度的输出.

作为例子,他们已应用于对混沌时间序列的预测.图 5.14 给出了神经网络串级训练的示意图.近年也提出了对前馈型 ANN 的快速训练算法.让我们应用神经网络技术,建立一个三层感知机(three-layer perceptron),其输入层提供输入矢量 X 的 K 分量,隐匿层以 l 为隐匿单元而具有可变数为 L,一个线性输出单元可以把输出重标成任何范围.我们用(K,L,I)规定每层中的单元数,其中 I 为输出单元个数,然后对这些网络进行分类.各个单元完成前后一层的输出的加权求和,此外隐匿单元由 S 型变换函数 g 来完成变换.第二和第三层的输出分别为

$$O_l = g\left(\sum_k \omega_{lk} X_k + \Theta_l\right)$$

$$O = \sum \omega_l O_l + \Theta$$

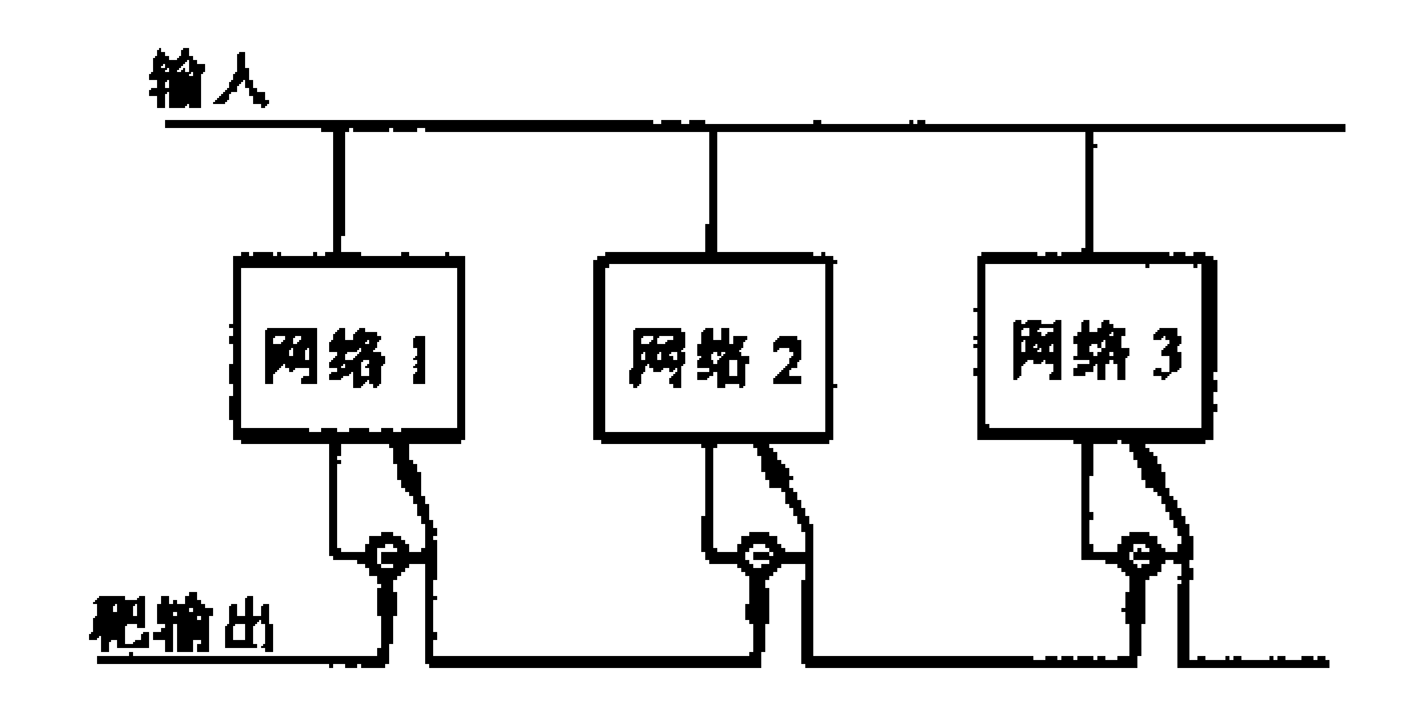


图 5.14　神经网络的串联训练的示意图

这里 ω_l,ω_{lk}和 Θ_l 都是系统的参数.训练相位时,调整这些参数,以便利用反向传播算法或修正法来产生所期望的输出.假设由一个图样集 $\mathscr{P}$定义一个总任务.误差测度可定义为对 $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}$ 的整个图样集求二次平均:

$$F = \left[\left(\frac{\tilde{f}(x_0) - f(x_p)}{\sigma}\right)^2\right]_A^{1/2}$$

图 5.14 中输入信号反馈到所有的子网络中去.误差即网络 1 的现今输出与目标输出之间的差值,首先通过网络 1(打开箭头)反向

传播以便修改其权值．在网络 1 训练之后，该差值作为下一个网络的目标输出，以此类推．

其中$\bar{f}$由网络输出 0 所给出的 f 的近似函数，σ 为 f 的标准偏差．倘若 $\mathscr{P}_1$ 是用于训练的图样集，F 称为学习误差．为了预测误差我们利用一个不相连的图样集 $\mathscr{P}_2 \subset \mathscr{P}$，且 $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$．应用标准学习算法，我们可以看到几个问题：(1)训练很难．因为训练相位要花巨额计算时间，如对于大约 100 个相连尺寸和 10^4 量级的图样集尺寸，要在一个工作站上计算一天时间．(2)权值不同的随机初值需要不同数目的学习步骤以减少误差测度．(3)原则上应用大网络才比较有效．(4)倘若想用一个较小的网络能解决一个问题，则较小的网络不仅需要对单个学习步骤计算时间要少，而且要求达到所需误差测度的学习步骤也要少．再则，同大网络(具有太多的自由度)相比较，拓广的能力得到改善．以上表明：普通学习算法，诸如反向传播算法、配合梯度算法都无法开拓大网络的优点．

Deppisch 等人根据 Moody 的思想，发展了针对上述问题的一种对多层感知机的新算法，该法允许简便地训练大网络．图 5.14 已示出了该法的原理图．一个输入信号同时输入几个网络中，这些网络都是一个个贯彻执行完全分开的部分，接着，这些部分以这样的一种方式用一个目标(靶)信号进行训练，即所有的输出之和接近于目标信号．第一步是训练网络 1 直到学习误差达到饱和为止．其次让网络 1 不变，训练网络 2 以修正网络 1 的目标信号与输出之间的差值．我们逐个增加更多的网络部分，理想地使总网络的误差由每部分都减少一个数量级，最后，我们把训练过的部分都连接起来形成一个单并行网络．由于把一个标量输出推广到一个矢量输出是直截了当的，所以我们只用一个输出单元解释网络过程．图 5.14 中示出如何连接两个网络的简单例子．输入单元都是只由输入值提供的非过程单元，因而可以是相同的．隐匿单元仍然是不变的，而两个输出单元现在合而为一．这个单元把所有过去的输出总体给出一个目标输出的近似值．

为了比较起见，已经对整个网络系统进行了训练，且确定其训

练速度和学习时间.例如以逻辑映像为典型例子作为一个试验系统以及与不同预报算法进行比较的标准.比如,训练中采用200个采样的图样集 $\mathscr{P}_1$,对具有一个隐匿层(2到15隐匿的S单元)的逻辑映像进行训练.一方面应用配合的梯度算法(这里梯度用反向传播算法计算)来使完全网络的误差减至最小,另一方面减少逐个网络部分,用非串级方法,归一化均方根学习误差达到饱和值 10^{-4},但是应用串级方法则不仅减少计算时间,而且精度比前者高达 10^3 倍,即实际为 10^{-7}.在两者情形中,对于1000个采样的图样集 $\mathscr{P}_2$,预测误差都仅为上述学习误差的百分之几,并且可以避免其他问题(如 coverfitting 问题等).串级方法对于在合理的时间内训练高精度的网络是一个合适的工具,它已经被应用于预言两个混沌系统,即逻辑映像和 Rossler 系统.

神经网络法实现对混沌的控制迄今有许多感兴趣的问题尚待研究,诸如:对于一个给定的控制任务,网络的最佳尺寸是多少?成功控制的机理及失败的原因何在?在给定的受控时序与所要求的控制(任务的)特性及网络的互连性之间究竟有何关系、如何实现以混沌控制为目标的 ANN 的硬件系统(如电子技术、光学技术或光子技术等),等等.Hentschel 和 Jiag 对其中部分问题进行了探讨(限于对逻辑映像中的不动点的控制).

研究表明,并非在任何情况下都能应用 ANN 方法实现对混沌的给定控制目标.比如对逻辑映像,在某些控制信号下可使目标序列的某些期望达到所需的误差,网络也可以提供这样的控制信号;另一种情形是可以达到目标动力学所期望的误差,但是所用的网络却不能提供控制信号.最差的情况就是对受控方程加入任何控制信号,都不能完成所期望的控制任务.这就要对具体问题作深入的分析和采取恰当的技术方法以及网络类型.

迄今神经网络的研究已成为众多学科与技术学科共同关注的重大课题,混沌控制及其应用必将在该交叉科学的研究中互相促进,共同获益.

§5.12 控制混沌的其他方法

近些年来，混沌控制的研究蓬勃展开，学者们提出了各种各样的控制方法，有普遍性的方法，也有特殊适应的方法，前 11 节我们已经论述许多颇有代表性的典型方法，下面我们将若干发展迅速的方法作一下介绍.

§5.12.1 "振荡吸收器"技术

这种技术的原理比较简单，但却有着广泛的应用，基本思想可以用一辆卡车轮子的运动来阐明，由于道路崎岖不平，车轮子的运动方向发生变化，于是车上的悬置便发生了不可预测的混沌振动.为了抑制这类振动，通常的办法就安装震动吸收器.对于非线性动力学系统，就等价于附加一个动力学系统，让它起到抑制混沌振荡的作用.学者们于 1993 年建议将此法应用于混沌控制.图 5.15(a)为振荡吸收器的示意图.它是通过把一个原来的混沌与一个简单的附加自治系统耦合起来达到控制效果.其控制器可为线性的也可为非线性的，可用下列方程描述：

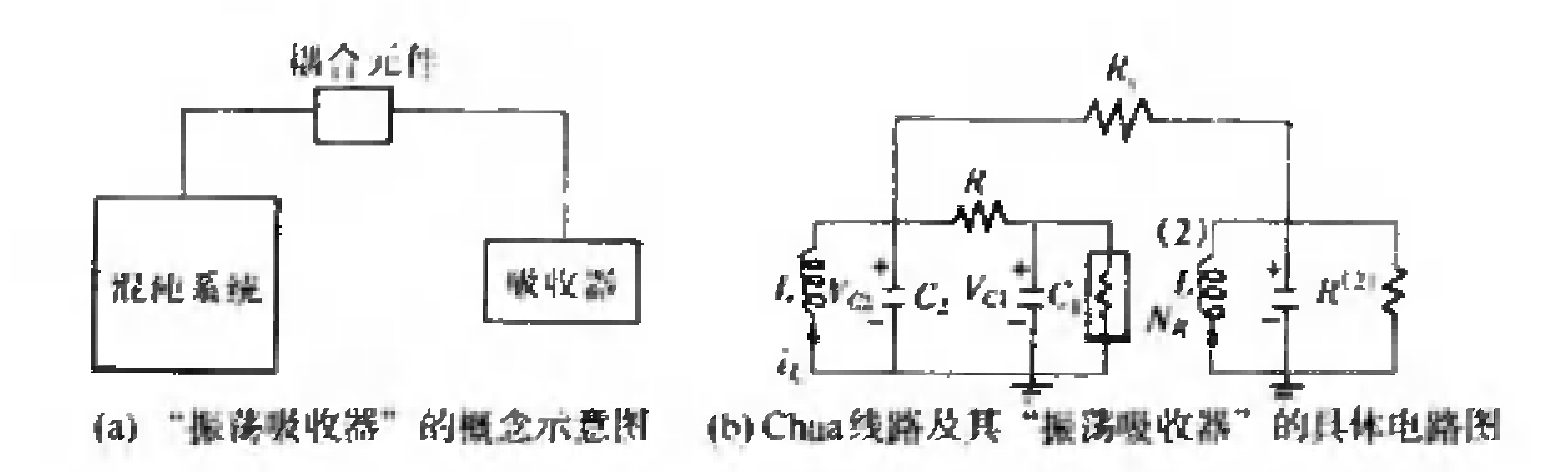
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(y,\mu) \tag{5.178}$$

这里 μ 为吸收器的参数集且可变化，与受控的混沌动力学按下列耦合成总体方程组为

$$\begin{aligned}\dot{X}&=F(X,R)+\beta(Y-X)\\ \dot{Y}&=g(X,\mu)+\delta(X-Y)\end{aligned} \tag{5.179}$$

这里 β 和 δ 是耦合矩阵.

该法的物理实质是通过吸收器对原来的混沌系统进行修正，使得在原来的混沌吸引子内获得一个新的稳定周期轨道.该法不仅对力学系统(如 Duffing 系统)及化学系统(如 Rossler 系统等)，



(a) "振荡吸收器"的概念示意图　(b) Chua线路及其"振荡吸收器"的具体电路图

图 5.15

而且对一些电路也是有效的. 图 5.15(b)给出了著名的产生混沌的 Chua 电子线路及其"混沌振荡吸收器"线路. 该"吸收器"就是一个并联的 RLC 电路,它与 Chua 线路通过电阻器 R_x 相耦合. 描述这个总体系统的动力学方程的无量纲形式为

$$\dot{X} = 2[Y - X - g(X)] \tag{5.180}$$

$$\dot{Y} = X - Y + Z + \epsilon(Y^1 - Y) \tag{5.181}$$

$$\dot{Z} = -\beta Y \tag{5.182}$$

$$\dot{Y}^1 = \alpha^1[-\gamma^1 y^1 + Z^1 + \epsilon(Y - Y^1)] \tag{5.183}$$

$$\dot{Z}^1 = -\beta^1 Y^1 \tag{5.184}$$

其中(Y^1, Z^1)是"吸收器"变量,$\epsilon(Y^1 - Y)$为线性"反馈"项,此项反映"吸收器"附加在 Chua 线路的方程(5.182)中用以修正控制的作用. 选择不同的 ϵ,则可在原混沌线路中获得各种稳定的渐近行为.

该方法的技术特点是易于实现. 在许多情形下,要用尝试办法来选择目标行为,如从分岔图的研究中选取,这通常在实际中不易达到. 此外,该技术要求对原系统进行重新设计,因为它要对系统的参数进行大的改变或者要附加于系统进去.

§5.12.2　直接利用"蝴蝶效应"控制混沌

混沌的开拓者 Lorenz 曾形象地比喻 Lorenz 吸引子恰如蝴蝶

的双翅，它们对初始条件及微扰具有指数敏感性，该特性反映了非线性系统的本质特征，在他研究了空气对流的“蝴蝶效应”之后，科学地揭示了天气预报的长期不可预测性．但是近年来随着混沌控制方法及技术的发展，为人们最终驾驭这种“蝴蝶效应”即进行有效的混沌控制提供了各种途径．

近年来，学者们发展了一种所谓直接利用混沌吸引子控制所期望的目标行为的简单法，即利用“蝴蝶效应”进行混沌控制．

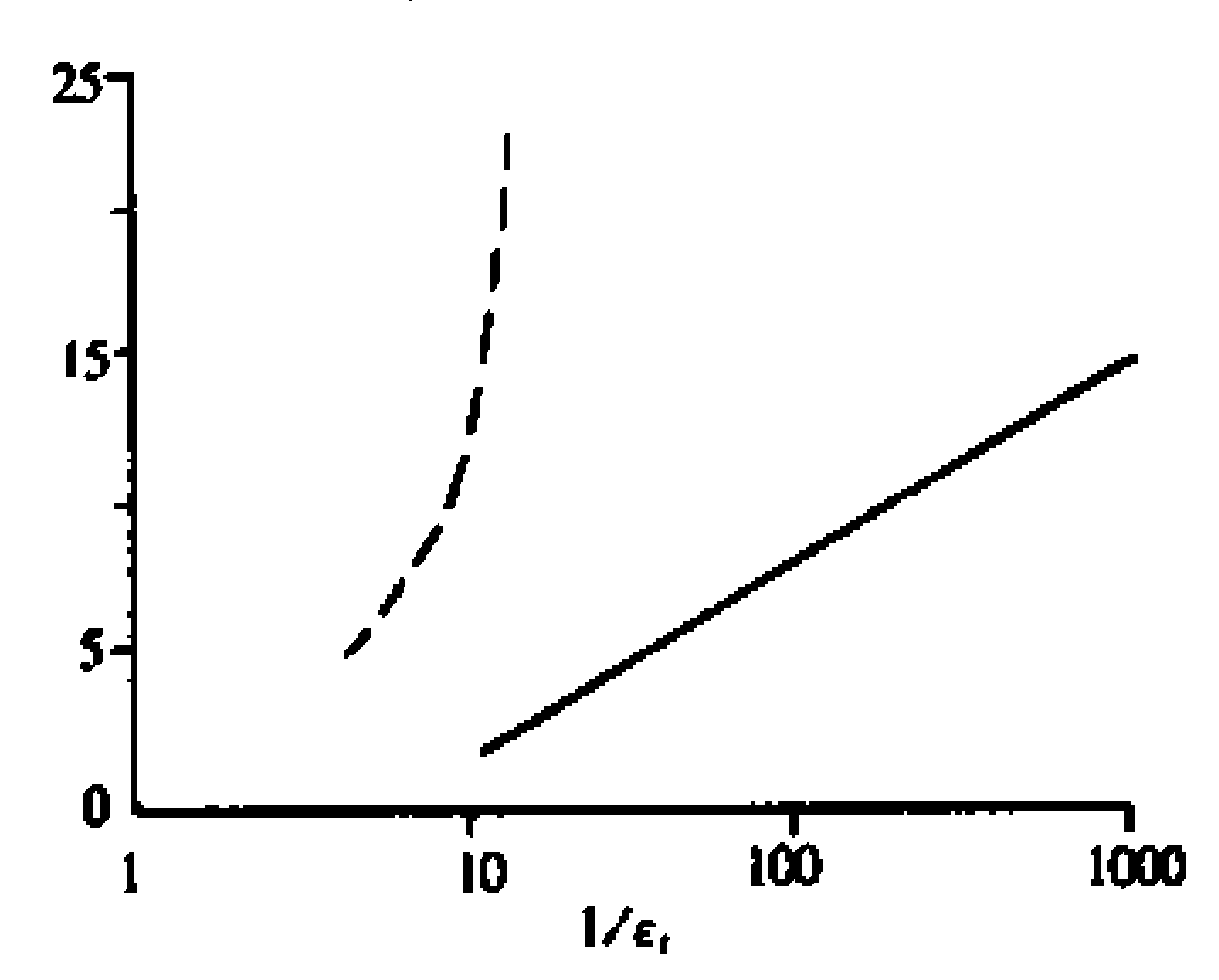


图 5.16　从典型的源点到达目标邻域内所需的平均时间（当 $\delta\xi=\varepsilon_t$）与邻域大小 ε_t 的关系．虚线为无控时依赖关系．实线为该法所控后的依赖关系

学者们从理论上证明了该法是快速、简单和有效的．当所研究的非线性系统无微扰时，从系统的吸引子中某个源点 X_s 运动到欲控制的目标点 X_t 附近的一个 ε_t 小邻域内，其所需的时间为

$$\tau_0 \sim (1/\varepsilon_t)^D \tag{5.185}$$

这里 D 为信息维数，无控时，τ_0 随目标邻域的尺寸大小成幂次地增加．

然而，对于可以得到的系统参数，当对它经过恰当选择的小微扰之后，则同样从 X_s 到 X_t 所需的时间大为减少，这时时间变为

$$\tau \approx \lambda_1^{-1}\ln(1/\delta\xi) + |\lambda_2|^{-1}\ln(1/\varepsilon_t) \tag{5.186}$$

其中 $\delta\xi$ 为微扰后系统状态的改变量，λ_1 为正的李雅普诺夫指数，λ_2 为负的李雅普诺夫指数. 当 $\delta\xi \sim \varepsilon_t$ 时，由上式退化为

$$\tau \sim \ln(1/\varepsilon_t) \tag{5.187}$$

由此可见：τ 比 τ_0 确实大为缩短. 如图 5.16 所示.

理论结果不仅为弹性体实验所证实，而且可拓广应用于高维非线性系统中目标控制. 该法的最大优点是，无需预知系统的理论模型的有关知识，利用简单的技术就可从实验上实现快速控制混沌的目的. 其对小幅度噪声及误差所导致的影响不大. 适用于对一维映像及一些实际系统中的混沌控制.

§5.12.3 利用外部噪声控制混沌

近些年来，人们对空间广延的动力学系统及其混沌的控制做了一定的研究，这些系统诸如神经网络、社会系统、经济系统以及耦合振子等，其可以用一组联立微分方程或迭代映像来描述. 人们可以用外部噪声来控制这些系统中的混沌.

考虑由 N 个功能相同的神经元所组成的神经网络系统：$\{S_i(t)\}$，$i=1,2,\cdots,N$，$-1\leqslant S_i\leqslant 1$，这里每个神经元 S_i 通过耦合变量 J_{ij} 与所有的其他神经元相连接，J_{ij} 都是不相关高斯随机变量，其统计性质为：$\langle J_{ij}\rangle=0$ 以及 $[J_{ij}^2]=1/N$，方括号表示对所有耦合(变量)求"猝熄"平均. 采用神经元更新的并行动力学：

$$S_i(t+1)=\varphi(h_i(t)),\ i=1,2,\cdots,N \tag{5.188}$$

假设传输函数 $\varphi(h)$ 为奇函数，以及在 $h\to\pm\infty$ 时接近 ± 1. 而且 $\varphi(h)$ 在 $h=0$ 邻域按下列增长

$$\left.\frac{\partial\varphi(h)}{\partial h}\right|_{h=0}=g \tag{5.189}$$

这里 $g>0$ 称为增益参数，神经元 S_i 的内场为

$$h_i(t)=\sum_{j\neq i}J_{ij}S_j(t)+\xi_i(t) \tag{5.190}$$

其中 ξ_i 为外部白噪声，统计性质为

$$<\xi_i>=0$$

$$<\xi_i(t)\xi_j(t)>=\sigma^2\delta_{ij}\delta_{t\tau} \tag{5.191}$$

其中<·>表示对强度为 σ^2 的噪声求“热”平均.

为研究网络的动力学性质，我们对下列生成函数求微分：

$$\begin{aligned}[Z(t)]_j = &\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i,i}\frac{\mathrm{d}h_i(t)\mathrm{d}h_i(t)}{2\pi}\\ &\cdot\exp\Big\{-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{i,i}h^2(t)-\sum_{i,i}ih(t)h_i(t)\\ &+\sum_{i\neq j}J_{ij}\sum_i h_i(t)S_j(t)+\sum_{i,i}l_i(t)S_i(t)\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{5.192}$$

这里归一化为 $[Z(0)]_j\equiv1$. 经过一些计算之后，整个系统的动力学在热力学极限下可以退化为一个有效的单神经元方程：

$$S(t+1)\equiv S_{t+1}=\varphi(h_t) \tag{5.193}$$

内场 h_i 现在为依赖时间的自治高斯场(具有惟一鞍点方程求得的零平均值)：

$$\begin{aligned}< h_th_\tau >&= \sigma^2\delta_{t\tau}+< S_tS_\tau >\\ &=\sigma^2\delta_{t\tau}+<\varphi(h_{t-1})\varphi(h_{\tau-1})>\end{aligned} \tag{5.194}$$

研究(5.193)及(5.194)可得与(5.188)相同的动力学性. 于是我们可以定义网络的活性(activity)：

$$\begin{aligned}K_t=< h_t^2 >&=\sigma^2+<\varphi^2(h_{t-1})>\\ &=\sigma^2+\int_{-\infty}^{+\infty}Dx\varphi^2(\sqrt{K_{t-1}}\,x)\end{aligned} \tag{5.195}$$

其中简略符号 $Dx\equiv\mathrm{d}x(2\pi)^{-1/2}\exp\{-x^2/2\}$. 估算(5.195)可得出

不动点 K^*,如图 5.17 所示.对于小 K_{t-1}得到

$$K_t = \sigma^2 + g^2 K_{t-1} + O(K_{t-1}^2) \qquad (5.196)$$

只在无噪声时才存在平凡不动点 $K^* = 0$ 且对于 $g<1$ 是稳定的.对于 $\sigma^2>0$ 或 $g>1$ 可以发现只有一个具有非零活性的稳定不动点,$0<K^*\leqslant 1+\sigma^2$.

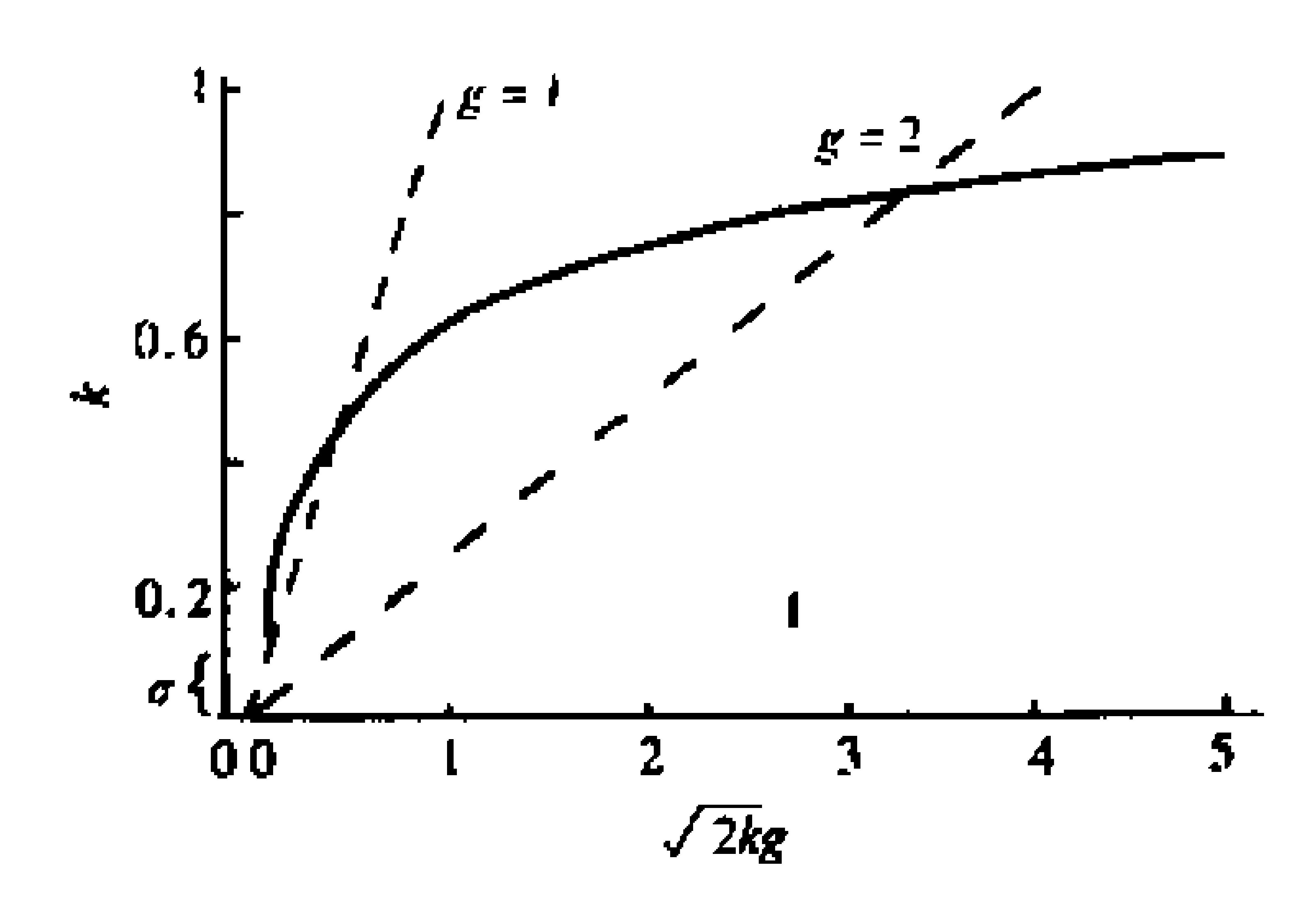


图 5.17　由不动点方程(5.193)所确定的平衡态活性的图解.实线表示方程的右边,虚线表示方程的左边.$g=1,2$.噪声把曲线移到更高值.

为了寻找混沌区域,可以建立一个系统的复制品,复制系统的初始条件与原系统差别无限小,且噪声相同 $\xi_i^1(t)=\xi_i^2(t)$.利用生成函数,可以研究两个复制系统之间的关联,所复制的有效神经元方程为

$$\begin{aligned} S_{t+1}^{\alpha} &= \varphi\langle h_t^{\alpha}\rangle \\ \langle h_t^{\alpha} h_\tau^{\beta}\rangle &= \sigma^2\delta_{t\tau} + \langle S_t^{\alpha} S_\tau^{\beta}\rangle \\ &= \sigma^2\delta_{t\tau} + \langle \varphi(h_{t-1}^{\alpha})\varphi(h_{\tau-1}^{\beta})\rangle \end{aligned} \qquad (5.197)$$

其中 $\alpha,\beta=1,2$.

现在从下式:

$$\lambda = \lim_{\tau\to\infty}\lim_{S_t^1\to S_t^2}\frac{1}{2\tau}\log_2\frac{\langle(S_{t+\tau}^1 - S_{t+\tau}^2)^2\rangle}{\langle(S_t^1 - S_t^2)^2\rangle} \qquad (5.198)$$

导出最大 Lyapunov 指数.

假设平衡态

$$K = K^{*} = \langle (h_t^1)^2 \rangle = \langle (h_t^2)^2 \rangle \tag{5.199}$$

以及定义两个所复制的神经元之间的关联为

$$\begin{aligned} C_t &= \langle h_t^1 h_t^2 \rangle = \sigma^2 + \langle S_t^1 S_t^2 \rangle \\ &= \sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} D_x D_y \varphi(\sqrt{K}x)\varphi\left[\frac{C_{t-1}}{\sqrt{K}}x + \sqrt{\frac{K^2 - C_{t-1}^2}{K}}y\right] \end{aligned} \tag{5.200}$$

方程(5.199)可退化为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\log_2 \frac{\partial C_t}{\partial C_{t-1}}\bigg|_{c_{t-1}=k} \\ &= \frac{1}{2}\log_2 \int_{-\infty}^{+\infty} Dx[\varphi(\sqrt{K}x)]^2 \end{aligned} \tag{5.201}$$

对于无噪声情形及 $g \leqslant 1$ 时,这里系统处于平凡不动点 $K^{*}=0$,于是可得

$$\lambda = \log_2 g \tag{5.202}$$

当然也可以利用随机矩阵的特征谱的椭圆律求得平凡不动点的稳定性结果.

在无噪声情形及 $g>1$ 时,这个系统出现混沌,在每个有限噪声时对于 $g \to \infty$,渐近行为 $\lambda = \frac{1}{2}\log 2$,且具有上述特性的传输函数.

我们具体选择下列情况作进一步讨论:

$$\varphi(h) = \begin{cases} -1, & \text{对于 } h < -1/g \\ gh, & \text{对于 } -1/g \leqslant h \leqslant +1/g \\ +1, & \text{对于 } +1/g < h \end{cases} \tag{5.203}$$

为了计算一定噪声及增益参数下的李雅谱诺夫指数，我们必须利用(5.196)估算并代入(5.202)来寻找不动点 K^*. 为此，不得不用数值方法来达到这点，如图 5.18 所示. 在 $g\to\infty$ 极限下，我们求得

$$K^* = 1+\sigma^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\log_2\sqrt{\frac{2}{\pi K^*}}g \tag{5.204}$$

与我们所期望的那样，渐近行为为 $\lambda = \frac{1}{2}\log_2 g$.

由上所见，在噪声的影响下，系统的动力学行为发生引人注目的变化. 一般地说，外部噪声可使神经网络的活性 K^* 增大. 对于 $g \leqslant g_c$，当噪声起作用时，活性则以非线性方式大大增强. 随着噪声的不断增大，系统进入混沌的临界指数随之被移动到较大值，如图 5.18 所示. 对于小噪声，已发现渐近行为 $g_c = 1-\sigma^2\mathrm{Ln}\sigma^2$. 对于大噪声，则 $g_c = \sqrt{\pi/2\sigma}$. 由此得出结论：只要适当改变系统外部的噪声强度，则可实现神经网络系统从混沌态到有序态的转变，其物理机制仍然是相应于李雅普诺夫指数从正值向负值转变.

Molgedey 等人对具有随机相互作用的 McCulloch-Pitts 神经元的完全连续网络的动力学的 MFE 进行了求解，计算了在外部噪声作用下动力学的相图，如图 5.18、图 5.19 所示. 他们的结果表明：平均场方程(MFE)对于离散的并行动力学比较连续时间模型大为简化. 因此，该法有可能应用于其他空间广延的非线性系统，如神经网络或具有非对称耦合，或时间延迟相互作用的振荡器系统. 他们已经利用蒙特卡洛方法对 MFE 进行了模拟，研究了神经网络的最大李雅普诺夫指数与对称性以及与相互作用的延迟时间的依赖关系.

Maritan 及 Banavar 已经证明：在以相同噪声作用下的两个混沌系统，只要噪声强度足够大，它们就可以达到混沌同步.

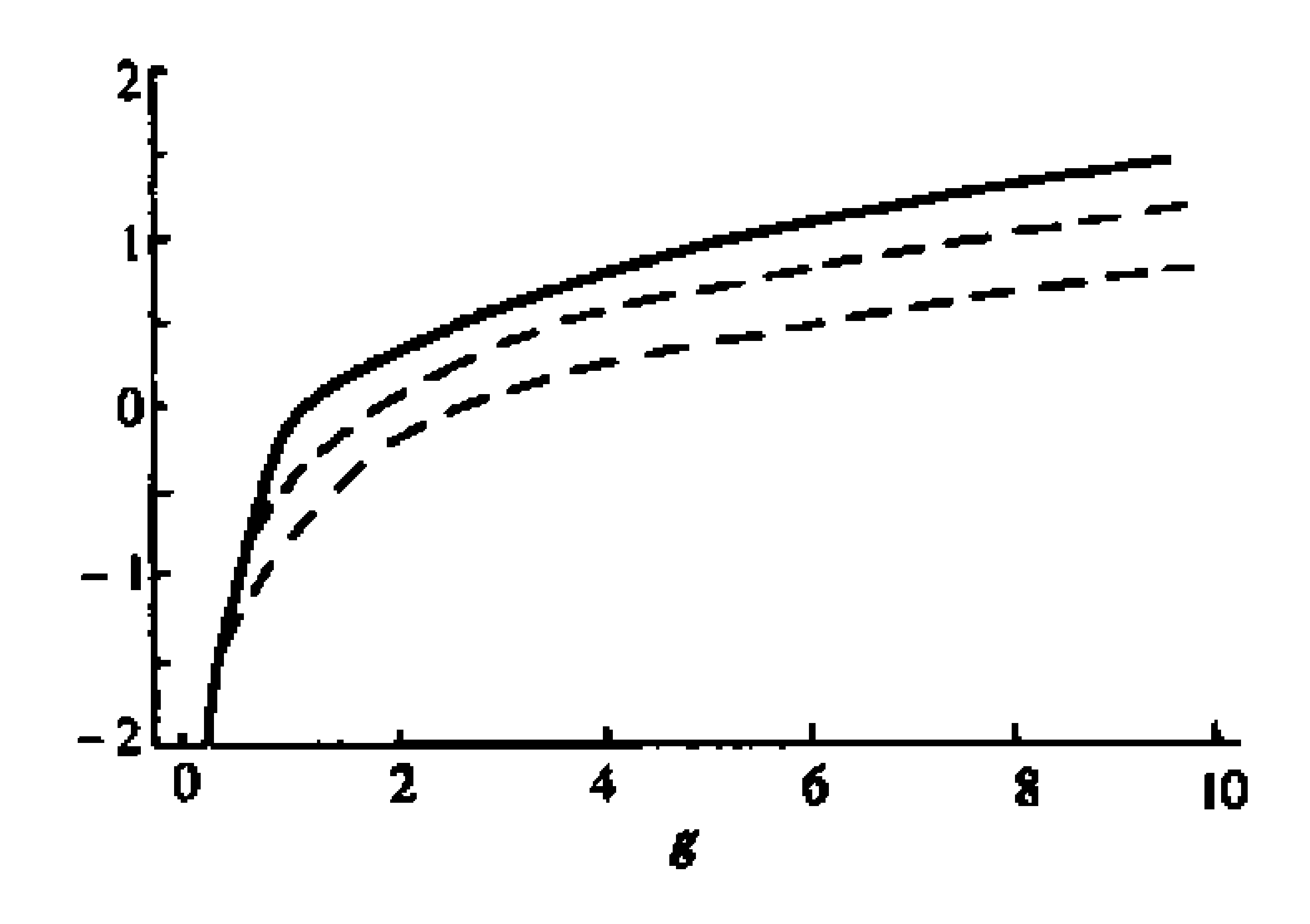


图 5.18　不同 σ 值下最大李雅普诺夫指数与增益参数 g 的函数关系
实线：$\sigma=0$，点线：$\sigma=1$，虚线：$\sigma=2$. 在 $g=1$ 处在无噪声情形出现
尖锐弯曲，此表明出现非零活性的相变

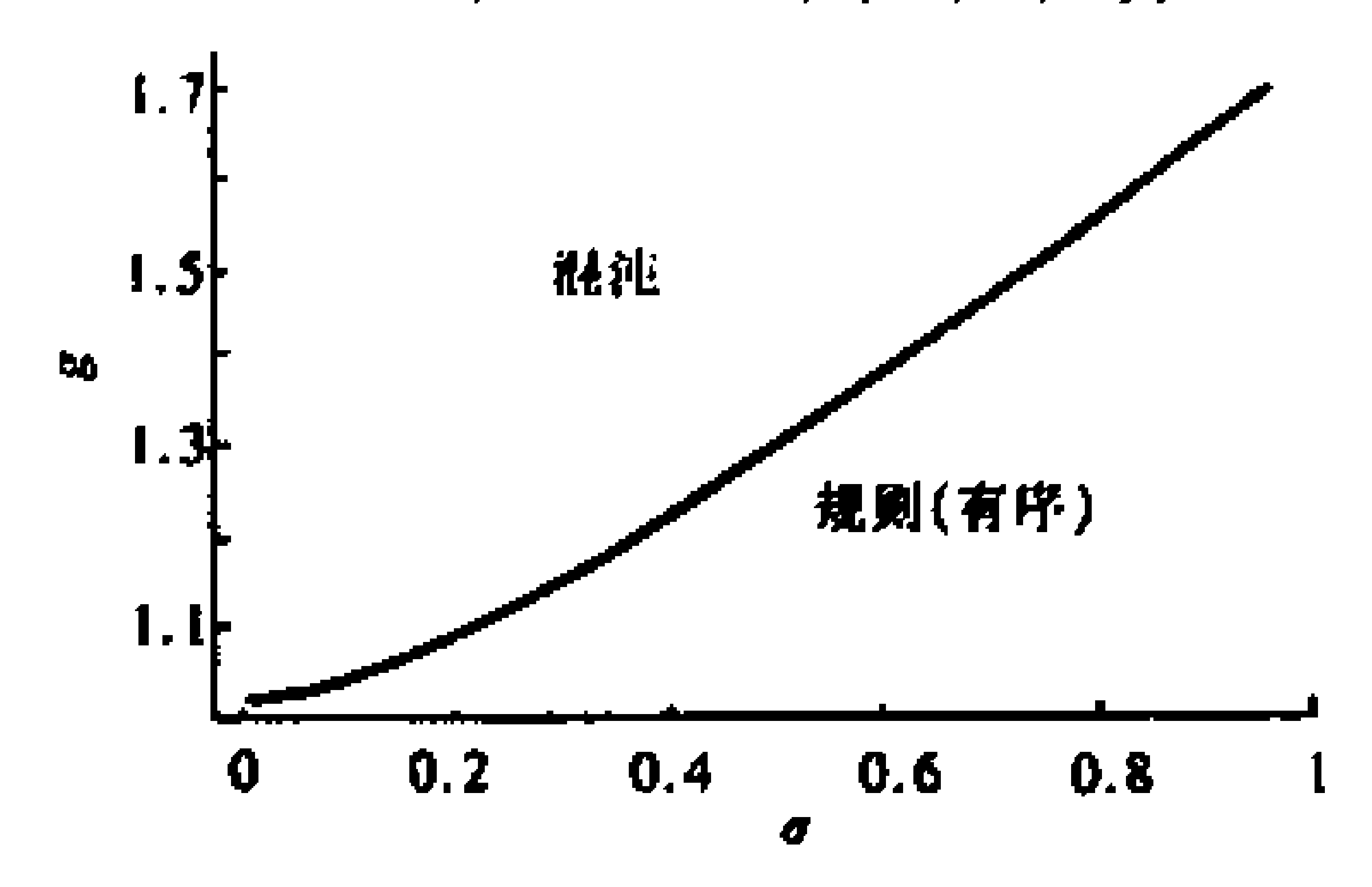


图 5.19　具有非对称耦合无穷区域的神经网络在外部噪声作用下的相图

§5.13　非线性系统中混沌同步原理

在自然界及实验中存在大量的同步现象，但是，发现混沌同步现象，却是 20 世纪 90 年代初的事情，首先由美国学者 Pecora 和 Carrol 在电子线路的专门设计的实验中实现两个系统的混沌同步. 这既是令人吃惊，又是引人入胜的发展，因为混沌行为的最大特点就是，运动轨线对初始条件具有高度的敏感性，所以以前认为在实验室内重构相同的完全同步的混沌系统简直是不可能的事情. 但是，混沌同步的发现打开了新天地，具有诱人的应用发展前

景.

Pecora-Carroll 的混沌同步的实验方案是以马里兰大学的 Robert Newcomb 设计的电路为基础，研制了一个能产生混沌的非线性电路，该电路作为驱动系统，并且它可以分成一个稳定的子系统及一个不稳定的子系统，然后，完全复制一个与稳定的子系统相同的电路就叫做响应系统，即被驱动电路.这两个电路只差一个重要元件.

以驱动电路的混沌信号为驱动信号，把两个电路连接在一个共公点 x_1 上，整个实验线路示于图 5.20.中、上部为驱动电路，下

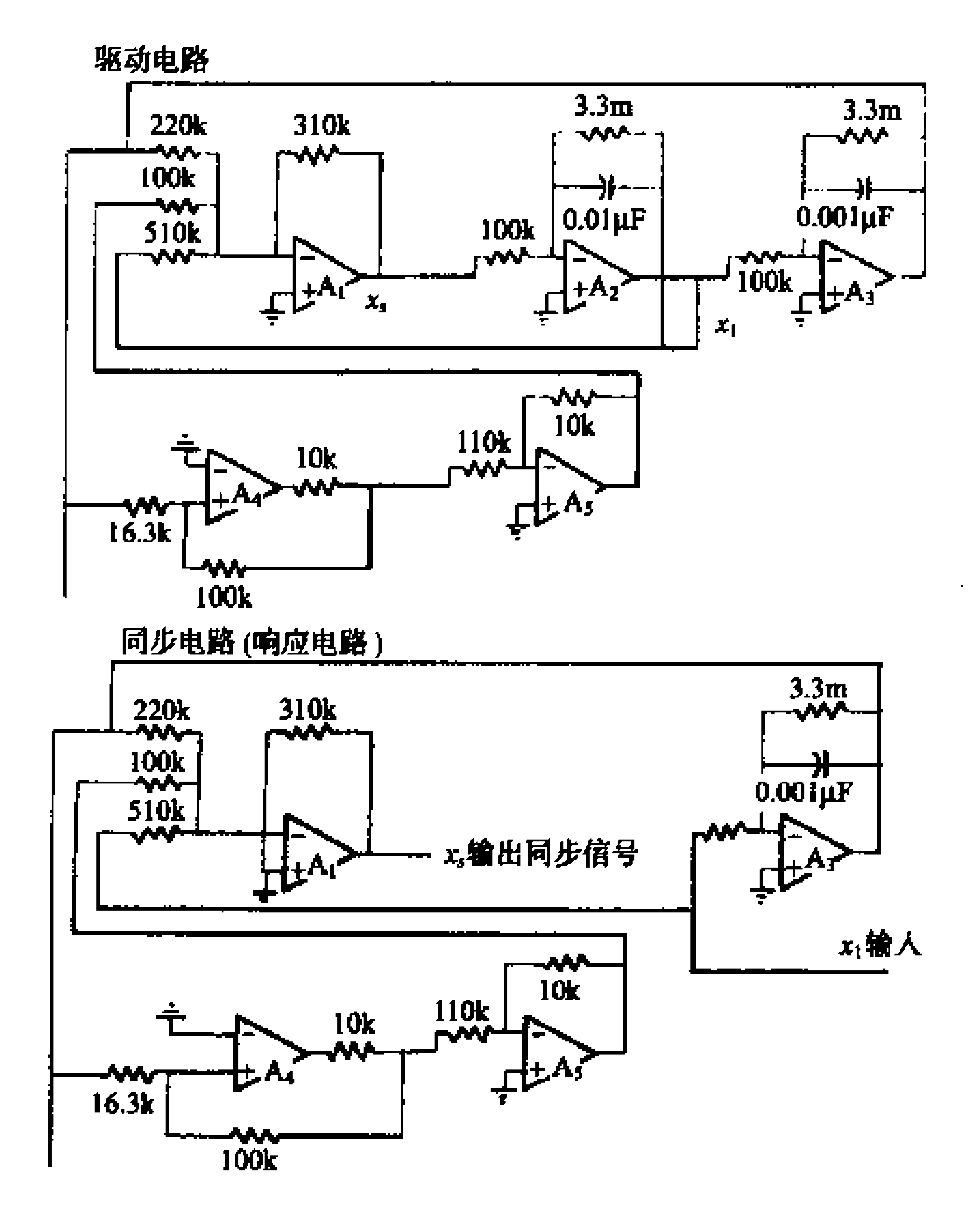


图 5.20 Carroll-Pecora 混沌同步方案的实验线路图

部为响应电路. 从 x_1 和 x_2 分别输入信号和输出信号.

为了验证同步,从实验上只要在双相示波器上分别接入 x_1 处的输出混沌信号及在响应电路 x_2 处的输出混沌信号便知. 倘若示波器上看到一条呈 45°的直线,如图 5.21 所示,则表明它们达到了完全同步. 实验中可能由于复制电路不够精确或变换的缘故,导致看到的是一条有一定宽度的粗线,这表明它们同步得不理想,但是,实验表明,允许线路中的元件有一定的误差范围,只要通过适当的调整之后,在满足混沌同步的条件下,它们比较容易达到完全同步,并且它们对小环境噪声及微小参数变化具有鲁棒性,即该混沌同步电路具有抗干扰性,这对实验应用是有利的.

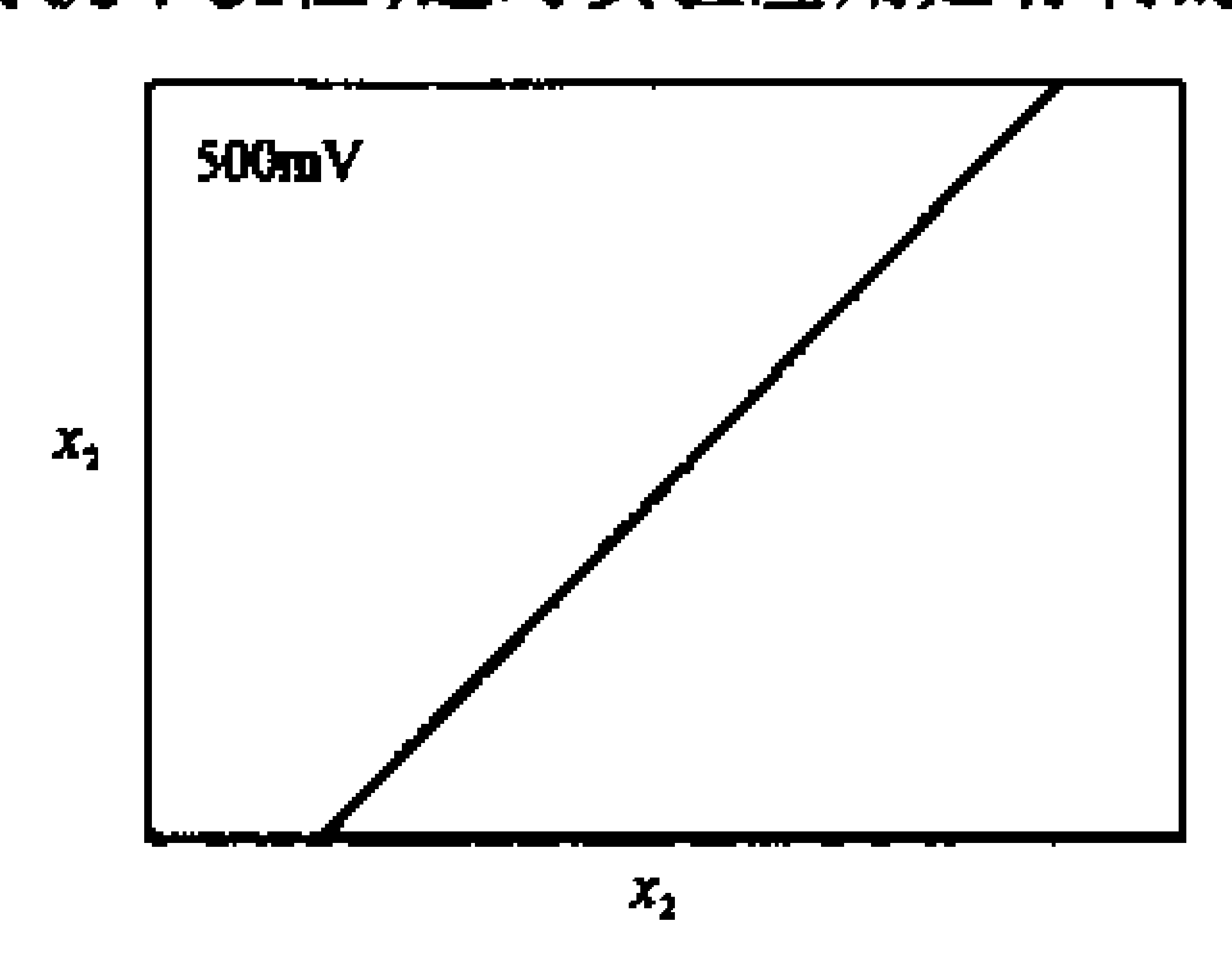


图 5.21 与图相应的混沌同步的相图,在略去暂态过程之后的相图呈直线关系

§ 5.13.1 同步的定义及渐近稳定性定理

这里采用 He 和 Vaidya 有关同步的定义及定理,同步定义:考虑两个系统,一个驱动系统为

$$\dot{X} = F(t, X) \tag{5.205}$$

其中

$$X = \{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}^T$$

$$F = \{f_1(t, X), \cdots, f_n(t, X)\}^T$$

设以 x_1 为驱动变量时,则响应系统为

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}') \tag{5.206}$$

其中用带撇表示响应系统的变量：

$$\boldsymbol{X}' = \{x_1(t), x'_2(t), \cdots, x'_n(t)\}^T$$

$$\boldsymbol{F} = \{f_1(t, \boldsymbol{X}'), \cdots, f_n(t, \boldsymbol{X}')\}^T$$

这里 t 为时间，矢量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}' \in R^n$. 令 $\boldsymbol{X}(t; t_0, \boldsymbol{X}_0)$和 $\boldsymbol{X}'(t; t_0, \boldsymbol{X}'_0)$分别为(5.206)及(5.207)的解，并满足 Lipschitz 条件，当存在一个 R^n 的子集$D(t_0)$时，使得初值 $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}'_0 \in D(t_0)$. 当 $t \to \infty$ 时，若存在

$$\zeta \equiv \| \boldsymbol{X}(t; t_0, \boldsymbol{X}_0) - \boldsymbol{X}'(t; t_0, \boldsymbol{X}'_0) \| \to 0 \tag{5.207}$$

则称响应系统(5.206)与驱动系统(5.205)达到同步.

倘若 $D(t_0)$支撑着整个空间，即 $D(t_0) \subset R^n$，则该同步定义为全局(完全)同步；倘若 $D(t_0)$是 R^n 的一个子集，则该同步定义为局域(部分)同步，称 $D(t_0)$为同步区域.

以上同步定义不仅适用于混沌同步，而且也适用于非混沌(即周期等)同步，并既适用于自治系统的同步，也适用于非自治系统的同步，甚至可以适当拓广到后面将讨论到的超混沌同步.

根据前面关于驱动响应系统的同步类型，我们假设驱动(主)系统可以分成两部分：

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \qquad (\text{不稳定部分}) \tag{5.208}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \qquad (\text{稳定部分}) \tag{5.209}$$

响应系统应为(含 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$)

$$\dot{\boldsymbol{w}}' = \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}') \tag{5.210}$$

He 和 Vaidya 提出下列渐近稳定性定理：

倘若方程(5.205)和(5.206)的解都在 S 集合之内，$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 在 S 内满足 Lipschitz 条件，则要使(5.210)与(5.209)达到同步，只有

且仅仅只有一个子集 $D(t_0)\subset R^n$,使得当响应系统 w'的初始条件落入$D(t_0)$之内时,则(5.210)的解才是渐近稳定的.

上述定理告诉我们:对于响应系统初始条件的选择是很重要的,必须落入同步区域内,才能达到与驱动系统同步.

§5.13.2 Pecora-Carroll 的混沌同步原理

Pecora 和 Carroll 为了阐明实验上观察到的混沌同步现象,对响应系统的稳定性及同步原理进行了理论分析,这里进一步介绍他们的结果.

在驱动-响应关系的混沌同步类型中,由驱动系统与响应系统通过驱动变量构成总体动力学系统,其特点是,响应系统的行为取决于驱动系统,而驱动系统的行为与响应系统无关,为了把上述思想推广到更一般的情形,有必要引入一些定义.

假设驱动系统可以分解为真正用于驱动响应系统的 m 维驱动变量矢量 V 以及不用于驱动的 k 维变量矢量 U,响应变量用 l 维变量矢量 W 表示.于是,总体动力学系统的总维数为 n,且 $n=m+k+l$.

我们现在把驱动-响应总体动力学系统表示为

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= f(V,U) \qquad (m-\text{维}) \\
\dot{U} &= g(v,U) \qquad (k-\text{维}) \\
\dot{W} &= h(v,W) \qquad (l-\text{维})
\end{aligned}
\tag{5.211}
$$

现在中心的问题是:当我们复制一个响应系统 W'后,何时响应系统是一个稳定的子系统?即当给 $W(t)$及 $W'(t)$以相同的驱动信号(变量)在 $t=0$ 时刻在 $W'(0)$邻近出发的轨线,在何条件下,$\Delta W(t)=|W'(t)-W(t)|\to 0$?这个问题立即导致对运动的变分方程,根据矢量场,我们有

$$
\begin{aligned}
\Delta W &= h(V,W')-h(V,W) \\
&= D_w h(V,W)\Delta W + o(V,W)
\end{aligned}
\tag{5.212}
$$

这里 $D_w h$ 是响应系统矢量场的雅可比行列式对响应变量 W 求偏导数. $o(V,W)$为高阶项,在 ΔW 很小的极限下,有

$$\Delta W = D_w h(V, W) W \tag{5.213}$$

若 $W(t)$是常数或周期态,则可求出 $D_w h$ 的特征值或多重乘子以判断 $W(t)$的稳定性,但是这里 W 受混沌信号 V 所驱动,所以就不能作简单的稳定性分析了.

Pecora 与 Carroll 已经发展了用混沌信号驱动系统的一种稳定性分析理论,即所谓条件李雅普诺夫指数稳定性判据,或同步定理,虽然可以通过求解方程(5.213)研究系统(V,U,W)的稳定性问题,但是,我们这里将讨论更一般的理论,它不依赖于初始条件的选择.

设在方程(5.213)中的 ω 平面内可以利用一矩阵 Z,使得 $Z(0)$等于单位矩阵,于是有

$$\Delta Z = D_w h(V, W) Z \tag{5.214}$$

通常称(5.214)的解 $Z(t)$为传输函数或主矩阵解,$Z(t)$将决定在任何特殊方向上对于轨线的微扰是否增长或缩小,可以把 $Z(t)$认为是表示一个坐标系的演化,它是从笛卡尔系开始,但是随着时间推移在相应于李雅普诺夫指数的各种方向上发生拉抻、压缩和畸变.当 $t\to\infty$时,矩阵 $Z(t)$对具体驱动的轨线$(V,U)(t)$,可以被用于确定 W 子系统的李雅普诺夫指数,倘若所有的李雅普诺夫指数都是负的,则 $W(t)$是一条渐近稳定的轨线.这些指数取决于 $V(t)$,并且都是 W 子系统稳定性的惟一测度,一般地,它们并非复合系统(U,V,W)的李雅普诺夫指数的一个简单子集.由于它们是以驱动变量为前提条件的,所以称这些李雅普诺夫指数为条件李雅普诺夫指数.显然,响应系统的稳定性条件(必要条件)是,响应系统的所有的条件李雅普诺夫指数为负值,线性稳定性的基本定理证明:对于许多动力学系统,该必要条件同时也是一个充分条件.

稳定性判据定理 在所有的时刻 t，具有 $O(0,t)$ 的非线性非稳恒系统

$$\dot{x} = A(T)x + O(x,t) \tag{5.215}$$

的零解(null solution)将是渐近稳定的，只要该系统满足下列条件：

(1) 对于 t，$\lim\limits_{\|x\|\to 0} \|O(x,t)\| / \|x\| = 0$ 都成立；

(2) 对于所有的 t，$A(t)$ 都是有界的；

(3) 线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 的零解是渐近稳定的.

上述判据(1)和(2)对于参数值都是相同的多数系统(下面将看到)都是成立的.但是，判据(3)只有在条件李雅普诺夫指数都是负的时候才能确保成立.

上述定理确保存在初始条件的一个非空集，在该集下 $W'(t)$ 将收敛于 $W(t)$，因此，该定理把通常的稳定性判据(雅可比的特征值及 Floquet 乘子)推广到适用于任意驱动系统 $V(t)$ 的李雅普诺夫指数.

值得指出：上述思想可以毫无困难地应用于映像情形，其形式为

$$
\begin{aligned}
v_{i+1} &= f(v_i, u_i) \\
u_{i+1} &= g(v_i, u_i) \\
\omega_{i+1} &= h(v_i, \omega_i)
\end{aligned}
\tag{5.216}
$$

且 ω 子系统的稳定性判据是积

$$J = \prod_{i=1}^{\infty} D_{\omega} h(v_i, \omega_i) \tag{5.217}$$

的特征值所算出的李雅普诺夫乘子(指数).这就为研究混沌驱动提供了从映像研究的可能选择，尽管通常用连续流模拟物理系统更好.

简言之，Pecora-Carroll 的混沌同步原理归结为：只有当响应系统的所有的条件李雅普诺夫指数都为负值时，则才能达到响应系统与驱动系统的混沌同步.

我们下面举一些例子，阐明同步原理的应用概况.

例 1 Lorenz 系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x)\\ \dot{y} &= -xz + rx - y\\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned} \tag{5.218}$$

首先，我们研究该方程的混沌态情形. 著名的"蝴蝶效应"(混沌奇怪吸引子)有一组参数为 $\sigma = 16, b = 4$ 及 $\gamma = 45.92$，为了考察能否应用该系统达到混沌同步，则必须计算由 Lorenz 系统所构造的各种总体驱动-响应系统的条件李雅普诺夫指数 λ. 于是，能够实现混沌同步的前两种总体系统可以分别描述如下：

第一种：由 x 作驱动变量时，

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dot{x} = \sigma(y - x)\\ \dot{y} = -xz + rx - y\\ \dot{z} = xy - bz\end{array}\right\}\text{驱动系统}\\ \left\{\begin{array}{l}\dot{y}' = -xz' + rx - y'\\ \dot{z}' = xy' - bz'\end{array}\right\}\text{响应系统}\end{array}\right\}\text{总体复合系统} \tag{5.219}$$

第二种：由 y 作为驱动变量时，

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dot{x} = \sigma(y - x)\\ \dot{y} = -xz + rx - y\\ \dot{z} = xy - bz\end{array}\right\}\text{驱动系统}\\ \left\{\begin{array}{l}\dot{x}' = \sigma(y - x')\\ \dot{z}' = x'y - bz'\end{array}\right\}\text{响应系统}\end{array}\right\}\text{总体复合系统} \tag{5.220}$$

以上用带一撇来标记响应系统的变量，只要把驱动系统中的稳定子系统用相应的带撇变量替换即可，而驱动变量保持不变. 因此，这种有驱动——响应关系的混沌同步类型，也可以称为变量替

换的混沌同步类型.

应用数值计算研究方程组(5.219)及(5.220),不难发现第一种情形中 y' 和 z' 分别与 y 及 z 达到同步,第二种情形中 x' 及 z' 分别与 x 及 z 也达到同步. 一般同步过程是这样的:开始由于初始条件不同,它们的轨线在开始后一段时间内十分不同,但是经过适当长的时间后,它们便趋于同步,最后达到完全同步状态.

为了定量表示同步过程,我们可以应用上述同步定义(5.208)式,通常可以简单地采用驱动系统与响应系统的相应变量之间的差值,或它们差值的绝对值,或求其总和来表征之,如

对于第一种情形,有

$$\begin{aligned} \zeta_y &= |y - y'| \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty \\ \zeta_z &= |z - z'| \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty \end{aligned} \tag{5.221}$$

或

$$\sum \zeta_i = \zeta_y + \zeta_z \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty$$

对于第二种情形,有

$$\begin{aligned} \zeta_x &= |x - x'| \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty \\ \zeta_z &= |z - z'| \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty \end{aligned} \tag{5.222}$$

或

$$\sum \zeta_i = \zeta_x + \zeta_z \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty$$

倘若只有某个变量如 $\zeta_x \to 0$(或达到规定的绝对误差精度如 10^{-3} 以上),则称此为部分同步,只有当 $\sum \zeta_i \to 0$($t \to \infty$ 时),则称达到完全同步.

需要指出:Pecora-Carroll 的同步方案也存在一些实际困难,即它对于一些实际非线性系统,由于物理的、生物的或内在的原因,系统无法分解为两个部分,这时就无法构造响应系统,例如激光系

统内部的电场就无法作类似的分解. 因此, 对于描述流体及激光系统的 Lorenz 方程, 从实验上来实现上述的驱动-响应关系的同步方案就很困难, 倘若设想用电子线路模拟上述 Lorenz 方程的混沌同步, 由此实验上要求要有非常高的电压, 这在技术上又难以达到. 后来 Cuomo 及 Oppenheim 采用一个适当的变量变换($u = x/10, v = y/10$ 及 $w = z/10$), 才巧妙地化难为易, 在实验线路上成功地模拟了 Lorenz 系统的上述混沌同步实验.

例 2 Pecora-Carroll 首次混沌同步电路.

我们现在来分析图 5.20 所示的第一个混沌同步电路. 该电路的行为犹如存在两个不稳定的焦点, 其一取决于跳跃电压之一的回滞分量, 从而导致系统从两个焦点之间交替地回旋地跳来跳去, 似乎像 Lorenz 混沌奇怪吸引子-"蝴蝶效应"的畸变形式. 图 5.20 的电路可用方程描述:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma x_1 + c x_3$$

$$\dot{x}_2 = -\omega x_1 - \delta x_2$$

$$\epsilon \dot{x}_3 = (1 - x_3^2)(S x_1 - D + x_3) - \delta_3 x_3 \qquad (5.223)$$

由于电压 x_3 在两个值之间往返转变, 产生了回滞特性, 由此引起了在(x_1, x_2)子系统内的振荡中心, 即不稳定焦点沿 x_1 轴来回跳跃.

响应系统由二维复制而成的, 即由 x_1 和 x_2 组成, 由 x_3 为驱动电压. 因而, 要作一个新变量变换, 使得动力学方程的驱动部分与响应部分相隔开. 为此, 令

$$x_4 = (x_3 + \beta x_1)/\alpha$$

于是, 根据 x_1, x_2 及 x_4, 动力学方程变为

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma x_1 + c(\alpha x_4 - \beta x_1)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega x_1 + \delta_2 x_2$$

$$\dot{x}_4=(1/\alpha)\{[1-(\alpha x_4-\beta x_1)^2]Sx_1+\alpha x_4-\beta x_1\}/\varepsilon-\delta_3$$
$$\times(\alpha x_4-\beta x_1)/\varepsilon-\beta x_2-\beta\gamma x_1-c\beta(\alpha x_4-\beta x_1)\quad(5.224)$$

现在变成由 x_4 电压驱动(x_1, x_2)子系统，对于混沌态下，他们选用的线路参数为：$\gamma=0.2$, $C=2.2$, $\alpha=6.6$, $\beta=7.9$, $\gamma_2=0.01$, $\omega_2=10$, $S=1.667$及 $D=0$. 由于方程(5.224)中的雅可比都以 x_1 及 x_2 为常数，所以可以直接求出条件李雅普诺夫数 $\lambda_1=-16.587$及 $\lambda_2=-0.603$，因此(x_1, x_2)的子系统是稳定的，由此构成的响应系统可以与驱动系统达到混沌同步，即满足混沌同步原理.

电路本身工作频率在几个 kHz，实验发现，大约在 2ms 内就达到了响应系统与驱动系统同步，这个同步时间与李雅普诺夫指数的倒数为毫秒量级相一致. 从上述图 5.21 可见同步结果. 倘若电路参数改变 5%，则尽管这时 λ 仍然为负值，但是同步变差，这说明复制的响应系统的误差有一定的允许范围，否则会影响同步效果. 事实上，影响同步效果的因素还很多，如环境噪声等等效应，不过，他们的同步实验线路对于参数的小变化和小噪声的影响不大，具有一定的鲁棒性.

§5.13.3 收敛率问题

上述关于同步的判据(响应系统的稳定性)可以拓广到：计算一条响应轨线与真正轨线的收敛率问题，从本质上，上述计算只适用于 $|\Delta W|$ 很小的情形，实际上对于 $|\Delta W|$ 在混沌吸引子的许多系统中，这种计算的结果都很好，从标准的观点看，这种计算不仅取决于系统本身，而且依赖于响应系统的吸引域的形状，这两个因素都可能导致轨线到达真正的轨线附近时跑出相空间，出现所谓“wind around”现象，因此，应当注意到，对于 $|\Delta W|$ 为较大值的情形，利用上述收敛率时要特别谨慎小心.

为了计算实际的收敛率，需要计算平均收敛率及其它们相关的方向. 这样问题就变成寻求条件李雅普诺夫指数及其特征矢量.

为此，根据上述变分方程(5.212)，求解长时间 t 下的主矩阵，可以得到这些量. 于是，李雅普诺夫指数为

$$\lambda_i = \frac{1}{t}\ln v_i \tag{5.225}$$

这里 v_i 为 $Z(t)$ 的特征值，它们与特征矢量 S_i 有关，可以应用 Eckman-Ruelle 的 QR 分解技术计算上述指数，从 $Z(t)$ 的对角线上直接求得 S_i，只要取 t 尽可能长即可. 为了验证该对角线结果，可以把所得到的特征值与 Eckman-Ruelle 的分解技术所算得的特征值相比较，倘若两者吻合得较好，则可认为，该特征矢量也与从长时间所得到的实际特征矢量吻合得较好.

此外，还有一种稳定性计算方法适合于这里的特征矢量的计算，对于小 $|\Delta \boldsymbol{W}(0)|$ 情形，收敛性近似为

$$\Delta \boldsymbol{W}(t) = \mathrm{e}^{At}\Delta \boldsymbol{W}(0) \tag{5.226}$$

这里 A 可以从对角线上具有 λ_i 的对角矩阵变换回到原坐标系统来得到，换言之，可以用从李雅普诺夫指数构造的一个恒定矩阵的指数以及由特征矢量 S_i 所产生的变换来近似 $Z(t)$，已证明，这能较好地近似包括与非正交特征矢量在内的有关效应所导致的收敛率.

混沌同步问题的理论和实验工作正在迅速进展中，尚有许多令人感兴趣的问题值得进一步研究.

§5.14 混沌控制与同步的应用

混沌控制与同步之所以令人关注，是因为它具有诱人的应用潜力. 多种多样的非线性问题，充满千姿百态的混沌奇怪吸引子，出奇制胜的混沌控制与同步，正在迎来绚丽多姿的美好发展前景.

混沌包含超混沌，大体有四个类型. 一是时间混沌，二是空间混沌，三是时空混沌，四是功能混沌. 不同的混沌类型既有共性的

特征，又有不同的特征和控制对策、方法. 目前，混沌的控制与同步的方法和应用的研究都刚刚拉开序幕，非线性科学将以此为契机，在21世纪推向高潮.

§5.14.1 改善和提高激光器的功效

应用混沌控制与同步来改善和提高激光器的性能，特别是提高功率等，是当前研究的一个热点. 例如，美国海军研究实验室的一个研究小组(Schwartz, Triadaf, Carroll 及 Pecora 等人)利用跟踪控制法，在激光装置上不仅在很宽的功率范围维持激光稳定运行，而且惊人地把激光输出功率提高了15倍. 这是因为原来不加控制时由于混沌的缘故只能在有限的功率范围内维持稳定，跟踪控制加上去后，可以自动补偿系统随时间演化而产生的参数变化或其他因素所导致的参数慢变，而且消除了激光混沌而实现对高周期的稳定控制.

美国佐治亚理工学院 Roy 及其同事最先从混沌控制中获益. 他们一直在研究激光中的"倍增晶体"效应，该晶体把入射光的频率加倍，即波长减半，入射为1064nm的红光，出射为532nm的绿光. 由于晶体的缺乏，把晶体调到某些方向时，绿光的强度出现混沌. 正当 Roy 小组为此困惑不解时，在1991年10月第一届国际混沌实验会议上遇到了 Hunt, Hunt 的偶然正比反馈技术为他解决了这一难点. 会后 Roy 等人仅在两周内为其激光器装配上一个 Hunt 型的控制器，居然首试成功，连续几天，把激光器控制到高达23周期，驱动频率达15万 Hz，从而不必在很宽的频带上进行调态，而获得所需的激光能量，有效地消除了"倍增晶体"混沌效应. 他们还与海军实验室携手合作在用跟踪法控制激光混沌方面作出了成效. 因此，可以预期，利用混沌控制技术研制品质优异、单色性好、高功率的各种特殊用途的激光装置，无疑会给具有广阔应用的激光技术，如虎添翼，大有用处. 诸如，用于受控热核聚变中的加热、军事上的战略战术武器，工业中的加工与切割，激光测距，等等.

§5.14.2 在秘密通讯中的应用

利用混沌同步的实现秘密通讯是近年来竞争最激烈的应用研究领域．Carroll 和 Pecora 发现混沌同步后，首先设想利用电子线路来达到混沌通讯的目的．其主要依据是，只有当秘密通讯的双方具有完全相同的非线性线路(混沌电路)时，才能达到混沌同步，从而实现秘密信号从发射机的编码到接收机的解码的全过程，否则无法达到混沌同步，也就无法解密信息．因此，至关重要的是接收机系统必须是发射机系统中稳定的子系统的复制品．否则不能传递和获取任何机密信息．他们的实验表明，虽然按他们的驱动响应方案不难恢复隐藏在混沌中的信号，但是要建立一个真正实用的秘密通讯系统、研制一些极为精密的通讯方案所涉及的技术要求是很高的．Carroll 和 Pecora 所在的研究组正在加紧研究中，已经发现一种混沌系统就像一个锁相环路一样，能与其他装置一起改变调频机，跟踪发射信号的变化．

美国麻省理工学院、华盛顿州立大学及伯克利加州大学等科学家都为此参与了竞争，各自加紧研制新的混沌系统、有效的信号处理等通讯技术．值得一提的是，麻省理工学院电子学实验室的 Cuomo 及 Oppenheim 设计了模拟 Lorenz 系统的混沌同步电路，巧妙地解决了 Pecora 和 Carroll 曾经遇到的电路上的一个技术难点．

因此，根据混沌同步原理，以上两个方案均可在实验中达到混沌同步．但是若以 Z 为驱动变量，则相应的响应系统的李雅普诺夫指数为正值，这个方案则无法实现混沌同步．

据悉，由 Chua 领导的研究小组已经完成首次混沌同步的通讯实验，说明他们的方案和技术是可行的．特别是 Chua 线路可作为电文密码翻译的关键设备，该关键技术完全由实际线路中参数的辨别来达到．下面对 Chua 同步线路涉及的通讯中一些主要技术作一简介．

混沌开关或称参数调制．这是如何把混沌系统应用于密码发射的最简单技术，其基本思想是，根据在不同的系统参数下不同的

吸引子来编制二进制信号代码.例如,用1表示参数 μ_1 下所对应的一个混沌吸引子 A_1,用0表示参数 μ_1 下所对应的另一个混沌吸引子 A_2.混沌系统的行为在 A_1 与 A_2 之间转换,由参数变化来调制系统的响应时间.Parlitz 等人已证明这一做法是有用的,实验实现是可行的,用于秘密通讯技术可能性较大.

混沌隐藏技术(秘密通讯).利用混沌信号的另一种可能性就是利用混沌来隐藏所带信号的信息.Oppenheim 等人及 Kocarev 等人都已描述了该技术,包括 Pecora-Carroll 的实验装置.同样地,Chua 线路也作为混沌同步通讯的基本线路,例如由 Chua 线路作为发射机,由两个部分 Chua 线路作为接收机.第一个子电路作为解码关键,仅当它与发射机线路精确匹配时才能达到同步,于是重新产生 V_{c_2} 信号.第二个子系统用来重构迷失的变量 V_{c_1},V_{c_1} 是通过简单地恢复信息信号所需要的.在所有的实际线路中业已确认,可以利用混沌信号作为一种隐藏信号,并可利用 Pecora-Carroll 的同步方法成功地解码这样的信号.

混沌调制、宽谱发射.Halle 等人提出了解决秘密通讯中最复杂的问题的办法,基本思想是用一个类噪声混沌信号乘以信息.他们用两个 Chua 线路作为发射机,把电流信号 $i_i(t)$ 注入该线路中,从而修改了电容器 C_1 两端的电压.该电流信号取决于待发射的信息 $v_s(t)$ 及逆编码函数 C,即 $i_i(t)=C(v_s(t))$.通过 $v_r(t)=C^{-1}(i_d(t))$ 把所测得到的电流信号 i_d 进行解码.C 的选择要使得在所有的 $v_s(t)$ 的发射期间,确保被发射的信号仍然是混沌的且看上去是相同的.接收机与发射机的所有电路元件是精确匹配的,由一个电压缓冲器把两个系统分开.Halle 等人的实验结果表明,利用自同步线路(特别是 Chua 线路)去执行宽谱通讯系统是可行的.该类型的混沌信号调制比参数调制及隐藏技术有几个优点.首先,它把混沌信号谱的整个范围都用来隐藏信息,其次,它增加了对参数变化的灵敏性,从而增强了保密性.

此外,我们想指出,除了混沌同步通讯是当前应用的一个热门

课题外,直接利用混沌通讯也十分活跃.应用混沌通讯的基本思想是,利用简单的混沌动力学系统来产生复杂的振荡波形,通过符号动力学分析赋以不同的波形以不同的信息序列,然后通过适当的小微扰办法,实现对不同信息的传送,从而达到比通常微电子学更高效和高信息量的通讯.人们已建立了产生双螺旋混沌吸引子的电子线路系统,并声称发展了一种实用的高速符号控制技术,正在向实用开发迈进.不过,直接利用混沌通讯及混沌同步通讯两条途径究竟谁先实现实用,现尚未分晓,目前仍处于"百家争鸣,百花齐放"阶段.特别一提的是,主动-被动同步类型很可能后来居上,因为利用超混沌同步通讯的前景更为广阔、效率更高及信息量更大.

§5.14.3 在其他高新科技领域中的可能应用

混沌(超混沌)的控制与同步可能在今后高新科技领域中有重要的应用前景,并将在国际上出现竞争的发展趋势.例如,利用简单非线性系统的时间混沌,特别是时空混沌,可以作为大量的信息源,从而可以研制超高容量的动态信息存储器,用于信息识别、记忆及处理等目的.据悉,日本已经利用混沌特性研制了新的功能元件,它可作为大容量动态信息存储器及高速数据处理系统.利用混沌编码及解码技术,可能大大地扩展通讯量及加强保密性等,因此该技术早就列入美国国防的研究计划,正在加紧秘密研究之中.从当前发展的势头来看,我们可以预言,(超)混沌控制与同步作为信息科学中的非线性技术在未来信息科技等领域将发挥难以预料的重要作用,从而加速国际上现代社会信息化的进程.

未来能源的希望所在——受控热核聚变中的等离子体的混沌、湍流等的控制约束问题,是涉及难度最大的现代科技问题.实际上它们的中心问题是如何有效控制等离子体中复杂运动的时空混沌及湍流问题.虽然目前已有诸多混沌控制方法,但对解决这一大难题,是涉及难度最大的现代科技问题.虽然目前已有诸多混沌控制方法,但对解决这一大难题,尚未见端倪,但是,我们认为,这是朝着解决问题的一种研究方向,换句话说,时空(超)混沌的控制

与同步的研究应当把这一难题包括在自己的研究目标和范畴之内.事实上,正因为这个挑战性课题的极端重要性和深远意义,国际上有卓识远见的科学家们正朝着这个方向努力,该课题已引起了国内外的关注.美国已经把混沌信号控制处理技术应用于反应堆中的热传递系统的时间序列的数据分析,以及拓广于许多领域中的无损探测.有人预计,应用时间空间混沌为开发混沌计算机提供了一种可能性,即可能是继研究模糊计算机之后,为开创新型计算机提供另一种发展途径.

混沌控制与同步越来越与生命科学的研究诸如神经网络、脑科学、心脏等领域的研究密切有关.首例应用可以追溯到第一届国际实验混沌会议,在那里导致了在生物系统中实现混沌控制的首项技术的诞生.洛杉矶加州大学医学院的一个研究小组(Ditt,Spano,Alan,Garfinkel 及 James N.Weiss)研究了一只兔子心脏上的一个隔离区.通过向冠状动脉注射一种称为乌本苷的药物能在心肌上引起不规则的快速收缩.一旦这种心律不齐的症状开始出现,他们就用一种电信号去刺激心脏.这种信号就是按照前述的 OGY 控制方法设计的一种方案来产生的.实验结果显示,这些看上去随机的信号足以使心脏进行有规则的跳动,有时还能把心跳降低到正常的水平.另一方面,随机信号或周期信号并不能中止心律不齐,而且常常会使人恶化.他们已经开始测试采用不同形式的 OGY 混沌控制方案能否达到控制人类的心律不齐问题.预计这种混沌控制技术有可能用于治疗心室纤维颤动(这两个症状中上下心室不规则收缩导致泵送血液难以进行).现在利用混沌控制技术正在加紧研究一种心脏整律器及去纤维颤动器.

预计,混沌控制与同步对生物工程及生命科学的研究中是一种强大的推动力,必将大大促进揭开人类自身的奥秘.

从大量的文献和国际会议中获悉,一些国家已投入巨额的研究经费及大量的人力物力,在从多部门加紧混沌控制与同步及应用的各种实验研究和关键技术的探索工作.这方面的研究已与高新科技发展日益紧密结合起来.混沌发现堪称是继 20 世纪量子力

学和相对论发现之后的第三次物理学革命,前两次科学革命已给人类带来了无比辉煌的物质和精神文明.我们相信,正在深入展开的第三次科学革命,正在以混沌控制与同步的应用为契机,必将日益显示出巨大的应用潜力,为人类的高度文明作出进一步的贡献.

参考文献

[1] 盛昭瀚,马军海. 面对复杂性——混沌时序经济动力系统重构技术. 管理科学学报,1998,1:31～42

[2] 盛昭瀚,王涛,刘德林. 非线性时间序列模型稳定性分析. 北京:科学出版社,1993

[3] 盛昭瀚,吴广谋. A new conception of the control regarding self-organizing process, Preprints 11th IFAC world conf

[4] 盛昭瀚,马军海,陈国华. 面对复杂性——混沌时序经济动力系统重构技术(II). 管理科学学报,1998,4:15～19

[5] 马军海,陈予恕,刘曾荣. 动力系统实测混沌数据的本征值分解技术. 振动工程学报,1999,9:323～330

[6] 马军海,盛昭瀚,陈春旺. 经济时序动力系统的分形及混沌特性研究. 系统工程学报,2000,(15)1:13～18

[7] 马军海,陈予恕,刘曾荣. 三种动力系统 Lyapunov 指数的比较. 天津大学学报,1999,2:180～187

[8] Ma Junhai(马军海),Chen Yushu(陈予恕),Liu Zengyong(刘曾荣). The Influence of the Different Distributed Phase - Randomized on the Experimental Data Obtained in Dynamic Analysis. Applied Mathematics and Mechanics,1998, 19(11):1033～1042

[9] 马军海,陈予恕,刘曾荣. 三种动力系统实测数据奇异值的比较. 天津大学学报,1999,3:275～280

[10] 马军海. 动力系统实测数据相空间重构的改进方法. 天津大学学报, 2000(30)1:16～21

[11] 马军海,陈予恕,刘曾荣. 动力系统实测数据的非线性混沌特性的判定. 应用数学和力学,1998,19(6):481～488

[12] 马军海,陈予恕,王建明. 相位随机化的分布规律对实测数据判值影响的分析. 非线性动力学学报,1997,11:25～33

[13] 马军海,陈予恕,刘曾荣. 不同随机分布的相位随机化对实测数据影响的分析研究. 应用数学和力学, 1998,(19)11:955～963

[14] Ma Junhai(马军海),Chen Yushu(陈予恕),Liu Zengyong(刘曾荣). Threshold Value for Diagnosis of Chaotic Nature of the Data Obtained in Nonlinear Dynamic Analysis. Applied Mathematics and Mechanics, 1998,(19)6:513～520

[15] 陈予恕,刘曾荣,马军海.关于动力系统实测数据的非线性混沌特征判定的几个问题.MMM会议论文集,上海,1998.8
[16] Chen Yushu(陈予恕),Ma JunHai(马军海).The State Space Reconstruction Technology of Different Kinds of Chaotic Data Obtained From Dynamical System. ACTA MECHANICA SINICA.1999,(15)1:82~92
[17] 马军海,陈予恕,刘曾荣.动力系统实测数据的Lyapunov指数的矩阵算法.应用数学和力学,1999(20),9:919~927
[18] 马军海,盛昭瀚,唐文雄.不同的相位随机化对时序混沌特征影响的研究.东南大学学报,1999,2:93~99
[19] 盛昭瀚,马军海.面对复杂性Ⅲ——经济时序动力系统最佳时序采样间隔分析研究,管理科学学报,2000(5),1:100~105
[20] 马军海,陈予恕.混沌时序相空间重构及其应用研究.应用数学和力学,2000(21),11:1117~1124
[21] 王宁,薛承建,盛昭瀚.基于嵌入混沌序列的遗传算法,系统工程理论与实践,1999,No,11
[22] Fractal,Geometry — Mathemetical Foundations and Applications. Edited by Kenneth Fal Coner, England
[23] Applied chaos,Edited by Jong Hyun Kim Electric Power Research Institute Palo Alto, California 1992
[24] Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems edited by S. Nell Rasband,Department of physics and Astronomy Brigham Young University Provo,Utah 1992
[25] 陆启韶,分岔与奇异性.上海科技教育出版社,1995
[26] 刘秉正,非线性动力学与混沌基础.东北师大出版社,1994
[27] 马军海,陈予恕.动力系统实测数据的非线性模型重构.应用数学和力学,1999(20),11:112~115
[28] Ma Junhai(马军海), Chen Yushu(陈予恕), Liu Zengyong(刘曾荣).The Non-Linear Chaotic Model Reconstruction for the Experimental Data Obtained from Different Dynamic System.Applied Mathematics and Mechanics, 1999, (20)11:1214~1221
[29] Ma Junhai(马军海), Chen Yushu(陈予恕), Liu Zengyong(刘曾荣).The State Space Reconstruction Technology of Different Kinds of Chaotic Data Obtained from Economic Dynamical System; Proceedings of"99 International Conference on Management Science & Engineering, Nov. 1999, Yichang, P.R. China, 106~109
[30] 马军海,盛昭瀚.经济时序动力系统的分形及混沌特性研究.系统工程学报,2000,1:13~19

现代数学基础丛书

